تحليل البيانات

في

البحوث النفسية والتربوية

الدكتور / صلاح الدين محمود علام

دار الفكر العربي

تحليل البيانات

فى

البحوث النفسية والتربوية

الدكتور

صلاح الدين محمود علام

أستاذ القياس والتقويم والإحصاء التربوى

كلية التربية — جامعة الأزهر

١٤١٣ هـ - ١٩٩٣ م

ملتزم الطبع والنشر

دار الفكر العربى

الإدارة : ٩٤ ش عباس العقاد — مدينة نصر

القاهرة ت : ٢٦١٩٠٤٩

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة الكتاب

الهدف من هذا الكتاب هو تقديم عرض مبسط لأهم المبادىء والطرق الإحصائية الرئيسية التى يمكن للباحث المبتدىء الاستعانة بها فى تحليل البيانات الخاصة بالبحث النفسى والتربوى . فطلاب الدراسات العليا الذين يخطون أول خطوة على طريق البحث يجدون أنفسهم فى حاجة ماسة إلى مرشد ينير لهم هذا الطريق .

وربما يتساءل البعض : لماذا اخترنا عنوان الكتاب « تحليل البيانات Data Analysis » بدلا من « الإحصاء Statistics » ؟ . والسبب فى ذلك أننا نود أن نضع المفاهيم والطرق والأساليب الإحصائية فى إطارها الصحيح بحيث تخدم طلاب البحث النفسى والتربوى .

فتحليل البيانات يعد عملية أوسع وأشمل من العمليات والتطبيقات الإحصائية . إذ أننا يمكننا فى بعض الأحيان تحليل البيانات بدون استخدام أساليب إحصائية . كما أن تحليل البيانات يعتمد بدرجة كبيرة على قدرة الباحث على استيعاب بياناته وفهم طبيعتها ، والأسئلة التى يود الإجابة عليها باستخدام هذه البيانات .

فن المعلوم أنه يمكن للباحث الإجابة على أسئلة مختلفة من نفس مجموعة البيانات ، وربما يحتاج إلى أكثر من أسلوب إحصائى ليجيب على هذه الأسئلة ، وهذا يعتمد اعتماداً كبيراً على فهم وتبصر الباحث للهدف من بحثه الذى جمع من أجله الملاحظات Observations المختلفة التى يود تحويلها إلى بيانات يمكن تحليلها . فاستخدام الحاسبات الالكترونية فى إجراء عملية تحليل البيانات لا يمكن

أن يغنى الباحث عن الفهم المستنير لما تنطوى عليه بيانات بحثه إذ أن الحاسبات الالكترونية تجرى العمليات الإحصائية المختلفة عن طريق ما يسمى بالبرامج الجاهزة Canned Programs . وهنا يقع العبء الأساسى على الباحث سواء فى دقة المدخلات Inputs أو فى تفسير المخرجات Outputs . فكم من باحث ظن أن الحاسبات الالكترونية ستقوم بتحليل بيانات بحثه بدلا عنه ، ولكنه اكتشف أخيراً أنه كان مخطئاً .

وتأكيداً للدور الرئيسى للباحث فى تحليل بيانات بحثه وتبصره بطبيعة وتكوين هذه البيانات يرى جون توكى John Tukey — رائد تحليل البيانات — أن عملية تحليل البيانات هى « عملية تحرى Detective work » عن طريق العد والأعداد والأشكال تقع مسئوليتها الأولى والأخيرة على عاتق الباحث . ويكون دور الحاسبات الالكترونية هو معاونة الباحث على تنفيذ استراتيجيات التحليل التى توصل إليها بدرجة أكثر فاعلية ومرونة .

والكتاب يتكون من جزأين يختص الجزء الأول — وهو الذى بين يديك الآن — بالأساليب الوصفية فى تحليل البيانات ، ويختص الجزء الثانى بالأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات . ومما لا شك فيه أن الأساليب الوصفية هى التى تمهد الطريق للأساليب الاستدلالية . إذ يمكن للباحث استخدام الأساليب الوصفية فى تلخيص بيانات بحثه وتبويبها وتمثيلها بيانيا ، والتبصر فى طبيعة وخصائص وتكوين هذه البيانات .

ونظراً لأهمية هذه الأساليب فقد أطلق عليها جون توكى Tukey اسم الأساليب الكشفية فى تحليل البيانات

Exploratory Data Analysis (EDA)

لأنها تساعد الباحث على كشف جوانب معينة فى البيانات ربما لم يكن يتوقعها . فكم من نتائج غير متوقعة توصل إليها العلماء نتيجة للفحص الدقيق المستنير لمجموعات البيانات التى حصلوا عليها . كما أنها تساعد الباحث على اختيار المناسب

من الأساليب الإحصائية الاستدلالية المتقدمة بناء على نتائج هذا التحليل الوصفى الكشفى .

وبالرغم من أننا سنعرض فى الكتاب بجزأيه لطرق تحليل البيانات إلا أننا تحقيقا لما ذكرناه سنركز على وظيفة التحليل وكيفية استخدام الباحث للمفاهيم والطرق الإحصائية فى هذا التحليل استخداما واعيا ، والتفسيرات التى يمكن أن يستمدها من نتائجه . وقد حاولنا أن نعرض هذه المفاهيم والطرق الإحصائية بأقل قدر ممكن من الرموز الرياضية حتى يتسنى للطلاب والباحثين من مختلف التخصصات فهمها بسهولة ، إلا فى بعض الحالات التى استدعت عرض كيفية اشتقاق بعض الصور أو الخصائص الإحصائية الهامة . وتيسيراً لذلك فقد بدأنا الجزء الأول من الكتاب — وهو الذى بين يديك الآن — بمراجعة لبعض العمليات الحسابية والجبرية الأساسية التى ربما يحتاج إليها الباحث كى يتابع العرض .

وقد قسمنا الجزء الأول من الكتاب إلى ثلاثة أبواب رئيسية ، يعرض الباب الأول منها تحليل البيانات ذات المتغير الواحد، والباب الثانى تحليل البيانات ذات المتغيرين ، والباب الثالث تحليل البيانات المتعددة المتغيرات .

وقد عرضنا فى الباب الأول الطرق المختلفة لتصنيف وتلخيص ووصف البيانات ذات المتغير الواحد التى تساعد الباحث على التفسير وإبراز المعلومات التى ربما تنطوى عليها هذه البيانات . ويشتمل هذا الباب على ستة فصول ، يتناول الفصل الأول منها أساسيات القياس وموازينه وأنواع البيانات . كما يتناول هذا الفصل مراجعة لبعض العمليات الحسابية التى يحتاج الطالب والباحث إلى إتقانها كى يتمكن من إجراء العمليات الإحصائية دون الوقوع فى أخطاء حسابية .

ويتناول الفصل الثانى طرق تبويب البيانات التى تشتمل على متغير واحد فى صورة توزيعات تكرارية وتمثيلها بأشكال بيانية مختلفة .

ويتناول الفصلان الثالث والرابع خصائص التوزيعات التكرارية ، وهذه تشمل مقاييس النزعة المركزية ، ومقاييس التشتت والالتواء والتفرطح .

أما الفصل الخامس فيتناول الدرجات المحولة وتشمل الإرباعيات والإعشاريات والمئينيات والدرجات المعيارية بأنواعها المختلفة .

ويتناول الفصل السادس التوزيعات الاعتدالية وخصائص المنحنى الاعتدالى المعيارى ، وكيفية الاستفادة بخصائص هذا المنحنى فى حل مشكلات بحثية مختلفة .

وقد عرضنا فى الباب الثانى الطرق المختلفة التى يمكن أن يستخدمها الباحث فى وصف درجة العلاقة بين متغيرين أو التنبؤ بقيم متغير بمعلومية قيم متغير آخر . ونظرا لان هذه الطرق تختلف باختلاف مستويات قياس كل من المتغيرين وشكل العلاقة بينهما ، لذلك فإننا قسمنا هذا الباب إلى تسعة فصول تناولت الفصول الستة الأولى (من الفصل السابع حتى الفصل الثانى عشر) مقاييس العلاقة بين متغيرين فى حالة ما إذا كانا من مستوى قياس واحد ، أو كانا من مستويين مختلفين . وتناول الفصل الثالث عشر بعض مقاييس العلاقة إذا كان أحد المتغيرين أو كلاهما من النوع الثنائى Dichotomous .

وقد تناولنا فى الفصلين الرابع عشر والخامس عشر موضوع الانحدار البسيط . فاهتم الفصل الرابع عشر بالانحدار الخطى البسيط ، والفصل الخامس عشر بالانحدار غير الخطى ، ومطابقة البيانات لبعض الدوال الرياضية .

ونظراً لان الباحث النفسى والتربوى كثيراً ما يواجه مواقف بحثية تتطلب دراسة أكثر من متغيرين فى وقت واحد ، فإنه يحتاج إلى طرق وأساليب إحصائية أخرى تناسب هذه المواقف . ولذلك فقد عرضنا فى الباب الثالث

بعض طرق تحليل البيانات المتعددة المتغيرات . وفى الحقيقة توجد طرق متعددة لتحليل هذا النوع من البيانات تتخطى حدود هذا الكتاب ، إلا أننا اخترنا من بينها بعض الطرق التى يحتاج إليها معظم الباحثين ، وفى نفس الوقت يمكن أن يبنى الباحث على أساسها فهمه للطرق الأخرى ، إذ أنها امتداد للطرق التى عرضنا لها فى هذا الباب وهى تحليل الانحدار المتعدد ، وتحليل المسارات .

ويشتمل هذا الباب على أربعة فصول ، يتناول الفصل السادس عشر تحليل الانحدار المتعدد فى حالة وجود متغيرين مستقلين أو أكثر من النوع الكمى . ويتناول الفصل السابع عشر طرق الضبط الإحصائى وتتضمن معاملات الارتباطات الجزئية وشبه الجزئية . والفصل الثامن عشر تحليل الانحدار المتعدد باستخدام متغيرات نوعية (تصنيفية) . أما الفصل التاسع عشر فيتناول طرق تحليل المسارات .

وقد قدمنا فى نهاية كل فصل عدداً من التمارين لتكون بمثابة تدريب للباحث على استخدام الطرق الإحصائية المختلفة ليكتسب المهارة فى تحليل البيانات بمختلف أنواعها قبل أن يبدأ فى التحليل الفعلى لبيانات بحثه .

كما قدمنا فى نهاية كل باب شكلا تخطيطيا يساعد الباحث على اختيار المقياس الإحصائى الذى يناسب شكل وطبيعة بيانات بحثه .

وينتهى الكتاب بمجموعة من الجداول الإحصائية والمراجع التى يمكن للباحث الرجوع إليها للاستزادة .

وقد راعينا التبسيط فى وصف هذه الجداول ، وأن تكون مرتبطة بالموضوعات التى عرضنا لها فى هذا الجزء الأول من الكتاب ، كما قدمنا لكل منها بنبذة مختصرة حتى يتيسر للطالب استخدامها دون جهد كبير .

ونرجو من الله أن ينفع بهذا الكتاب الباحثين فى المجال النفسى والتربوى ، وطلاب الدراسات العليا بقدر ما بذل فيه من وقت وجهد .

والله نسأل التوفيق والسداد ؟

صلاح الدين محمود علام
دكتوراه الفلسفة Ph. D.
فى التقويم والقياس
والاحصاء التربوى
من جامعة ميتشجان الأمريكية

كليه التربية — جامعة الأزهر
يناير ١٩٨٣ م

البَابُ الأوّلُ

تحليل البيانات ذات المتغير الواحد

الفصل الأول

أساسيات القياس والإحصاء

القياس والبيانات والإحصاء

موازين أو مستويات القياس

كيف نتعامل مع الأعداد في عملية القياس

أنواع البيانات

مراجعة لبعض العمليات الحسابية والجبرية الأساسية

مقـــدمة :

إن علم الإحصاء ليس مجرد علم يهتم فقط بالبيانات العددية المبوبه وغير المبوبة ، وإنما يتضمن النظرية والطرق الرياضية التي تفيد في جمع وتحليل وتفسير وتمثيل بيانات البحوث المختلفة . فعلم الإحصاء ينير للباحث النفسي والتربوي الطريق لحل أو إجابة مشكلة بحثه . ومشكلة البحث هي مجموع التساؤلات التي يود الباحث أن يجيب عليها . ومثال ذلك :

ما هو متوسط ذكاء طلاب مدرسة ثانوية معينة ؟ وهل هذا المتوسط يفوق متوسط طلاب جميع المدارس الثانوية في مصر ؟

هل الرأي العام لمجموعة معينة تجاه قضية ما أكثر تطرفا من الآراء الفردية ؟

ما هي العلاقة بين درجة الخوف وكمية الطعام التي يتناولها الإنسان ؟

ما أثر نوع وعدد التمارين الحسابية على أداء تلاميذ الصف الثالث في عمليتي الضرب والقسمة ؟

فنحن نرى كثيراً من هذه الأسئلة في البحوث النفسية والتربوية المنشورة في المجلات العلمية . وعادة ما يقترح الباحث إجابة لمشكلة بحثه ثم يجمع الملاحظات المرتبطة بالمشكلة ، ونتيجة هذه الملاحظات العلمية يتجمع لدى الباحث مجموعة من القياسات Measurements المرتبطة بخاصية معينة يود دراستها ، ويمكن أن نطلق على نتائج هذه القياسات اسم البيانات Data ، ومن ثم يمكن للباحث استخدام الأساليب الاحصائية لتحليل هذه النتائج أي البيانات بغرض التوصل إلى أدلة عن صدق الفروض التي اقترحها لإجابة أو لحل المشكلة .

ويمكن تعريف القياس بأنه تعيين أعداد للخصائص أو سمات الأشخاص أو الأشياء أو الأحداث طبقا لقواعد مصاغة صياغة واضحة .

فعند قياس الخصائص الفيزيائية مثل الطول أو الوزن فإن قواعد التكميم Quantifications أي القواعد التي تستخدم لتعيين أعداد تناظر درجات الخاصية المقاسة أصبحت مقننة ومتفقا عليها بحيث أن كلا منا يفهم الطريقة المتبعة في قياس مثل هذه الظواهر

ومقاييس الظواهر الفيزيائية الأكثر تعقيداً مثل السمع والبصر وما شابه ذلك تتطلب صياغة أكثر تفصيلا ووضوحا للقواعد أو الطرق المتبعة إذا أردنا تكميم جميع الملاحظات الخاصة بالسمة أو الخاصية المعينة بنفس الطريقة .

والقياس النفسى والتربوى يتطلب تكميم سمات أو خصائص الاشخاص أو الاشياء أو الأحداث . فنحن لا نستطيع قياس الأشخاص أو الأحداث وإنما نقيس سمات أو خصائص الاشخاص أو الأحداث .

وهنا يجب أن نميز بين القياس Measurement والعد Enumeration . فالبيانات العددية يمكن تقسيمها إلى صنفين : بيانات نحصل عليها عن طريق العد وهذه تكون على شكل تكرارات Frequencies أو نسب مئوية ، وبيانات نحصل عليها عن طريق القياس وينتج عنها قيم قياسية Metric تمثل الظاهرة المقاسة بدرجة تقريبية ، وهذا التقريب يعتمد على دقة أداة القياس المستخدمة . ويمكن استخدام الأسلوب الإحصائى فى تحليل صنفى البيانات .

ويجب أن نؤكد أن هناك فرقا بين النظام العددى بوجه عام وتطبيقاته فى العد والقياس ، فالخلط بينهما يؤدى إلى التفكير الخاطىء عند استخدام الاساليب الإحصائية فى تحليل البيانات .

فالنظام العددى هو نظام منطقى بالدرجة الأولى ، وهو يتيح فرصاً متعددة للمعالجات المنطقية . فإذا ما قنا بتعيين أعداد تصف الأحداث أو الأشياء ، فإننا نستطيع أن نتعامل مع هـــذه الأعداد بطرق معينة ونتوصل من ذلك إلى استنتاجات يمكن أن نعيد تطبيقها على الظاهرة المقاسة . إذ أننا يمكن بحق أن نصف الأشياء أو الأحداث الواقعية عن طريق الاعداد بشرط أن يكون هناك تشاكل Isomorphism أو تماثل بين خصائص الظاهرة المقاسة والنظام العددى المستخدم .

فهناك خصائص معينة للأعداد ينبغى أن نجد مايناظرها فى الظاهرة المقاسه . فمثلا كل عدد يعتبر فريدا أو متميزا عن غيره من الاعداد ، ولهذا فان أى حدث أو شىء نقيسه يجب أن يكون أيضا متميزاً عن غيره من الأحداث أو الاشياء . وتتميز الأعداد فى النظام العددى بخاصية الترتيب ، أى أن أى عدد يكون

أكبر من أعداد غيره . ولذا فإن الأشياء التى تعين لها الأعداد يجب أن تكون أيضا قابلة للترتيب على متصل حتى نستطيع وصف وتفسير ترتيب الأعداد المناظرة لها .

وتتميز الأعداد أيضاً بخاصية قابلية الجمع Additivity أى أننا نستطيع جمع أى عددين لينتج عدد آخر متميز . وتعتبر هذه الخاصية من أهم خواص النظام العددى لأنها تسمح بإجراء العمليات الحسابية الهامة على الأعداد . فإذا استطعنا جمع الأعداد ، فإنه يمكننا بالتالى إجراء عملية الطرح على هذه الأعداد (أى جمع الأعداد السالبة) ، وكذلك عملية الضرب (أى تكرار عملية جمع نفس العدد) وعملية القسمه (أى إجراء عمليات طرح متتالية) .

وليس من الضرورى أن يكون للظاهرة التى تعين لها الأعداد جميع الخصائص السابقة وهى :

التمايز أو التفريد ، الترتيب ، قابلية الجمع حتى نتمكن من قياسها . إلا أن الاستفادة من استخدام الأعداد فى القياس تعتمد على مدى توفر هذه الخصائص فى الظاهرة المراد قياسها . وموازين أو مستويات القياس تعتمد على عدد الخصائص التى تتوافر فى الظاهرة المقاسة . وسوف نعرض فيما يلى لهذه الموازين أو المستويات الأساسية المختلفة .

موازين أو مستويات القياس :

Levels or Scales of Measurement

ذكرنا أن القياس هو تعيين أعداد للسمات أو الخصائص طبقا لقواعد معينة، فالصياغة العامة لمختلف هذه القواعد وما يناظرها من مستويات القياس التى أفادت علماء النفس هو النظام الذى اقترحه ستيفنز S. Stevens عام ١٩٥١ .

فى نظام ستيفنز المبين بالجدول رقم (١) الآتى بالصفحة التالية، نجد المقاييس التى تتبع مجموعات مختلفة من القواعد يشار إليها بمقاييس ذات مستويات أو موازين مختلفة، وكل مقياس أو ميزان منها يمثل مستوى معينا من مستويات الصياغة الكمية للمتغير الذى ندرسه، كما يسمح بعمليات حسابية مختلفة .

المستوى أو الميزان	الوظيفة	العملية الحسابية	أمثلة
الإسمى	تستخدم الاعداد فى تصنيف الاشياء أو الاماكن أو الأحداث	يمكن عد عدد الحالات فى كل قسم أو فئة ، أو عدد الأقسام المختلفة ، ولكن لا يمكن إجراء العمليات الحسابية الاربع على هذه الاعداد	أنواع السيارات ، الجنس ، أرقام الشوارع
الرتبى	تستخدم الأعداد فى ترتيب الأشياء أو الاشخاص ترتيبا تنازليا أو تصاعديا	عبارات أكبر من ، أو يساوى ، أو أصغر من ، وهنا تستخدم العمليات الحسابية لمقارنة الرتب	ا أ كبر من ب ، ب أ كبر من جـ ، إذن ا أكبر من جـ
الفترى	تستخدم الأعداد فى مقارنة قياس أو درجات الافراد	تسمح بمقارنة مدى الفروق بين قياسين	درجة الشخص ا تفوق درجة الشخص ب بمقدار ٢٠ درجة مثلا فى الاختبار س
النسبى	تستخدم الأعداد فى تحديد علاقات دقيقة بين الأشياء أو الأحداث أو الأشخاص	يتوفر صفر مطلق ، وهنا نسمح باجراء العمليات الحسابية المختلفة	الشخص الذى طوله ١٨٠ سم ضعف الشخص الذى طوله ٩٠ سم

جدول رقم (١)

موازين او مستويات القياس

القياس الإسمى :

وهو أدنى مستويات القياس وفيه تستخدم الأعداد فقط كعناوين أو أقسام منفصلة للتمييز بين مختلف عناصر أو أعضاء القسم . ونظرا لأن هذه المقاييس ليست كمية فإنها تسمى شبه مقاييس Pseudo-Measurement . وأمثلة هذه الأقسام أنواع السيارات أو لاعبو فريق كرة معين أو ما شابه ذلك . أى أن الهدف من هذا النوع من القياس هو مجرد التصنيف . فالبيانات التصنيفية Categorical Data تتكون من ملاحظات تختلف من حيث إمكانية تصنيفها إلى أقسام متشابهة . مثال ذلك الكتب فى مقابل الصحف أو المجلات ، والذكور فى مقابل الإناث . وفى الحقيقة فإن معظم أنشطة تفكير الإنسان تتضمن هذه العملية التصنيفية . وفى ذلك يقول برونر Bruner وجودناو Goodnow، وأوستين Austin فى كتاب (دراسة التفكير) ، أن تصنيف الأشياء أو الأحداث أو الأفراد يحتاج إلى تجميعها فى فئات أو أقسام تشترك فى خاصية معينة تميزها عن غيرها من الفئات أو الأقسام ، وتحدث استجابتنا لهذه الأحداث أو لهؤلاء الأفراد على أساس عضويتهم فى فئة أو فى قسم معين ، وليس على أساس تفرد كل حدث أو تميز كل فرد . ولذلك نستطيع القول أن البيانات التصنيفية تتضمن فروقا نوعية . وكل مانفعله عند تعاملنا مع مثل هذه البيانات هو أن نضع الملاحظات المختلفة فى الأقسام أو الفئات المناسبة لها ثم نقوم بعد الملاحظات التى تنتمى أو تقع فى كل قسم أو كل فئة فنحصل على ما يسمى بالتكرار .

وأحيانا تصنف البيانات بالنسبة لخاصيتين مختلفتين فى نفس الوقت بدلا من خاصية واحدة ، مثل تصنيف السيارات على أساس عدد أبواب كل سيارة وعام إنتاجها ، أو تصنيف الأفراد على أساس الجنس والسن .

وتوجد كثير من الطرق الإحصائية التى يمكن استخدامها فى تحليل البيانات التصنيفية ، سنعرض لها فى هذا الكتاب ، وهذه الطرق تندرج تحت مستوى

القياس الإسمى ، إلا أننا لا نستطيع إجراء عمليات حسابية لها معنى على مثل هذه الأعداد . فالأعداد هنا تستخدم فقط كإشارات أو عناوين للأقسام المختلفة .

وربما يتساءل البعض : لماذا أطلقنا على هذا المستوى من القياس « الميزان الإسمى » ، مع أن كلمة « ميزان » Scale تشير إلى فكرة المتصل Continuum ، فالمتصل يتميز بخاصية الترتيب التى لاتنطبق على الموازين الإسمية . إلا أن القاموس يشير أحيانا إلى مفهوم « الميزان » على أساس فكرة التمييز أو التصنيف مما يبرر استخدام مفهوم الميزان فى هذا المستوى الأسمى . ففكرة التمييز أو التصنيف لاتقتصر على هذا المستوى وإنما تتعدى ذلك إلى مستويات القياس الأرقى . فالتصنيف فى الحقيقة هو أساس القياس بكافة أنواعه .

القياس الرتبى :

وهذا المستوى الثانى يسمح بترتيب السمات أو الخصائص دون اعتبار لتساوى الفروق بين أى رتبتين منها ، فالشخص الذى يتصف أو يتميز بسمة معينة بدرجة أكبر من غيره يكون ترتيبه الأول ، والشخص الذى يليه فى درجة هذه السمة يكون ترتيبه الثانى وهكذا .

فالمستوى الأدنى للقياس وهو القياس الإسمى يناظر مايسمى « بالتصنيف الكيفى أو النوعى » ، أما القياس الرتبى فهو يناظر مايسمى « بالتصنيف الكمى » . إذ ترتب الأقسام على متصل ما ، وعندئذ يمكن القول بأن ترتيب أحد هذه الأقسام يفوق ترتيب قسم آخر على ميزان القياس .

وبالرغم من أن الأرقام التى تدل على هذا الترتيب تعد منفصلة (بمعنى أنه ليس هناك ترتيب مثل ١,٢ أو ١,٥ أو ٢,٤ مثلا) إلا أن السمة المقاسة ربما تكون متصلة ، ولا يفترض فى هذا المستوى من القياس أن تكون الفروق بين الرتب مساوية للفروق بين درجات السمة موضع القياس . ولذلك لانستطيع إجراء أى من العمليات الحسابية الأربع على مثل هذه الرتب أو الأعداد المناظرة لها .

ولكننا نستطيع – كما فى حالة القياس الإسمى – أن نحسب عدد التكرارات

فى كل قسم ، ونستخدم هذه الأعداد التى تناظر الرتب فى حساب بعض المقاييس الإحصائية مثل معامل ارتباط الرتب التى سنعرض لها فى هذا الجزء من الكتاب واختبارات الدلالة الإحصائية وغيرها مما سنعرض لها بالتفصيل فى الجزء الثانى من الكتاب .

ومعظم المقاييس فى التربية وعلم النفس من هذا المستوى ، فمثلا ربما نقول أن محمد لديه اتجاه أكثر إيجابية نحو المدرسة من سمير ، وسمير لديه اتجاه أكثر إيجابية من أشرف ، ولكن لا نستطيع القول بأن الفروق بين درجات إيجابيتهم بالضرورة متساوية .

القياس الفترى :

فى هذا المستوى الثالث تتساوى الفروق بين الأقسام المتتالية فى السمة المقاسة. فالترمومتر مقسم إلى وحدات متساوية ، والفرق بين درجتى الحرارة ٣٠°، ٣٥° مثلا يساوى الفرق بين درجتى ٣٥°، ٤٠° . وعندما تمثل البيانات فترات متساوية فإنه يمكن تحويل مجموعة البيانات الأصلية إلى مجموعة أخرى لها خصائص مختلفة. فمثلا يمكن تحويل الدرجات المئوية للحرارة إلى درجات فهرنهيتية أى تحويل درجات الحرارة من ميزان إلى ميزان آخر له صفر مختلف ووحدة قياس مختلفة ، ولكن يمكن مقارنة الميزان الأول بالميزان الثانى .

وكثير من المقاييس النفسية والتربوية تقع أيضا فى هذا المستوى الثالث مثل مقاييس الذكاء والتحصيل وما إليها .

والعمليتان الحسابيتان المسموح بهما فى هذا المستوى من القياس هما عمليتا الجمع والطرح فقط . ولا يمكن استخدام عملية القسمة فى هذا النوع من القياس لعدم وجود صفر مطلق إلا إذا أجريت هذه العملية على الفترات وليس على كل درجة على حدة . فنسبة الذكاء ٢٠٠ لا تعنى ضعف نسبة الذكاء ١٠٠ ، وإن كان يفترض أن الفرق بين نسبتى الذكاء ١٠٠ ، ١٢٠ تكافئ الفرق بين نسبتى الذكاء ١٤٠ ، ١٢٠ وهنا لا يمكننا بوجه عام أن نجد ما يناظر الصفر المطلق فى الذكاء أو غيره من السمات النفسية . فمثلا ربما يحصل طالب على الدرجة صفر فى اختبار تحصيلى ،

ولكننا لانستطيع اعتبار أن هذه الدرجة تناظر مقدار السمة التى يفترض أن الاختبار قد صمم لقياسها ، وإلا كان معنى ذلك أن مقدار السمة المقاسة عند الطالب صفر . وكثير من الاختبارات التربوية والنفسية المقننة أى المبنية باستخدام الطرق السيكومترية التقليدية تؤدى إلى قياس فترى .

وفى هذا النوع من القياس يمكن استخدام المتوسطات والانحرافات المعيارية للدرجات ومقاييس العلاقة الخطية ، وهو ماسوف نعرض له بالتفصيل فى الفصول التالية .

القياس النسبي :

يتوفر فى ميزان القياس النسبي الصفر المطلق إلى جانب تساوى الفروق بين الفترات المختلفة ، وهذا الصفر المطلق يناظر حقيقة نقطة انعدام الظاهرة أو السمة المقاسة . فوجود صفر اختيارى أو اعتبارى فى الترمومترات التى تقيس الحرارة بالدرجات المئوية أو الفهرنهيتية يجعل وجود درجات حرارة سالبة ممكنا .

والمسطرة العادية تعد مثالا للميزان النسبي ، وتصلح العمليات الحسابية الأربع ، وطرق الإحصاء البارامترى فى هذا النوع من الموازين ، ولذا يعتبر هذا النوع أعلى مستويات القياس .

ويندر استخدام هذا النوع من الموازين فى القياس النفسى والتربوى فيما عدا مجال الحكم فى علم النفس الطبيعى Psychophysical Judgment ، ويسعى علماء القياس التربوى فى الوقت الحاضر إلى بناء نماذج رياضية تستخدم لبناء مقاييس للذكاء والتحصيل والاتجاهات يتوفر فيها الصفر المطلق الذى يناظر حقيقة نقطة انعدام الظاهرة أو السمة المقاسة مثل نماذج السمات الكامنة Latent Trait Models

ويذكر جيلفورد Guilford أن عملية العد Enumeration التى نحصل عن طريقها على تكرارات يمكن اعتبار أنها تعطينا قيما على ميزان نسبي . فالتكرار صفر يناظر انعدام الظاهرة التى نحصيها . كما يذكر أننا نكون صفراً

مطلقاً عند إجراء العمليات الإحصائية ، فمثلا يمكننا اعتبار هذا الصفر هو متوسط التوزيع ومن ثم نعالج الانحرافات عنه على أنها ميزان نسبي يسمح بالعمليات الحسابية الأربع وكذلك استخراج الجذور التربيعية .

كيف نتعامل مع الأعداد فى عملية القياس :

معظم القياسات الفترية تقرب إلى أقرب الوحدات . وتعتمد درجة هذا التقريب على أداة القياس والدقة المطلوبة فى قياس الشيء المراد قياسه .

فإذا كنا بصدد قياس ارتفاع مئذنة مثلا فإن تقريب القياس إلى أقرب قدم — مثل ١٠٧ أقدام — ربما يكون كافيا ، أما إذا كنا بصدد قياس طول شخص ما فإننا ربما نسجل الطول إلى أقرب بوصة أو أقرب سنتيمتر . وإذا أردنا قياس طول قلم رصاص فإننا ربما نسجل الطول إلى أقرب ملليمتر وهكذا . فطول شجرة مثلا ربما لا يكون ١٠٧ أقدام بالضبط ولكنه يكون أقرب إلى ١٠٧ أقدام منه إلى ١٠٨ أقدام أى تسجيل طول الشجرة ١٠٧ أقدام يعنى أن الطول ينحصر بين ١٠٦,٥ قدم ، ١٠٧,٥ قدم . وينطبق هذا أيضاً فى حالة القياس النفسى والتربوى ، فالدرجة ٤٨ فى اختبار ما تعنى أنها تنحصر بين ٤٧,٥ ، ٤٨,٥ ، والدرجة ٧٠ ، تنحصر بين ٦٩,٥ ، ٧٠,٥ ، فنحن نفترض أن الدرجة ليست نقطة على مقياس أو ميزان Scale وإنما تشغل مسافة أو فترة تبـــدأ بالعدد الذى يقل نصف عن الدرجة وتنتهى بالعدد الذى يزيد نصف عن نفس الدرجة . فاذا لم نأخذ بهـــذا الافتراض فاننا سنجد أن المتوسط الحسابى الذى نحصل عليه من مجموعة من البيانات غير المجمعة — كما سنرى فيما بعد — ربما يختلف عن المتوسط الحسابى لنفس مجموعة البيانات إذا جعلناها مجمعة . ويمكن أن نأخذ بهـــذا الافتراض أيضاً فى حالة البيانات التصنيفية ، فاذا كان عدد أطفال أسرة معينة ٤ أطفال فاننا يمكن اعتبار أن هـــذا العدد ينحصر بين ٣,٥ ، ٤,٥ .

أنواع البيانات :

يحصل الباحث الذى يهتم بدراسة ظاهرة ما فى أغلب الأحيان على مجموعة من القيم العددية المتعلقة بهذه الظاهرة ، وهذه القيم يمكن أن نطلق عليها اسم القيم المشاهدة أو قيم المتغير أو المتغيرات موضع البحث . وتسمى هذه المجموعة من القيم بالملاحظات التى يتم بعد ذلك معالجتها إحصائياً وعندئذ تسمى بالبيانات الإحصائية .

وتنقسم هـــذه البيانات — كما سبق أن أشرنا — إلى نوعين : كمية Quantitative ، وكيفية أو نوعية Qualitative .

١ — البيانات الكمية :

وهى البيانات التى يكون التغير فيها تغيرا من حيث المقدار ، أى يمكن ترتيب هذه البيانات بحسب مقاديرها ، وقد يكون المتغير فى هذه البيانات متصلا Continuous أو غير متصل Discrete .

والمتغير المتصل هو ذلك المتغير الذى تختلف قيمه أو يمكن أن تختلف بمقادير صغيرة صغراً لانهائياً . فالعمر مثلا هو متغير متصل لأننا لا يمكن أن نمر من عمر إلى آخر مهما كان قريبا منه إلا إذا مررنا بعدد لانهائى من الأعمار المتزايدة بمقادير متناهية فى الصغر .

ومن المتغيرات المتصلة أيضاً الأطوال والأوزان ودرجات الاختبارات التحصيلية والعقلية ودرجات الحرارة وما إلى ذلك .

وليس من الضرورى أن تظهر جميع القيم الممكنة فى البيانات موضع البحث لكى نعتبر المتغير متصلا ، بل يكفى التأمل فى هذه القيم لكى نحدد ما إذا كان فى الإمكان أن تأخذ أى قيمة مهما صغرت بين حدين معلومين ، فالاختبار التحصيلى الذى يتكون من ٥٠ سؤالا مثلا حيث تعطى درجة واحدة لكل إجابة صحيحة

يؤدى إلى درجات غير متصلة مثل صفر ، ١ ، ٢ ، ..... ، ٥٠ ، إلا أننا يمكن أن نعتبر هذه الدرجات تمثل قيما تقريبية لقياسات متصلة .

أما المتغير غير المتصل فهو ذلك المتغير الذى تختلف قيمه بمقادير محدودة ، وغالبا ما تكون من النوع الذى لابد من حسابه بواسطة أعداد صحيحة موجبة ، ومن أمثلته عدد تلاميذ مدرسة أو عدد سكان مدينة أو عدد مرات ظهور الصورة إذا ألقيت عملة من النقود عدة مرات أو عدد البنين أو عدد البنات فى فصل مدرسى معين .

وهنا تقفز قيم المتغير من عدد صحيح إلى آخر متجاوزة مابين العددين من الاعداد الكسرية الكثيرة التى لايعقل أن يكون لها وجود فى مثل هذه الحالات إذ لايعقل أن يكون عدد البنين فى فصل مدرسى معين ٢٢,٠٠١ أو ٢٢,٥ أو ٢٨,٠٩ مثلا .

٢ ــ البيانات النوعيــة :

وهى البيانات التى يكون التغير فيها تغيرا من حيث النوع ، ولا يمكن تقسيمها بحسب الاصغر والأكبر تحت تقسيم واحد ، ومن أمثلتها عدد الأفراد الذين ينتمون إلى الأندية المختلفة ، فالمتغير هنا هو النادى نفسه . وتنقسم البيانات إلى مجموعات كل منها ينتمى إلى فئة خاصة مختلفة اختلافاً كلياً عن الفئات الأخرى (أى أن الاختلاف يكون فى النوع وليس فى الدرجة) . ومن أمثلتها أيضا البيانات المتعلقة بالمهنة أو الجنس أو لون البشرة أو عدد التلاميذ فى المراحل الدراسية المختلفة ، ويتضح من ذلك أن المتغير فى كل هذه الحالات يكون من النوع غير المتصل .

وتختلف بطبيعة الحال ــ كما سنرى فى الفصول التالية ــ الطرق الإحصائية التى تعالج أو تتناول هذين النوعين من البيانات ، ولو أن هذه الطرق تلتقى عند أكثر من نقطة .

مراجعة لبعض العمليات الحسابية والجبرية الأساسية :

إن التساؤل التالى كثيراً ما يتردد على ألسنة الباحثين فى العلوم السلوكية وبخاصة المبتدئين منهم وهو :

« كيف لى أن أدرس طرق تحليل البيانات والإحصاء وليس لدى الخلفية الأساسية فى الرياضيات التى تتصف بالرمزية والتجريد ؟ » .

وهذا التساؤل بالطبع معقول وله مايبرره ، فما لاشك فيه أن دراسة الرياضيات تيسر على الباحثين الفهم المستنير للأسس الرياضية والإحصائية التى تبنى عليها طرق وأساليب تحليل بيانات البحوث .

ولكننا نود أن نطمئن الباحث أنه ليس من الضرورى أن يكون ماهراً فى الرياضيات وفى استخدام أساليب المعالجات الرمزية حتى يستطيع إتقان الأساليب الإحصائية وطرق تحليل البيانات .

ولا نتعدى الحقيقة إذا قلنا ان إستخدام الإحصاء وتحليل بيانات البحوث النفسية والتربوية لايحتاج إلا إلى قدر من التفكير المنطقى فى المشكلة التى يطرحها الباحث وكيفية معالجتها إحصائيا .

ويمكن أن يتقن الباحث هذا سواء كان لديه خلفية قوية فى الرياضيات أم لا . وأهم ما فى الأمر هو أنه يجب أن يكون لديه الرغبة فى متابعة الأساليب الإحصائية التى يمكن أن تساعده فى تحليل بيانات بحثه للتوصل إلى نتائج يمكن تبريرها . كما أن عملية تحليل البيانات تتطلب قدراً من العمليات الحسابية والجبرية التى يتقنها عدد كبير من الباحثين المبتدئين .

وقد أدى التقدم الكبير الذى حدث فى الآلات الحاسبة والحاسبات الالكترونية إلى جعل هذه العمليات فى متناول كل باحث فى وقت قصير .

ومع هذا فإننا نجد أنه ربما يكون من المفيد لبعض الباحثين أن يقوم بمراجعة سريعة لبعض العمليات الحسابية والجبرية الأساسية مثل الرموز الرياضية والإشارات الجبرية والكسور والأسس والجذور واللوغاريتمات والنسب المثلثية للزوايا كى تساعده على متابعة عرضنا للأساليب الإحصائية فى تحليل البيانات .

ويمكن أن ينتقل الباحث الذى لديه هذه الخلفية إلى الفصل الثانى مباشرة ، ولكننا ننصح كل باحث أن يتأكد من فهمه لهذه العمليات الرياضية بأن يحل التمارين التى قدمناها فى آخر هذا الفصل .

الرموز الرياضية :

يواجه الباحث أثناء دراسته للطرق والأساليب الإحصائية فى تحليل البيانات كثيراً من الرموز التى ربما تعوقه عن الفهم المستنير لهذه الطرق والأساليب .

فإلى جانب رمزى التساوى (=) ، وعدم التساوى(≠) ، ورموز العمليات الحسابية الأربع وهى الجمع (+) ، والطرح (−) ، والضرب (×) ، والقسمة (÷) توجد كثير من الرموز الأخرى ، ولكن مايهمنا منها هو الرموز الآتية :

الرمز (±) ، ويعنى أن العدد يمكن أن يكون موجبا أو سالبا ، مثل ± ٣ .

الرمز (>) ويعنى (أكبر من)، فمثلا ٥ > ٣ وتقرأ ٥ أكبر من ٣

الرمز (≤) ويعنى (أكبر من أو يساوى) . فمثلا س ≥ ٥ وتقرأ س أكبر من أو تساوى ٥ .

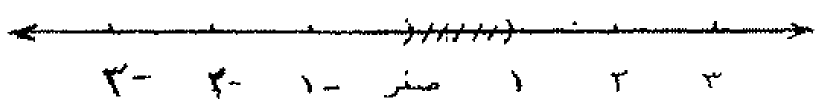
(الرمز <) ويعنى (أصغر من) ، فمثلا ٦ < ٨ وتقرأ ٦ أصغر من ٨ .

الرمز (≥) ويعنى (أصغر من أو يساوى) ، فمثلا س < صفر ، وتقرأ س أصغر من أو تساوى الصفر .

وأحيانا نكتب أكثر من رمز واحد معاً مثل :

١ ≤ س > صفر .

وهذه تعنى أن س أكبر من الصفر وفى نفس الوقت أقل من أو تساوى الواحد الصحيح ويمكن تمثيل هذه القيم على خط الأعداد الآتى :



أى أن قيم س تنحصر بين صفر ، ١ ، ولكنها يمكن أن تساوى الواحد الصحيح . وهذه القيم تقع فى المنطقة المظللة بخطوط مائلة على خط الأعـــداد الحقيقية .

الرمز | س | ويقرأ القيمة المطلقة للمتغير س ، أى قيمة س بغض النظر عن إشارتها سواء كانت موجبة أو سالبة .

فمثلا $|-٥| = ٥$ ، $|٥| = ٥$

وإذا كانت س = ٤ ، ص = ٧ فإن :

$|س - ص| = |٤ - ٧| = |-٣| = ٣$

أى أن :

$$|س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$$

العمليات الحسابية على الأعداد السالبة :

تتطلب معظم العمليات الجبرية إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة باستخدام الأعداد السالبة .

أولا : الجمع والطرح :

أمثلة : $٤ - ٣ = ١$ أو $-٣ + ٤ = ١$

، $٧ - (-٤) = ٧ + ٤ = ١١$

، $-ا - (-ب) = -ا + ب = ب - ا$

أى أن الطرح هو عملية جمع جبرى ، أى نجمع مع مراعاة الإشارات .

ثانياً : الضرب :

أمثلة : $(-٤)(١)(٢)(-٣) = ٢٤$

، $(-ا)(-ب)(-حـ)(-د) = ابحـد$

أى أننا عندما نضرب مجموعة من الأعداد أو الرموز الجبرية فإن حاصل الضرب يكون موجباً إذا كان هناك عدد زوجى من القيم السالبة فى مجموعة الأعداد أو الرموز (الصفر يعتبر عدد زوجى) .

أمثلة أخرى :

$$(-\text{٣})(\text{٢})(\text{٥}) = -\text{٣٠}$$

$$(-\text{ا})(\text{ب})(-\text{ج})(-\text{ء}) = -\text{ابجء}$$

أى أننا عندما نضرب مجموعة من الأعداد أو الرموز فان حاصل الضرب يكون سالباً إذا كان هناك عدد فردى من القيم السالبه فى مجموعة الأعداد أو الرموز .

ثالثا : القسمة :

تنطبق نفس قاعدتى الضرب السابقتين فى حالة القسمة . فمثلا :

$$\frac{-\text{٤}}{-\text{٨}} = \text{٠,٥}$$

$$\frac{-\text{٤}}{\text{٨}} = -\text{٠,٥}$$

$$\frac{(-\text{ا})(\text{ب})}{-\text{ب}} = \text{ا}$$

$$\frac{\text{ج}}{(-\text{ج})(\text{ء})} = \frac{-\text{١}}{\text{ء}}$$

العمليات الحسابية باستخدام الكسور :

أولا : الجمع والطرح :

عند جمع أو طرح الكسور التى تكون مقاماتها متشابهة نجمع البسط فى هذه الكسور فيكون هو بسط الكسر الناتج . أما المقام فيكون نفس مقام هذه الكسور .

فمثلا $\frac{١}{٩}+\frac{٢}{٩}+\frac{٥}{٩}=\frac{١+٢+٥}{٩}=\frac{٨}{٩}$

، $\frac{٤}{٥}-\frac{١}{٥}=\frac{٤-١}{٥}=\frac{٣}{٥}$

أما إذا كانت المقامات غير متشابهة فإنه يجب توحيد هذه المقامات ، أى نوجد المضاعف المشترك الأصغر لها قبل إجراء عملية الجمع أو الطرح .

فمثلا $\frac{١}{٣}+\frac{١}{٢}=\frac{٢+٣}{٦}=\frac{٥}{٦}$

فالمضاعف المشترك الأصغر للعددين ٣ ، ٢ هو ٦ . ثم نقسم ٦ على مقام الكسر الأول أى ٦ ÷ ٣ = ٢ ونضرب الناتج وهو ٢ فى بسط الكسر الأول أى ٢ × ١ = ٢ ، وبالمثل بالنسبة للكسر الثانى .

وكذلك $\frac{١}{٣}-\frac{٥}{١٢}=\frac{٤-٥}{١٢}=-\frac{١}{١٢}$

ثانياً ـ الضرب :

حاصل ضرب كسرين أو أكثر يساوى حاصل ضرب بسطى كل منهما مقسوماً على حاصل ضرب مقامى كل منهما .

فمثلا $\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٥}=\frac{(١)(٣)}{(٢)(٥)}=\frac{٣}{١٠}$

وبصفة عامة $\frac{أ}{ب}\times\frac{ح}{ى}=\frac{(أ)(ح)}{(ب)(ى)}=\frac{أح}{بى}$

رابعا ـ القسمة :

خارج قسمة كسرين يساوى حاصل ضرب الكسر الأول فى مقلوب الكسر الثانى .

فمثلا $$\frac{١}{٢} \div \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{(١)\ (٥)}{(٢)\ (٣)} = \frac{٥}{٦}$$

وبصفة عامة $$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{(\text{أ})\ (\text{د})}{(\text{ب})\ (\text{ج})} = \frac{\text{أد}}{\text{بج}}$$

الحذف :

إذا اشتملت الكسور على أعداد كبيرة أو إذا كان المطلوب ضرب عدد من الكسور ، فإنه يمكن عادة تبسيط واختصار العمليات الحسابية بواسطة الحذف بين البسط أو المقام أو كليهما ، ثم حذف الأعداد المتشابهة بينهما .

فمثلا $$\frac{٠,٦}{١٨} = \frac{٦}{(٦)\ (٣)\ (١٠)} = \frac{١}{٣٠}$$

، $$\frac{٢١}{١,٤٧} = \frac{(٣)\ (٧)\ (١٠٠)}{(٣)\ (٧)\ (٧)} = \frac{١٠٠}{٧} = ١٤\frac{٢}{٧}$$

العمليات الحسابية والجبرية على الأسس :

عندما نقول $٢^{٣}$ (وتقرأ ٢ أس ٣ أو ٢ مرفوعة للقوة الثالثة) فإننا نعنى بذلك ٢ × ٢ × ٢ = ٨ أى ٢ مكررة ثلاث مرات .

ويسمى الرقم ٢ الأساس ، والرقم ٣ الأس أو القوة المرفوع إليها الأساس .

وبصفة عامة $\text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح موجب ، ن $\neq$ صفر تساوى

س × س × س × .... (ن من المرات)

أما $\text{س}^{\text{صفر}}$ فهى تساوى الواحد الصحيح .

فمثلا $٢^{\text{صفر}} = ١$ ، $٣^{\text{صفر}} = ١$ ، $١٩^{\text{صفر}} = ١$

أولا ـ جمع وطرح الأعداد التى تشتمل على أسس :

لا يمكن جمع أو طرح الأعداد التى تشتمل على قوى عدد معين إلا إذا أوجدنا قيمة كل عدد على حدة أولا ، ثم نجرى عملية الجمع أو الطرح بعد ذلك .

فمثلا $٢^{٢} + ٢^{٣}$ لا تساوى $٢^{٥}$

وإنما تساوى $٤ + ٨ = ١٢$

أو تساوى $٢^{٢} (١ + ٢) = ٤ \times ٣ = ١٢$

وكذلك $٣^{٤} - ٢^{٢} = ٨١ - ٤ = ٧٧$

(ثانيا) ـ ضرب الأعداد التى تشتمل على أسس :

يمكن ضرب الأعداد التى تشتمل على أسس إذا اتحدت فى الأساس بأن نرفع الأساس إلى قوة مجموع الأسس .

فمثلا $(٢^{٢}) (٢^{٢}) (٢^{٣}) = ٢^{٢ + ٢ + ٣} = ٢^{٧} = ١٢٨$

وبصفة عامة $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}} = \text{س}^{\text{ن} + \text{م}}$

وكذلك $\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}} \times \text{س}^{\text{ك}} = \text{س}^{\text{ن} + \text{م} + \text{ك}}$

وهكذا .

قسمة الأعداد التى تشتمل على أسس :

يمكن قسمة عددين يشتملان على أسس إذا اتحدا فى الاساس بأن نرفع الأساس إلى قوة الفرق بين الاساسين .

فمثلا $\frac{(٢)^٣}{(٢)^٢} = ٢^{٣-٢} = ٢^١ = ٢$

وبصفة عامة $\frac{س^ن}{س^م} = س^{ن-م}$ حيث أن ن > م

ويجب أن نلاحظ أن $٢^{-٣} = \frac{١}{(٢)^٣} = \frac{١}{٨}$

أى أنه إذا كانت القوة المرفوع إليها العدد سالبة فإننا نقلب العدد ونجعل القوة موجبة .

العمليات الحسابية والجبرية على الجذور :

من المعلوم أن $\sqrt{٤} = \pm ٢$ ، $\sqrt{٩} = \pm ٣$

ولذلك فهذه الجذور تسمى جذوراً غير صماء .

أما $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ وهكذا فهى تسمى جذوراً صماء لأننا لانستطيع إيجاد قيم مضبوطة لهذه الجذور ، وإنما نستطيع إيجاد قيم تقريبية لها .

فمثلا $\sqrt{٢} = ١,٤١٤$ تقريبا .

، $\sqrt{٣} = ١,٧٣٢$ تقريبا .

، $\sqrt{٥} = ٢,٢٣٦$ تقريبا وهكذا .

(أولا) جمع وطرح الجذور الصماء :

لا يمكن جمع أو طرح الجذور الصماء إلا إذا كانت الأعداد التى تحت علامة الجذر متشابهة .

فمثلا لا يمكننا جمع $\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$.

وإنما يمكننا جمع $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$.

أو $\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} = -٢\sqrt{٥}$ وهكذا .

(ثانيا) ضرب الجذور الصماء :

عند ضرب جذرين أصمين متحدين فى الدليل نضرب العددين اللذين تحت الجذر . ونقصد بدليل الجذر ما إذا كان الجذر تربيعى أو تكعيبي وما إلى ذلك . ففى الحالة الأولى يكون الدليل ٢ ، وفى الحالة الثانية يكون الدليل ٣ وهكذا .

فمثلا $\sqrt{٢} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢ \times ٥} = \sqrt{١٠}$

و $٢\sqrt[٣]{٢} \times ٣\sqrt[٣]{٢} = ٦\sqrt[٣]{٢ \times ٢} = ٦\sqrt[٣]{٤}$.

قسمة الجذور الصماء :

عند قسمة جذرين أصمين متحدين فى الدليل نقسم العددين اللذين تحت الجذر .

فمثلا $\sqrt{٨} \div \sqrt{٢} = \sqrt{٨ \div ٢} = \sqrt{٤} = \pm ٢$

و $\sqrt{٧} \div \sqrt{٢} = \sqrt{\frac{٧}{٣}}$ وهكذا .

كيفية استخراج الجذر التربيعى لعدد موجب :

بالطبع يستطيع الباحث إيجاد الجذر التربيعى لعدد موجب باستخدام الآلة الحاسبة أو بالرجوع إلى الجداول الرياضية . ولكننا سنعرض فيما يلى لإحدى الطرق البسيطة التى يمكن اتباعها لاستخراج قيمة تقريبية للجذر التربيعى لعدد موجب دون استخدام آلة حاسبة .

فمثلا إذا أردت استخراج الجذر التربيعي لعدد موجب مثل ٦٫٣٣ يمكنك اتباع الخطوات الآتية :

١ — ابدأ بتخمين الجذر التربيعي المطلوب . فمثلا تقول أن $\sqrt{٤} = ٢$ ، $\sqrt{٩} = ٣$ أى أن $\sqrt{٦٫٣٣}$ ينحصر بين ٢ ، ٣ . وهنا ربما تخمن أن $\sqrt{٦٫٣٣} = ٢٫٤٠$ مثلا .

٢ — اقسم العدد المطلوب استخراج جذره التربيعي وهو ٦٫٣٣ على القيمة التي بدأت بتخمينها وهى ٢٫٤٠ فيكون الناتج ٢٫٦٤ .

٣ — إستخرج المتوسط الحسابي للقيمة التي بدأت بتخمينها وهى ٢٫٤٠ ، وخارج القسمة الناتج من الخطوة رقم ٢ وهو ٢٫٦٤

$$\text{أى :}\quad \frac{٢٫٤٠ + ٢٫٦٤}{٢} = \frac{٥٫٠٤}{٢} = ٢٫٥٢$$

٤ — وهنا يعتبر العدد ٢٫٥٢ هو أول قيمة تقريبية للعدد المطلوب استخراج جذره التربيعي . ويمكن التحقق من مدى دقة هذا العدد بتربيعه ومقارنته بالعدد الأصلي المطلوب استخراج جذره . ففي هذا المثال مربع العدد ٢٫٥٢ يساوى ٦٫٣٥ وهو قريب جداً من العدد المطلوب وهو ٦٫٣٣ .

٥ — إذا أردت إيجاد قيمة أكثر دقة فما عليك إلا أن تكرر الخطوات الاربع السابقة مع اعتبار المتوسط الذى تحصل عليه من الخطوة رقم ٤ (أول قيمة تقريبية) هو التخمين الثاني .

ويمكن تكرار هذه العملية أى عدد من المرات بقدر درجة الدقة المطلوبة . ولذا تسمى هذه الطريقة بطريقة التكرار Iterative Process .

فإيجاد قيم تقريبية للعمليات الرياضية باستخدام الطرق التي تعتمد على التكرار تعتبر أكثر فاعلية من الطرق التي تعتمد على الحل المباشر .

وفي الحقيقة فإن الحاسبات الالكترونية الحديثة تعتمد في إجراء العمليات الرياضية المعقدة على طرق التكرار .

العمليات الحسابية والجبرية على اللوغاريتمات :

تستخدم اللوغاريتمات لتبسيط وتيسير العمليات الحسابية المعقدة . فباستخدام اللوغاريتمات يمكن تحويل عمليتي الضرب والقسمة إلى عمليتي جمع وطرح على الترتيب .

ونقصد بلوغاريتم عدد معين وليكن ب لأساس معين وليكن ا بأنه القوة التي يجب أن يرفع إليها الأساس ا ليعطي العدد ب .

فنحن نعلم مثلا أن $٢^{٣} = ٨$

ويمكننا تحويل هذه الصورة الأسية إلى صورة لوغاريتمية كالآتي :

$$_{٢}\text{لو}^{٨} = ٣$$

وتقرأ لوغاريتم ٨ للأساس ٢ يساوي ٣ .

ويختلف الأساس في اللوغاريتمات ، فيمكن أن يكون الأساس أي عدد موجب . ولكن هناك نوعين من اللوغاريتمات الشائعة الاستخدام وهي اللوغاريتمات المعتادة التي يكون أساسها ١٠ ، واللوغاريتمات الطبيعية التي يكون أساسها e حيث e ثابت يسمى الأساس اللوغاريتمي الطبيعي وهو يساوي ٢٫٧١٨٣ تقريبا .

ولكل من هذين النوعين من اللوغاريتمات أهمية كبيرة في العمليات الرياضية. ولكن ما يهمنا هنا هو اللوغاريتمات المعتادة أي التي يكون أساسها ١٠ .

وتوجد جداول يمكن عن طريقها إيجاد اللوغاريتمات المتادة للأعداد تسمى جداول اللوغاريتمات المعتادة .

وسوف يجد الباحث أحد هذه الجداول (جدول ١) المبين بالملحق فى آخر الكتاب .

ولكى نوضح كيفية استخدام اللوغاريتمات فى تبسيط عمليتى الضرب والقسمه نعرض المثال الآتى :

نفرض أننا نريد إيجاد قيمة المقدار :

$$\frac{١٧,٩ \times ٩,٥٣}{١٢١}$$

فإننا نبدأ بفرض أن هذا المقدار = س .

ونأخذ لوغاريتم كل من الطرفين علما بأن لوغاريتم حاصل ضرب عددين = مجموع لوغاريتم كل من العددين . ولوغاريتم خارج قسمة عددين = الفرق بين لوغاريتم كل من العددين .

أى أن : لو س = لو ٩,٥٣ + لو ١٧,٩ — لو ١٢١ .

ثم نكشف فى جدول اللوغاريتمات المعتادة عن كل من هذه الأعداد . ولكن يجب أولا وضع عدد يسمى العدد البيانى بجوار العدد الذى نحصل عليه من الجدول . فمثلا قبل الكشف عن لو ٩,٥٣ من الجدول نعد عدد الأرقام الصحيحة قبل العلامة العشرية ونطرح من هذا العدد الواحد الصحيح . فهنا يوجد رقم واحد قبل العلامة العشرية وهو ٩ فيكون العدد البيانى هنا = صفرا لأننا طرحنا الواحد الصحيح من عدد الأرقام الصحيحة وهو هنا رقم واحـــد (الرقم ٩) .

ثم نكشف فى جدول اللوغاريتمات عن العدد ٩٥ تحت الرقم ٣ فنجده يساوى ٩٧٩١ .

ولذلك يجب أن نضع علامة عشرية إلى أقصى يسار الناتج ٩٧٩١ يسبقها العدد الباقى . أى فى هذه الحالة يكون :

لو ٩,٥٣ = ٠,٩٧٩١

وبالمثل فى العددين الآخرين .

أى أن : لو س = ٠,٩٧٩١ + ١,٢٥٢٠ + ٢,٠٨٢٨

= ٤,٣١٤٨

وهذا يعنى أن الناتج هو عدد لوغاريتمه ٤,٣١٤٨ . فلإيجاد قيمة هذا الناتج (أى قيمة س) نكشف فى جدول آخر يسمى بجدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات عن ٠,٣١ تحت ٤ فروق ٨ فنجده = ٢٠٦٥ .

ويجب ملاحظة أننا تركنا الرقم ٤ لأنه سيحدد لنا موضع العلامة العشرية . فالرقم ٤ يعنى أننا يجب ان نضع العلامة العشرية بعد خمسة أرقام متجهين من اليسار إلى اليمين .

وبذلك تكون قيمة س = ٢٠٦٥٠,٠ وهو الناتج المطلوب .

ويمكن الباحث الاستزادة بالرجوع إلى أحد كتب جبر المرحلة الثانوية .

النسب المثلثية للزوايا الحادة :

إذا فرضنا أن س و ص زاوية حادة تساوى هـ من الدرجات . وأخذنا

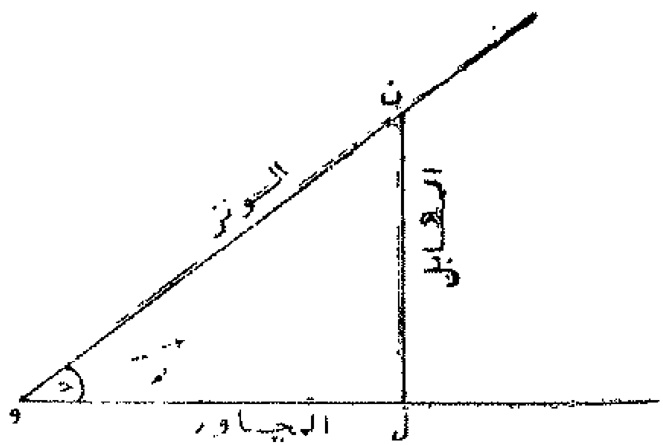
نقطة ه على الضلع و ص وأسقطنا منها العمود ه ل على و س ، اى أصبح لدينا مثلث قائم الزاوية فى ح . فإننا نستطيع الحصول على ست نسب مثلثية للزاوية ح نذكر منها ثلاثا فقط :

جيب الزاوية ح ويرمز له بالرمز

$$\text{حا ح} = \frac{\text{ل ه}}{\text{و ه}} = \frac{\text{المقابل للزاوية ح}}{\text{الوتر}}$$

جيب تمام الزاوية ح ويرمز له بالرمز

$$\text{حتا ح} = \frac{\text{و ل}}{\text{و ه}} = \frac{\text{المجاور للزاوية ح}}{\text{الوتر}}$$



ظل الزاوية ح ويرمز له بالرمز

$$\text{طا ح} = \frac{\text{ل ه}}{\text{و ل}} = \frac{\text{المقابل للزاوية ح}}{\text{المجاور للزاوية ح}}$$

وتقرأ هذه النسب جا الزاوية ح ، جتا الزاوية ح . ظا الزاوية ح .

ويمكن إيجاد كل من هذه النسب للزوايا المختلفة بالكشف فى جداول تسمى جداول النسب المثلثية أو استخدام آلة حاسبة لإيجاد هذه النسب .

ونود فى ختام هذه المراجعة أن نوصى الباحث بأن يرجع إلى الكتب الدراسية فى الرياضيات للمرحلة الثانوية إذا أراد المزيد من التوضيح لهذه العمليات الحسابية والجبرية والمثلثية إذا دعته الحاجة إلى ذلك .

تمارين على الفصل الأول

١ – اذكر أعلى مستوى من مستويات القياس و الحالات الآتيه :

(ا) درجات الطلاب فى اختبار للذكاء .

(ب) عدد كل من الطلبة والطالبات فى إحدى الكليات .

(ح) وزن شخص ما .

(ى) درجات الحرارة مقاسة بالدرجات المئوية .

(ه) عدد المفردات التى أجاب عنها طالب إجابة صحيحة فى اختبار يتكون من ١٥ مفردة .

(و) الأرقام التى تسجل على تذاكر القطارات .

٢ – ما هى الحدود الحقيقية للدرجات أو القياسات الآتية :

٦٧ ثانية ، ١٥٠ كيلو جرام ، ١٤,٥ سنتيمتر ٦٥ درجة .

٣ – أوجد قيمة كل مما يأتى :

(ا) ٨٦,٦ — (— ٢٢,٤)

(ب) — ٠,٩٩ ÷ ٠,٩

(ح) ٥,٣ × — ٣,٠٨

٤ – اوجد قيمة كل مما يأتى :

(ا) $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦}$

(ب) $\left(\frac{٥}{٦}\right)\left(\frac{٢}{٣}\right)$

(ح) $\frac{٥}{٧} \div \frac{٢}{١٤}$

(ء) $٣ - \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{١٥}$

٥ — أوجد قيمة س فى كل من المعادلات الآتية :

(ا) $٢ س + ٣ = ٧$

(ب) $س^{٢} = ٤$

(ح) $|س| = ٨$

(ء) $٢ س = س - ٦$

(ا) $\sqrt{٨} + \sqrt{٢}$

(ب) $(٢^{٥})(٣^{٢})$

(ح) $٢^{٣} + ٣^{٢}$

(ء) $٢^{-٥}$

(ه) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$

(و) $(\sqrt{٣})(\sqrt{٩})$

٧ — استخرج الجذر التربيعى للأعداد الآتية بطريقة التكرار مقربا الجواب إلى رقمين عشريين .

٨,٢٢ ، ١٥,٣٤١ ، ٢٣٩,٧٢ .

٨ — باستخدام جداول اللوغاريتمات أوجد قيمة كل مما يأتى :

(أ) ٢,٣١ × ٨,٧ × ١٩,٣ ·

(ب) $\frac{١٧,٣٢ \times ٨,٤٢}{٢٥}$

(ﺟ) $\frac{٢٧,٩ \times ١٠٨,١}{٣٢٨}$

٩ — باستخدام جداول النسب المثلثية أوجد قيمة كل مما يأتى :

حا ٢٥° ، حتا ١٢َ ٣٧° ، طا ١١٠°

الفصل الثاني

التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني للبيانات ذات المتغير الواحد

تنظيم البيانات

جداول التوزيعات التكرارية

التمثيل البياني للبيانات

المدرج التكراري

المضلع التكراري

المنحنى التكراري

المنحنيات المتجمعة

أوجه اختلاف التوزيعات التكرارية

مقدمة :

يحتاج الباحث فى كثير من الأحيان إلى مقارنة أثر طريقتين مختلفتين أو طرق مختلفة من طرق المعالجة التجريبية مثل أثر طريقتين مختلفتين أ ، ب من طرق التعلم .

وهنا لايكتفى الباحث باختيار طالب واحد ليتعلم بالطريقة ا ، وطالب آخر ليتعلم بالطريقة ب ، لأن هذا يؤدى إلى نتائج لا يمكن الاعتماد عليها .

فالطلاب يختلفون فى سرعة تعلمهم ممـــا يؤدى إلى تباين درجاتهم حتى ولو كانت طريقة التعلم واحدة .

وكذلك ربما تكون الطريقة ا أفضل لبعض الطلاب ، بينما تكون الطريقة ب أفضل لطلاب آخرين .

وهذا الموقف شائع الحدوث فى العلوم السلوكية ، ونقصد به تباين الأفراد. ولكى يأخذ الباحث هذا التباين فى الاعتبار يجب أن يعتمد على مجموعة من الأفراد وليس فردا واحدا ، ويقوم بجمع الملاحظات أو الدرجات الخاصة بكل فرد من أفراد المجموعة. وبذلك يصبح لدى الباحث مجموعة كبيرة من الدرجات .

وتصبح المشكلة هى كيفية التعامل مع هذه الدرجات أو البيانات للتوصل منها إلى نتائج ذات معنى .

ولتوضيح ذلك ، انظر إلى الجدول (رقم ٢) الآتى الذى يشتمل على الدرجات التى حصل عليهـــا ٥٠ طالبا تعلموا بالطريقة ا ، ٥٠ طالبا تعلموا بالطريقة ب .

الطريقة (ا)			الطريقة (ب)		
١٥	١٧	١٦	١٨	٢٥	٢٤
١٣	١٩	١٥	٥	١٦	١٢
١١	١٠	١٨	٢١	١٩	١٣
١٧	١٥	٦	١٤	٨	٢١
١٢	٩	١٤	١٦	١٤	١٩
١٠	١٥	١٤	١١	١٨	١٧
٦	١٩	١٢	١٦	١٩	٩
١٥	٢١	٩	١٥	١٥	١١
١٠	١١	١٧	١١	١٧	١٧
١٣	٩	١١	٢٠	١٣	١٣
١٩	١٨	٨	١٤	١٧	١٢
٩	١٥	٧	٧	١٦	١٦
١١	١٢	١٦	١٥	٢٠	١٧
١٥	١٢	١٦	١٤	٢٣	١٨
١٣	٢٥	١٥	١٩	١٥	٢١
١٩	٩	٢١	٩	٣٠	١٠
١٠	١٢		٢٣	١٠	

جدول رقم (٢)

الدرجات التى حصل عليها ٥٠ طالبا فى اختبار تحصيلى تعلموا بالطريقة ا ، والدرجات التى حصل عليها ٥٠ طالبا آخر تعلموا بالطريقة ب .

فهل يستطيع الباحث بمجرد النظر إلى هذه المجموعة من الدرجات أن يعرف أى الطريقتين أدت إلى تعلم الطلاب بدرجة أكبر ؟ وهل يستطيع أن يعرف هل أدت كل من الطريقتين إلى قدر متكافىء من التعلم لجميع الطلاب؟ وهل أدت إحدى الطريقتين إلى إبراز الفروق الفردية بين الطلاب ؟ بالطبع ربما لا يستطيع الباحث

إجابة هذه الأسئلة وغيرها بمجرد الفحص العينى لهذه الدرجات وذلك بسبب كثرتها وعدم تنظيمها وتبويبها .

ولذلك فإن الهدف من هذا الفصل هو عرض طرق اختزال مجموعات الدرجات التى تشبه تلك المبينة فى الجدول السابق إلى صورة أكثر توضيحا بحيث تساعد الباحث على إلقاء الضوء على طبيعة وشكل بياناته كخطوة أساسية للبدء فى تحليل ماتنطوى عليه تلك الدرجات من معلومات .

التوزيعات التكرارية للبيانات غير المجمعة :

التوزيع التكرارى هو وسيلة لتنظيم وتجميع الدرجات أو البيانات فى مجموعات ، ومن شأن هذا التنظيم أو التجميع تلخيص بيانات التوزيع فى عدد محدود من هذه المجموعات لتيسير معالجتها رياضيا . ولإنشاء جدول توزيع تكرارى للبيانات غير المجمعة ترتب الدرجات ترتيباً تنازليا أو تصاعديا ، ونسجل عدد مرات تكرار كل درجة منها .

فمثلا إذا أردنا تنظيم الدرجات الموضحة بجدول رقم (٢) السابق فإننا يمكن أن نسجل تكرار كل من هذه الدرجات كما هو موضح بالجدول رقم (٣) الآتى ، وبذلك يستطيع الباحث معرفة أقل الدرجات وأكثرها تكرارا ، وهذا بالطبع يلقى الضوء على توزيع ووصف الظاهرة موضع البحث . ولكن بالنظر إلى الجدول رقم (٣) نلاحظ أن الدرجات منتشرة انتشاراً واسعاً ، وتكرار بعض هذه الدرجات صفر ، كما أنه ليس هناك مايدل على وجود نزعة مركزية للدرجات من مجرد الفحص العينى لها . ولذلك يتجه كثير من الباحثين إلى تجميع الدرجات فى فئات وتكوين جدول توزيع تكرارى للبيانات .

الطريقة ا		الطريقة ب	
الدرجة (س)	التكرار (ك)	الدرجة (س)	التكرار (ك)
٦	٢	٥	١
٧	١	٦	صفر
٨	١	٧	١
٩	٥	٨	١
١٠	٤	٩	٢
١١	٤	١٠	٢
١٢	٦	١١	٣
١٣	٣	١٢	٢
١٤	٢	١٣	٣
١٥	٨	١٤	٤
١٦	٤	١٥	٤
١٧	٣	١٦	٥
١٨	٢	١٧	٥
١٩	٣	١٨	٣
٢٠	صفر	١٩	٤
٢١	١	٢٠	٣
٢٢	صفر	٢١	٣
٢٣	صفر	٢٢	صفر
٢٤	صفر	٢٢	٢
٢٥	١	٢٣	١
		٢٤	١
		٢٥	
	٥٠		٥٠

جدول رقم (٣)

التوزيعات التكرارية لدرجات كل من الخمسين طالبا فى الاختبار التحصيلى

التوزيعات التكرارية المجمعة للبيانات الكمية المتصلة :

يتضح مما سبق أن البيانات الكمية التي يقوم الباحث النفسي أو التربوي بدراستها تحتوي عادة على عدد كبير من القيم أو المشاهدات والنظر إلى هذه القيم الكثيرة لايساعده على تبين ما تتضمنه من معان ومعلومات عن المجموعة التي تشير إليها هذه القيم أو المشاهدات . ولذا يكون من الضروري تنظيم هذه القيم تنظيما يفصح عن بعض ما تتميز به المجموعة من خصائص ، كما أن هذا التنظيم يساعد الباحث على إلقاء الأضواء على إجابة الأسئلة التي يود بحثها . والتبويب أو تنظيم هذه القيم في صورة جدول توزيع تكراري يجب تجميع قيم المتغير في عدد من الفئات المتساوية الطول . ومن البديهي ألا نجعل عدد الفئات التي نختارها قليلا فلا نستفيد شيئا من عملية التجميع ، وألا نجعله كبيرا فتضيع معالم التوزيع . وليست هناك قاعدة ثابتة لتحديد هذا العدد لأن ذلك يتوقف على عوامل كثيرة منها طبيعة عينة البحث ، والهدف من البحث ومدى دقة القياس . وعلى وجه العموم يكون عدد الفئات مناسبا في البحوث النفسية والتربوية إذا كان محصورا بين ١٢ ، ٢٠ . والقدرة على اختيار العدد المناسب من الفئات تستلزم بعض الخبرة والمران من جانب الباحث .

ولتوضيح طريقة إنشاء جدول توزيع تكراري للبيانات الكمية المتصلة نعرض المثال الآتي :

لنفرض أن الدرجات التي حصل عليها ٧٠ طالبا وطالبة في أحد الاختبارات مرتبة ترتيبا تصاعديا هي كما يلي :

٤٠	٤٧	٥٢	٥٥	٥٨	٦٠	٦١	٦٣	٦٤	٦٥
٤٤	٤٩	٥٣	٥٥	٥٨	٦٠	٦٢	٦٣	٦٣	٦٦
٤٦	٥٠	٥٣	٥٦	٥٩	٦١	٦٢	٦٣	٦٥	٦٦
٤٦	٥١	٥٤	٥٧	٦٠	٦١	٦٢	٦٤	٦٥	٦٦
٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧١	٧٣	٧٤	٧٨	٨١	٨٤
٦٧	٦٨	٦٩	٦٩	٧١	٧٣	٧٥	٧٩	٨١	٨٤
٦٧	٦٨	٦٩	٦٩	٧٢	٧٤	٧٦	٧٩	٨٢	٨٤

فلكى ننشىء جدول توزيع تكرارى لهذه الدرجات نبدأ بحساب المدى الذى تمتد فيه هذه الدرجات وهو الفرق بين أصغر درجة وأكبر درجة ثم تقسم هذا المدى على عدد الفئات الذى نراه مناسباً . وخارج القسمة هذا يعطينا أقرب قيمة صحيحة لطول أو سعة الفئة . ومن القواعد العامة فى تحديد طول الفئة أن يكون هذا الطول أحد القيم ١ أو ٢ أو ٣ أو ٥ أو مضاعفات الخمسة .

ففى المثال السابق نلاحظ أن أقل درجة هى ٤٠ وأكبر درجة هى ٨٤ ، أى أن المدى هو ٤٠ . فاذا رأينا أن عشر فئات هو عدد مناسب فإن خارج القسمة يكون ٤,٤ ، وإذن يكون اختيار طول الفئة ٥ مناسباً . أى نقرب العدد ٤,٤ إلى أقرب عدد صحيح .

والخطوة التالية هى أن نأخذ أقل درجة فى مجموعة الدرجات المبينة فى المثال السابق ونعتبرها أقل قيمة فى الحد الأدنى للفئة الدنيا ، وهذه الدرجة هى ٤٠ . ثم نضيف إليها ٤ (أى طول الفئة مطروحا منه واحد صحيح) لنحصل على أكبر قيمة فى الحد الأدنى للفئة الدنيا . وبذلك تكون الفئة الدنيا لمجموعة الدرجات هى ٤٠ — ٤٤ .

ويجب أن تبدأ الفئة التالية بالعدد ٤٥ وهو العدد الذى يلى أكبر قيمة فى

الحد الأدنى للفئة الدنيا . وتكرر الخطوة السابقة للحصول على الحد الأعلى لهذه الفئة . وبذلك تكون هذه الفئة هي ٤٥ — ٤٩ .

وجدير بنا أن نلاحظ أننا إذا اخترنا طول الفئة ٥ مثلا فيحسن أن يكون الحد الأدنى لكل فئة من مضاعفات ٥ : وإذا كان طول الفئة ٢ مثلا ، فيحسن أن يكون الحد الأدنى لكل فئة من مضاعفات ٢ وبالمثل فى أى طول نختاره . فهذا الإجراء يوفر بعض الوقت فى عملية التجميع ، ويقلل من احتمال الخطأ فى حساب الحدود الدنيا والعليا للفئات .

وبعد ذلك نكون جدولا يتكون من ثلاثة أعمدة كما هو موضح فيما يلى ، ونضع الفئات التى تم اختيارها مرتبة ترتيبا تنازليا أو تصاعديا فى العمود الأول ثم نمر على قيم المتغير (الدرجات) واحدة بعد الأخرى ، ونضع لكل قيمة نمر بها علامة (شرطة مائلة) فى العمود الثانى أمام الفئة التى تدخل تحتها هذه القيمة. ومن الإجراءات التى تيسر عملية التجميع وضع كل خمس علامات فى حزمة واحدة ، وذلك بوضع علامة خامسة تقطع كل أربع علامات منها . ثم نضع فى العمود الثالث تكرار كل فئة ، وهو بطبيعة الحال يكون مساويا لعدد العلامات الموضوعة أمام الفئات ، كما أن المجموع الكلى للتكرارات يجب أن يكون مساويا لعدد الدرجات . وقد نخصص عمودا رابعا لمراكز الفئات وهى تساوى متوسط الحدين الأدنى والأعلى لكل فئة . لأننا نحتاج إلى هذه المراكز فى حساب بعض القيم الإحصائية كالمتوسط الحسابى والانحراف المعيارى ، كما سنرى فى الفصول التالية . كما قد يحتاج الأمر إلى إضافة عمود خامس للتكرارات النسبية وهى تنتج من خارج قسمة كل تكرار على المجموع الكلى للتكرارات ومن الواضح أن المجموع الكلى لهذه التكرارات النسبية يجب أن يكون واحدا صحيحا .

وفيما يلى جدول التوزيع التكرارى (جدول رقم ٤) لمجموعة الدرجات التى حصل عليها ٧٠ طالبا المبينة فى المثال السابق :

فئات الدرجات	علامات التكرار	التكرار
٤٠ — ٤٤	//	٢
٤٥ — ٤٩	////	٤
٥٠ — ٥٤	~~////~~ /	٦
٥٥ — ٥٩	~~////~~ //	٧
٦٠ — ٦٤	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	١٥
٦٥ — ٦٩	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	١٨
٧٠ — ٧٤	~~////~~ //	٧
٧٥ ٧٩	~~////~~	٥
٨٠ — ٨٤	/// /	٦
المجموع	ن =	٧٠

جدول رقم (٤)

توزيع تكرارى لمجموعة الدرجات التى حصل عليها ٧٠ طالبا فى احد الاختبـــــارات .

وهذا الجدول يعطينا فكرة سريعة عن توزيع درجات الاختبار بين الطلاب السبعين . ومنه نلاحظ تجمع أكبر للدرجات فى الفئتين المحصورتين بين ٦٠ ، ٦٩ ، ويقل عدد الدرجات فى الفئات المتطرفة (الدنيا والعليا) . وبذلك تحقق عملية التبويب أهـــداف اختزال وتنظيم وتوضيح مجموعة البيانات .

الحدود الحقيقية للفئات :

عرضنا فى الفصل الأول كيفية التعامل مع الأعداد فى عملية القياس ، وقد أوضحنا أن القيمة الحقيقية للعدد تساوى قيمته الظاهرية مضافاً إليها مرة ومطروحاً منها مرة أخرى ½ وحدة القياس . وهذه القاعدة تظل صحيحة فى حالة القيم المجمعة فى فئات . ولذلك فبالرغم من أننا نكتب الحدود الظاهرية للفئة الدنيا مثلا ٤٠ — ٤٤ . إلا أن الحدود الحقيقية لهذه الفئة هى : ٣٩٫٥ — ٤٤٫٥ .

ومن المهم أن نتذكر أن الحدود الحقيقية لفئة ما ليست هى نفسها الحدود الظاهرية للفئة ، وفى الحقيقة سوف نعتمد على الحدود الحقيقية للفئات عند حساب كثير من المقاييس الإحصائية ـ كما سنرى فيما بعد .

التوزيعات التكرارية المتجمعة والمتجمعة النسبية :

Cumulative Frequencies and Cumulative Percentage Distributions.

فى التوزيعات التكرارية قد لا يكون اهتمامنا منصباً على عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة معينة بل على عدد الطلاب الذين حصلوا على درجة « أقل من » أو « أكبر من » درجة معينة . وفى مثل هذه الحالات نلجأ إلى إنشاء ما يسمى بالتوزيع التكرارى المتجمع . ويشتق هذا التوزيع من التوزيع التكرارى البسيط الذى عرضنا له فيما سبق . ويفيد هذا التوزيع فى حساب عدد من المقاييس الإحصائية مثل الوسيط ، والأعشاريات ، والمئينات وغيرها مما سنعرض له فى الفصول التالية

٢ — التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد :

فى هذا التوزيع نبدأ بأكبر الفئات ، ونضع التكرارات أمام الفئات بحيث يتضمن التكرار المقابل لكل فئة مجموع تكرارات الأقل منها .

٢ — التوزيع التكرارى المتجمع النازل :

فى هذا التوزيع نبدأ بأكبر الفئات ، ونضع التكرارات أمام الفئات بحيث يتضمن التكرار المقابل لكل فئة مجموع تكرارات الفئات الأكبر منها .

وكل من الجدولين الناتجين يسمى بجدول التوزيع التكرارى المتجمع .

وفيما يلى كل من جدولى التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد والنازل للدرجات السبعين الموضحة بجدول رقم (٤) السابق .

فئات الدرجات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النسبى
٤٠ — ٤٤	٢	٢	٢,٩
٤٥ — ٤٩	٤	٦	٨,٦
٥٠ - ٥٤	٦	١٢	١٧,١
٥٥ — ٥٩	٧	١٩	٢٧,١
٦٠ - ٦٤	١٥	٣٤	٤٨,٦
٦٥ — ٦٩	١٨	٥٢	٧٤,٣
٧٠ — ٧٤	٧	٥٩	٨٤,٣
٧٥ - ٧٩	٥	٦٤	٩١,٤
٨٠ — ٨٤	٦	٧٠	١٠٠

جدول رقم (٥)

التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد للدرجات السبعين الموضحة فيما سبق .

ويوضح التكرار المتجمع الصاعد لفئة ما فى هذا الجدول عدد جميع الطلاب الذين تقل درجاتهم عن الحد الأعلى الحقيقى لهذه الفئة . فمثلا يوجد ١٢ طالبا تقل درجاتهم عن الحد الأعلى الحقيقى للفئة ٥٠ — ٥٤ أى تقل درجاتهم عن ٥ر٥٤ .

ويمكن الحصول على قيم التكرار المتجمع الصاعد بعملية جمع متتال للتكرارات التى فى العمود الثانى .

فمثلا التكرار المتجمع الذى يناظر الحد الأعلى الحقيقى للفئة ٥ر٥٤ — ٥ر٥٩ نحصل عليه بجمع تكرار هـذه الفئة والتكرارات السابقة عليها أى : ٢ + ٤ + ٦ + ٧ = ١٩ .

وينبغى أن نتأكد أن قيمة التكرار المتجمع الصاعد التى تقع أدنى العمود الثالث تساوى العدد الكلى للتكرارات . فإذا لم نحصل على هذا العدد ينبغى مراجعة عمليات الجمع .

ويمكن الحصول على التكرارات المتجمعة النسبية التى فى العمود الرابع بقسمة كل تكرار متجمع صاعد على العدد الكلى للتكرارات ونضرب الناتج فى ١٠٠ ، فمثلا التكرار المتجمع النسبى الذى يناظر التكرار المتجمع ٢ نحصل عليه كالآتى :

$$\frac{٢}{٧٠} \times ١٠٠ = ٢,٨ \,\%$$ تقريبا .

أى أن هناك طالبين (أى ٢,٨ ٪ من مجموع الطلاب) تقل درجاتهم عن الحد الأعلى الحقيقى للفئة ٤٠ — ٤٤ .

وينبغى أن نتأكد أيضاً أن قيمة التكرار المتجمع النسبى التى تقع أدنى العمود الرابع تساوى ١٠٠ ٪ وذلك لأن جميع الطلاب تكون درجاتهم أقل من الحد الأعلى الحقيقى للفئة العليا .

كما يمكن أن نستنتج أن ٥٧ طالبا (٥٩ — ٢ = ٥٧) تقع درجاتهم بين ٤٤,٥ ، ٧٤,٥ .

ويمكن تكوين جدول التوزيع التكرارى المتجمع النازل بطريقة مماثلة .

فئات الدرجات	التكرار	التكرار المتجمع النازل	التكرار المتجمع النسبي ٪
٤٠ — ٤٤	٢	٧٠	١٠٠
٤٥ — ٤٩	٤	٦٨	٩٧,١
٥٠ — ٥٤	٦	٦٤	٩١,٤
٥٥ — ٥٩	٧	٥٨	٨٢,٩
٦٠ — ٦٤	١٥	٥١	٧٢,٩
٦٥ — ٦٩	١٨	٣٦	٥١,٤
٧٠ — ٧٤	٧	١٨	٢٥,٧
٧٥ — ٧٩	٥	١١	١٥,٧
٨٠ — ٨٤	٦	٦	٨,٤

جدول رقم (٦)

التوزيع التكرارى المتجمع النازل للدرجات السبعين الموضحة فيما سبق

ويوضح التكرار المتجمع النازل لفئة ما فى هذا الجدول عدد جميع الطلاب الذين تفوق درجاتهم الحد الأدنى الحقيقى لهذه الفئة ، فمثلا يوجد ٦٤ طالبا (أى حوالى ٩١ ٪ من مجموع الطلاب) تفوق درجاتهم الحد الأدنى الحقيقى للفئة ٥٠ — ٥٤ ، أى تزيد درجاتهم عن ٤٩,٥ .

ويمكن الحصول على قيم التكرار المتجمع النازل بعملية طرح متتال للتكرارات التى فى العمود الثانى ، فمثلا التكرار المتجمع الذى يناظر الحد الأدنى الحقيقى للفئة ٥٤,٥ — ٥٩,٥ تحصل عليه بطرح تكرار الفئة السابقة عليها من التكرار المتجمع النازل للفئة السابقة أى ٦٤ — ٦ = ٥٨ .

كما يمكن أن نستنتج أن ٥٧ طالبا (٦٨ — ١١) تقع درجاتهم بين ٤٤,٥ ، ٧٤,٥ وهى نفس النتيجة التى وصلنا إليها من الجدول رقم (٥) .

والواقع أن أيا من الجدولين يغنى عن الآخر ، ولذا يمكن أن نكتفى بأحدهما .

توزيع الملاحظات داخل كل فئة :

إن تجميع الملاحظات أو البيانات فى فئات يؤدى إلى فقد بعض المعلومات الخاصة بكل ملاحظة أو درجة على حدة .

إذ ربما تختلف الدرجات ، ومع هذا تتجمع جميعا فى فئة واحدة . ولذلك يجب افتراض بعض الفروض الخاصة بالقيم داخل كل فئة عند حساب بعض المقاييس الإحصائية وعند التمثيل البيـــانى للبيانات ، و يمكن افتراض أى من الفرضين الآتيين بحسب مانهدف إليه من تحليل البيانات .

الافتراض الأول هو أن الملاحظات تتوزع توزيعا منتظما على الحدود الحقيقية للفئات ، ويؤخذ بهذا الافتراض عند حساب الوسيط ، والإرباعيات والمئينيات وعند رسم المدرجات التكرارية . فاذا نظرنا إلى الجدول الآتى نجد أن تكرار جميع الحالات وعددهم ١٦ يقع فى الفئة ١٠٠ — ١٠٤ والتى حدودها الحقيقية ٩٩,٥ — ١٠٤,٥ وهنا يفترض أن هذا التكرار الكلى موزع على هذه الفئة الكلية كالآتى :ـ

الفئة	التكرار
٩٩,٥ — ١٠٠,٥	٣,٢
١٠٠,٥ — ١٠١,٥	٣,٢
١٠١,٥ — ١٠٢,٥	٣,٢
١٠٢,٥ — ١٠٣,٥	٣,٢
١٠٣,٥ — ١٠٤,٥	٣,٢
المجموع	١٦,٠

أما الافتراض الثانى وهو الافتراض الشائع فيعتبر أن جميع الملاحظات تتركز فى منتصف الفئة . أى أن كل ملاحظة أو درجة تأخذ قيمة مساوية للقيمة المناظرة لمنتصف الفئة . فمنتصف أى فئة هو متوسط قيمتى الحدين الحقيقيين لهذه الفئة .

فى الجدول السابق نجد أن منتصف الفئة ٩٩,٥ — ١٠٠,٥ هو ١٠٠ ومنتصف الفئة ١٠٠,٥ — ١٠١,٥ هو ١٠١ وهكذا .

ويؤخذ بهذا الافتراض عند حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية ، وعند رسم المضلعات التكرارية .

التمثيل البيانى للبيانات :

إن التمثيل البيانى يساعد الباحث كثيراً على تنظيم وتلخيص الدرجات أو البيانات ، كما يساعد على توضيح أشكال التوزيعات التكرارية ، ومقارنة التوزيع التكرارى بغيره من التوزيعات ، فالشكل البيانى هو تمثيل هندسى لمجموعة من البيانات . ولا يقتصر استخدام الأشكال الهندسية على هذا التمثيل وحده ، بل يسهم فى تكوين نماذج بصرية تساعد على التفكير فى المشكلات الإحصائية . إذ يمكن اختزال كثير من المشكلات إلى أشكال توضيحية مما يجعل حلها أو فهمها أكثر يسراً . والدليل على ذلك أن كثيراً من الجرائد والمجلات والتقارير الاقتصادية والعلمية تستخدم التمثيل البيانى بكثرة .

والأشكال البيانية التى سنعرض لها فى هذا الفصل ترتبط ارتباطاً مباشراً بالتوزيعات التكرارية التى قدمنا لها فيما سبق . كما أن هذه الأشكال تؤدى نفس وظيفة هذه التوزيعات وهى تيسير فهم المعلومات ولكن بصورة بيانية . وعندما ينتقل الباحث فيما بعد إلى دراسة الأساليب المتقدمة فى تحليل البيانات سوف نجد أن التمثيل البيانى لا يقتصر فقط على توضيح البيانات بيانيا ، ولكن ييسر أيضا حل كثير من مشكلات البحوث النفسية والتربوية .

وسوف يتم رسم جميع الأشكال البيانية التى سنقوم بعرضها فى هذا الفصل بالنسبة إلى محورين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى ، ويسميان محورى الإحداثيات . فالمحور الأفقى سوف يمثل ميزان الدرجات بنفس الطريقة التى تستخدم بها المسطره العادية . أما إذا كانت البيانات والملاحظات مجمعة فيمكن للباحث تعيين النقط التى تناظر منتصف الفئات على هذا المحور . وبالطبع يمكن تيسير ذلك باختيار فئات تكون منتصفاتها أعداداً صحيحة . كما يتم تعيين التكرارات أو التكرارات النسبية على المحور الراسى . ومن المهم عند رسم الشكل البيانى أن يوضع عنوان على كل من المحورين حتى يتضح للقارىء مايشير إليه كل منهما . كما يجب أن يوضع عنوان دقيق للشكل البيانى ليساعد القارىء على التعرف على الجوانب المختلفة للبيانات (مثلا مصادر البيانات وماذا تقيس ... إلخ) .

ومن الأفكار الهامة التى ترتبط بالتمثيل البيانى للتوزيعات التكرارية هى أن المساحة تحت المنحنى أو جزء منه تمثل تكرار الدرجات المناظرة . وغالبا ما تحدد المساحة الكلية تحت المنحنى بالواحد الصحيح ، وبذلك تصبح المساحة الواقعة فوق جزء من ميزان الدرجات (المحور الأفقى) مساوية للتكرار النسبى لهذه الدرجات . وهذه العلاقة بين التكرار النسبى والمساحة تعد أساسية فى استخدام الإحصاء فى البحوث .

المدرج التكرارى : Histogram

يمكن تمثيل مجموعة من الدرجات أو الملاحظات بيانيا برسم شكل بيانى على هيئة مستطيلات متلاصقة إذا كان ميزان القيـــاس من النوع الفترى أو النسبى أو مستطيلات غير متلاصقة إذا كان ميزان القياس اسمى أو رتبى . وعدد هذه المستطيلات يساوى عدد فئات التوزيع ، وقاعدة كل منها هى الجزء الذى يمثل الفئة وارتفاعه يمثل التكرار فى هـــذه الفئة ، والمساحة الكليه للمستطيلات تتناسب مع التكرار الكلى للتوزيع . ولعل المدرج التكرارى هو أسهل طريقة لتمثيل التوزيعات التكراريه بيانيا .

ولتوضيح كيفية رسم المدرج التكرارى نفترض أن لدينا درجات ١٥٠ تلميذاً فى الصف السادس فى اختبار الحساب ، وهذه الدرجات مبينـــة بالجدول رقم (٧) الآتى :

فئات الدرجات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٣٠ — ٣٤	٤	٤	١٥٠
٣٥ — ٣٩	٦	١٠	١٤٦
٤٠ — ٤٤	٧	١٧	١٤٠
٤٥ — ٤٩	٨	٢٥	١٣٣
٥٠ ٥٤	١١	٣٦	١٢٥
٥٥ — ٥٩	١٢	٤٨	١١٤
٦٠ — ٦٤	١٠	٥٨	١٠٢
٦٥ — ٦٩	١٧	٧٥	٩٢
٧٠ ٧٤	٢٣	٩٨	٧٥
٧٥ — ٧٩	٢٠	١١٨	٥٢
٨٠ — ٨٤	١٣	١٣١	٣٢
٨٥ — ٨٩	٩	١٤٠	١٩
٩٠ — ٩٤	٧	١٤٧	٢٠
٩٥ — ٩٩	٣	١٥٠	٣

ن = ١٥٠

جدول رقم (٧)

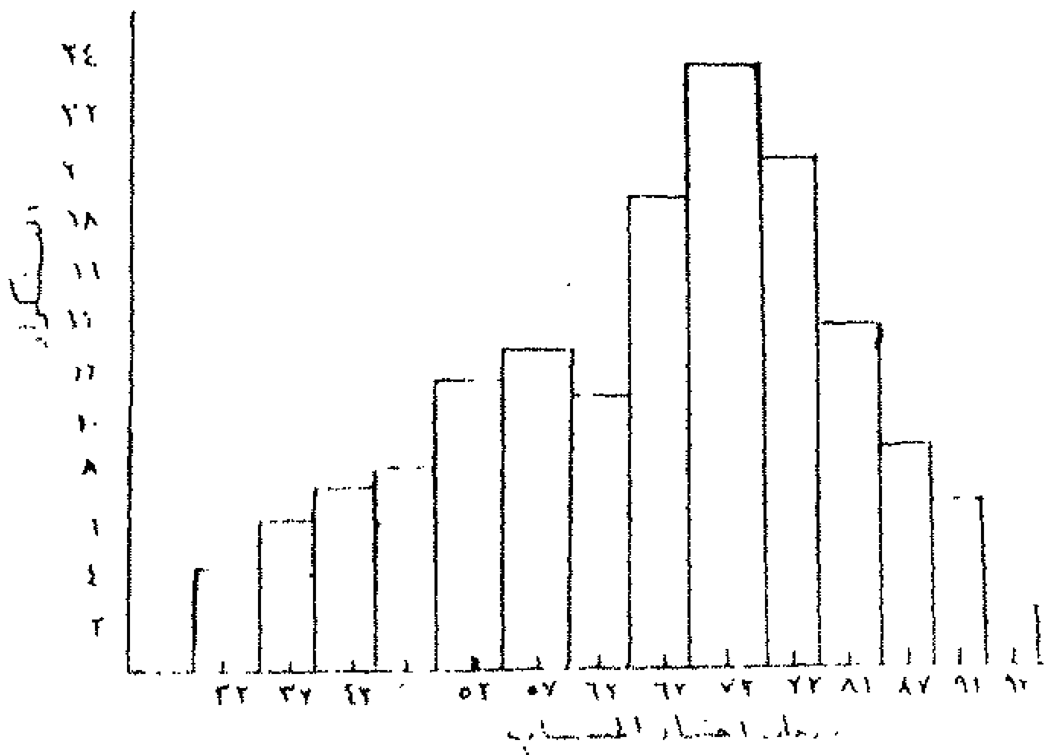
درجات ١٥٠ طالبا فى اختبار الحساب

فالخطوة الاولى هى أن نعد ورقة رسم بيانى ، ثم نرسم خطا أفقيا (المحور السينى) ليمثل فئات درجات الطلاب فى مادة الحساب ، وارسم خطا رأسيا (المحور الصادى) عموديا على الخط السابق .

والخطوة الثانية — هى أن نحدد مواضع مراكز الفئات على الخط الأفقى ، وتكرار هـذه الفئات على الخط الرأسى بعد وضع عناوين مناسبة على هذين المحورين .

والخطوة الثالثة - هى أن ارسم أعمدة مستطيلة على الحدود الحقيقية لكل فئة وليس على مراكز الفئات بحيث يكون ارتفاع كل منها مناظراً لتكرار درجات كل فئة منها . ويجب أن تكون المستطيلات متلاصقة كما يجب أن يوضع عنوان مناسب للمدرج التكرارى .

ويوضح الشكل رقم (١) المدرج التكرارى للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٧)



شكل رقم (١)

المدرج التكرارى لدرجات ١٥٠ تلميذا فى
الصف السادس فى مادة الحساب

المضلع التكرارى Frequency Polygon .

افترضنا عند رسم المدرج التكرارى أن تكرار كل فئة موزع توزيعا منتظما على مدى الفئة . ولكننا سنفترض فى حالة المضلع التكرارى أن تكرار كل فئة مركز فى منتصف الفئة .

وهذا هو الفرق الرئيسى بين المدرج التكرارى والمضلع التكرارى . ولرسم المضلع التكرارى نقوم برسم محورين متعامدين كما سبق فى حالة المدرج التكرارى ولكن يجب هنا أن نضيف فئتين إحداهما تسبق الفئة الدنيا والأخرى تعقب الفئة العليا . فمثلا فى جدول رقم (٧) السابق نضيف الفئتين ٢٥ — ٢٩ ، ١٠٠ — ١٠٤ ، ونعتبر أن تكرار كل منها صفر .

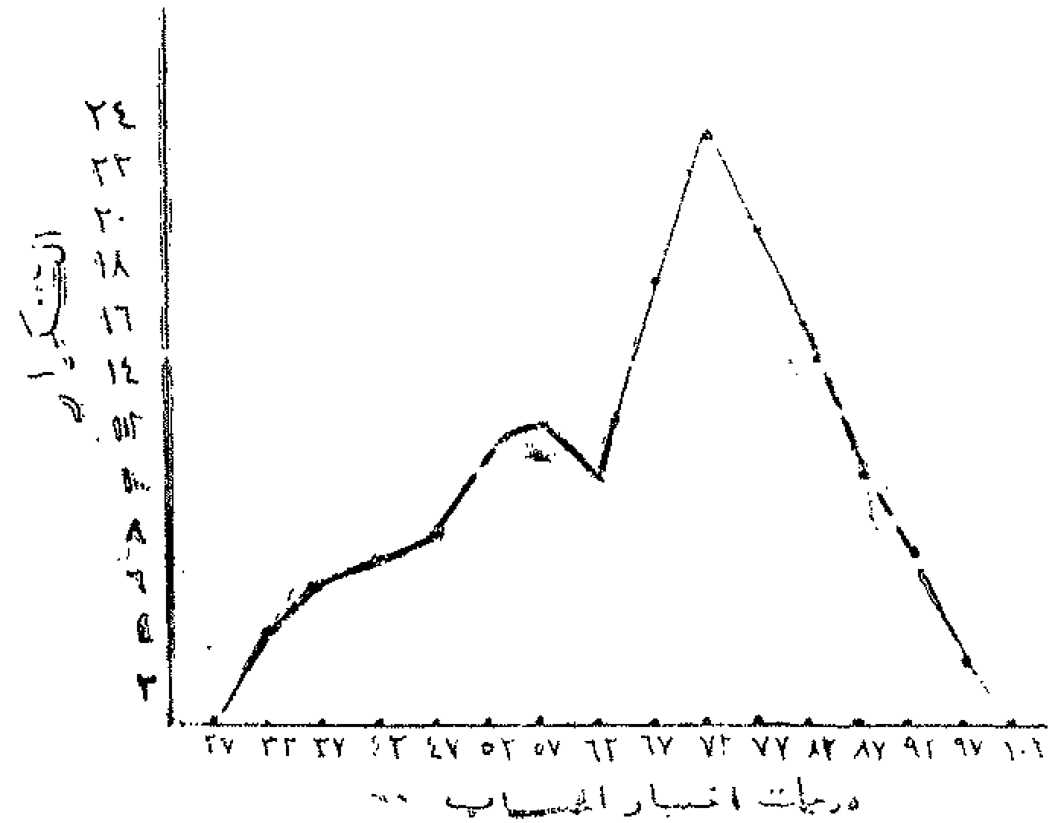
والخطوة التالية هى أن نعين نقطا تناظر تكرار كل فئة (بما فى ذلك الفئتان اللتان تكرار كل منهما صفر) فوق منتصف كل فئة . ثم نصل بين هذه النقط بخط منكسر .

ويمكن اعتبار المضلع التكرارى هو الخط المنكسر الواصل بين منتصفات القواعد العليا للمدرج التكرارى والممتد من إحدى ناحيتيه إلى منتصف الفئة التى تسبق فئات التوزيع ومن الناحية الأخرى إلى منتصف الفئة التى تعقب فئات التوزيع وبذلك يكون المضلع مقفلا وتكون مساحته مساوية بالضبط لمساحة المدرج التكرارى .

ورسم المضلع التكرارى لا يستلزم بالطبع رسم المدرج التكرارى أولا ، إذ من السهل رسمه مستقلا بتوصيل النقط التى تمثل مراكز الفئات والتكرارات المناظرة لها .

ولتيسير تفسير المضلع التكرارى وحسن تمثيله للبيانات يفضل جعل ارتفاع التوزيع يتراوح بين ٦٠٪ إلى ٧٥٪ من طول قاعدته .

ويوضح الشكل رقم (٢) المضلع التكرارى للبيانات الموضحة بجدول رقم (٧)



شكل رقم (٢)

المضلع التكرارى لدرجات ١٥٠ تلميذا فى
الصف السادس فى مادة الحساب

وبالنظر إلى المضلع التكرارى نجد أنه ليس منحنيا ممهدا متصلا، لأن الخطوط التى تصل بين مختلف النقط هى خطوط مستقيمة . فإذا ما قسمنا كل فئة إلى فئات صغيرة فإننا سوف نحصل بالطبع على تكرارات غير منتظمة ، أى سوف يوجد عدد أقل من الأفراد فى كل فئة . فإذا افترضنا أن كل فئة صغرت صغرا كافيا إلى أن تقترب من الصفر ، وزاد تكرار كل فئة زيادة كبيرة حتى يقترب من اللانهاية فإننا بذلك نصل إلى مفهوم التوزيع التكرارى المتصل .

مزايا وعيوب المدرجات والمضلعات التكرارية :

يفضل عادة استخدام المضلع التكرارى عن المدرج التكرارى لأنه يعطينا فكرة أو تصورا أفضل عن شكل وحدود التوزيع . و يكون الانتقال من فئة إلى أخرى فى التوزيع بطريقة مباشرة ، كما أنه يمكن أن يصف التوزيع بدرجة أكثر دقة ، فى حين أن المدرج التكرارى يعتمد على التغير التدرجى من فئة إلى أخرى ويفترض فيه أن تكرار كل فئة يتوزع توزيعا منتظما على الفئة .

أما المضلع التكرارى فهو يعطى انطباعا صحيحا عن أنه على جانبي أعلى نقطة أو تكرار فى التوزيع يكون تكرار فئة ما كبيرا على الجانب القريب من أعلى نقطة ، إلا فى حالة حدوث تحول فى هذه النزعة العامة .

ولكن المدرج التكرارى يعطى صورة أكثر فهما لعدد الحالات الواقعة فى كل فئة . وكل قياس أو كل فرد يشغل مساحة متساوية من الشكل .

ويفيد المضلع التكرارى فى تمثيل توزيعين تكراريين بينهما تداخل على خط القاعدة ، كما فى حالة توزيعى مجموعتين عمريتين مختلفتين أو توزيعى البنين والبنات، فتمثيل كل من هذين التوزيعين باستخدام المدرج التكرارى يعطى صورة غامضة إلى حد كبير ، فى حين أن المضلع التكرارى يمكننا من مقارنة التوزيعين بوضوح .

المنحنى التكرارى : Frequency Curve

هو نفس المضلع التكرارى بعد تهذيبه بحيث يبدو على شكل منحنى ممهد . وقد يتم هذا التهذيب بمجرد النظر أو باستخدام إحدى طرق توفيق المنحنيات التكرارية ويفضل استخدام هذه الطرق لأنها تعطى منحنيات لها خواص رياضية تيسر دراسة التوزيعات واستنباط الحقائق الخاصة بها .

وإحدى الطرق السريعة التى يمكن أن تستخدم لتهذيب وتمهيد المنحنيات

التكرارية و Curve Smoothing هي طريقة تحريك المتوسطـــات Moving Averages .

ويمكن إجراء ذلك بأن نعوض عن كل تكرار في التوزيع بالقيمة التقريبية الآتية :

تكرار فئة ما بعد تهذيبه =

$$\frac{\text{تكرار الفئة السابقة} + ٢ \times \text{تكرار الفئة} + \text{تكرار الفئة اللاحقة}}{٤}$$

أي أن تكرار فئة ما بعد تهذيبه يساوي تقريبا مجموع تكراري الفئتين السابقة عليها واللاحقة لها مضافا إلى هذا المجموع ضعف تكرار الفئة نفسها ، وقسمة الناتج على ٤ . وبذلك نتخلص إلى حدما من أثر التذبذبات وعدم انتظام المنحنى الذي يرجع إلى تذبذب العينات التي حصلنا منها على التوزيع التكراري ، وبذلك نحصل على صورة أكثر وضوحا لشكل الظاهرة في المجتمع الأصل .

وبالطبع لانستطيع أن نؤكد بعد إجراء هذا التهذيب ما إذا كنا قد استبعدنا تذبذب العينة وعدم انتظامها أم استبعدنا النزعة الخاصة بالمجتمع الأصل . ولذلك فإن تهذيب المنحنى التكراري لايحل مشكلة تفسير البيانات للظاهرة في المجتمع الأصل .

وأفضل طرق حل هذه المشكلة هو زيادة حجم العينة التي يستمد منها الباحث البيانات لتعبر بدرجة أفضل عن توزيع الظاهرة في المجتمع الأصل .

ويلاحظ أننا حين نجري هذا التهذيب أو التمهيد نفترض أن التوزيع هو توزيع متصل ، أي نفترض أن عدد الحالات قد يزيد زياده لانهائية، وأن طول الفئة قد يتناقص في الوقت ذاته تناقصا لانهائيا بحيث يتخذ المتغير جميع القيم الحقيقية الواقعة بين حدي التوزيع . وليس هناك ما يمنع من هذا الفرض لأن قيم المتغير يمكن نظريا تجزئتها إلى مقادير لانهائية في الصغر بحيث تبدو متصلة

فإذا اعتبرنا توزيع سكان مدينة ما من حيث الأعمار الواقعة بين ١٠ ، ٥٠ عاما ، واخترنا طول الفئة بضع ساعات ، وهى فترة صغيرة جداً بالنسبة للأربعين عاما التى تنحصر بينها الأعمار موضع الدراسة ، وإذا كان عدد سكان هذه المدينة كبيراً لأمكن تمثيل هذا التوزيع بمنحنى ممهد متصل حتى لو كنا قد أخذنا عينة صغيرة تمثل هذا التوزيع .

ونحن فى الإحصاء كثيراً ما نلجأ ، على هذا الأساس ، إلى التعبير عن التوزيعات بمنحنيات متصلة لكى نتمكن من تحليلها والانتفاع بذلك فى الأغراض العلمية .

تمثيل توزيعين تكراريين فى شكل واحد :

عند ما يريد الباحث مقارنة توزيعين تكراريين مختلفين فى العدد الكلى للحالات بطريقة بيانية تبرز مشكلة مقياس الرسم Scale ، أى المساحة التى سوف يشغلها كل من التوزيعين فى الشكل .

وللتغلب على هذه المشكلة يمكنه الاعتماد على التكرارات النسبية لكل من التوزيعين بدلا من استخدام التكرارات نفسها وبذلك يكون قد اعتبر أن عدد حالات كل من التوزيعين ١٠٠ ، وأن مجموع المساحتين الكليتين للتوزيعين متساوية تقريبا عند رسم المضلعين التكراريين ، وهذا يمكننا من مقارنة شكل ومستوى وتشتت التوزيعين بدرجة أفضل .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا البيانات المبينة بالجدول رقم (٨) الآتى ، والذى يشتمل على درجات أحد اختبارات الاستعداد لمجموعتين من طلاب كليتين مختلفتين عدد كل منهما ٥٠ ، ١٦٠ طالبا على الترتيب .

الدرجات	تكرارات المجموعة الأولى $ت_1$	تكرارات المجموعة الثانية $ت_2$	النسبة المئوية لتكرار المجموعة الأولى	النسبة المئوية لتكرار المجموعة الثانية
١٤٠ — ١٤٩		٨		٥٫٠
١٣٠ — ١٣٩		٣٢		٢٠٫٠
١٢٠ — ١٢٩		٤٨		٣٠٫٠
١١٠ — ١١٩	١	٢٩	٢٫٠	١٨٫١
١٠٠ — ١٠٩	صفر	١٨	صفر	١١٫٢
٩٠ — ٩٩	٣	١٤	٥٫٩	٨٫٧
٨٠ — ٨٩	٥	٥	٩٫٨	٣٫١
٧٠ — ٧٩	٦	٥	١١٫٨	٣٫١
٦٠ — ٦٩	١٤	صفر	٢٧٫٥	صفر
٥٠ — ٥٩	٧	١	١٣٫٧	٠٫٦
٤٠ — ٤٩	١١		٢١٫٦	
٣٠ — ٣٩	٤		٧٫٨	
المجموع الكلى	٥١	١٦٠	١٠٠٫١	٩٩٫٩

جدول رقم (٨)

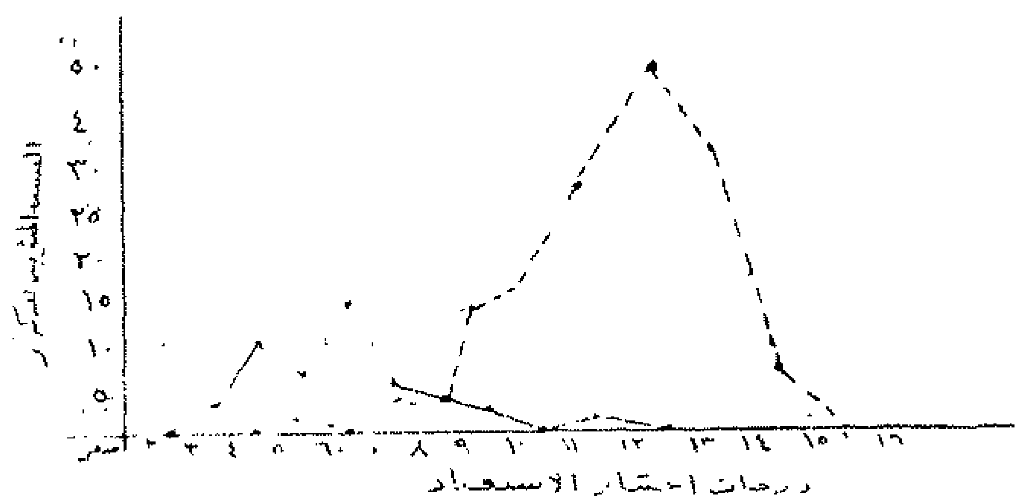
توزيعان تكراريان لدرجات اختبار

فى الاستعداد لطلاب كليتين مختلفتين

بالنظر إلى الجدول السابق نجد أن كل تكرار تحول إلى تكرار نسبي وذلك بقسمته على التكرار الكلى للمجموعة الخاصة به وضرب خارج القسمة × ١٠٠ أو يمكن الاختصار إيجاد النسبة $\frac{١٠٠}{ن}$ حيث ن ترمز إلى التكرار الكلى ، وتقترب النسبة إلى رقمين عشريين ثم ضرب الناتج فى تكرار كل فئة للمجموعة .

فبالنسبة للمجموعتين توجد خارجى القسمة $\frac{١٠٠}{٥١}$ ، $\frac{١٠٠}{١٦٠}$ فنجدهما حوالى ١,٩٦ ، ٦٣, وبضرب الناتج الأول فى تكرار كل فئة للمجموعة الثانية نحصل على خلايا العمودين الرابع والخامس الموضحة بجدول رقم (٨) .

وبذلك يمكن رسم المضلعين التكراريين لكل من التوزيعين باستخدام مراكز الفئات على الخط الأفقى والنسب المئوية للتكرارات على الخط الرأسى كما هو موضح بالشكل رقم (٣) الآتى :



شكل رقم (٣)

مضلعان تكراريان لتوزيعى درجات اختبار
فى الاستعداد لطلاب كليتين مختلفتين

ويتضح من هذا الشكل أنه بالرغم من أن المجموعة الثانية تفوق المجموعة الأولى على ميزان الاستمداد إلا أنه يوجد تداخل بين درجات المجموعتين وهنا يفيد التمثيل البيانى فى توضيح التداخل فى البيانات . كما يتضح من الشكل أن تشتت درجات المجموعة الثانية أقل إلى حد ما من تشتت درجات المجموعة الأولى .

المنحنيات المتجمعة :

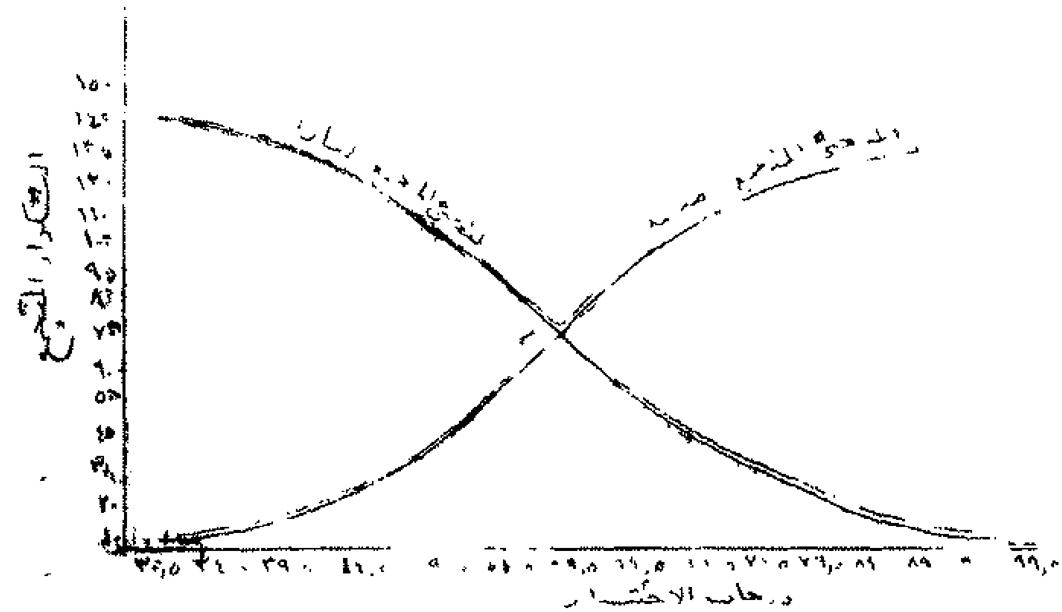
Ogive or Cumulative frequency Curves:

يمكن تمثيل التوزيعات التكرارية المتجمعة الصاعدة أو الهابطة تمثيلا بيانيا لتوضيح النزعات فى علاقة التكرارات بفئات الدرجات ، ونقصد بذلك اطراد زيادة أو نقص التكرارات دون تذبذبات أو تقلبات .

فعندما يكون التوزيع التكرارى متماثلا يأخذ التوزيع التكرارى المتجمع شكل حرف S . ويتباين ميل وأطراف الشكل من توزيع إلى آخر .

ويمكن رسم المنحنيات المتجمعة الصاعدة أو الهابطة بنفس الطريقة التى اتبعت فى رسم المنحنيات التكرارية فيما عدا استخدام التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط على المحور الرأسى بدلا من التكرار المعتاد ، وكذلك استخدام الحدود الحقيقية العليا فى حالة المنحنى المتجمع الصاعد والحدود الحقيقية الدنيا فى حالة المنحنى المتجمع الهابط بدلا من مراكز أو منتصفات الفئات لأن هذه النقط تبين أو تشير إلى العدد الكلى للحالات التى تقل أو تزيد عن هذه الحدود .

ويبين شكل رقم (٤) المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل للدرجات المبينة بجدول رقم (٧) .



شكل رقم (٤)

المنحنى المتجمع الصاعد ، والمنحنى المتجمع النازل لدرجات ١٥٠ طالبا في اختبار للحساب .

وبالنظر إلى هذا المنحنى نجد أن المنحنيين يتقاطعان في النقطة م ، وهي تعني بالنسبة المنحنى الصاعد أن هناك ٧٥ تلميذا (أي نصف عدد التلاميذ) حصلوا على درجات تقل عن ٦٩,٥ ، وتعني بالنسبة للمنحنى النازل أن هناك ٧٥ تلميذاً تزيد درجاتهم عن ٦٩,٥ . ومعنى هذا أن النقطة م تقع في وسط التوزيع تماما ، ولذا فإن الإحداثي السيني لهذه النقطة يسمى بالوسيط Median . وهي نقطة لها أهمية خاصة سوف نعرض لها بالتفصيل في الفصل الثالث .

ويفضل استخدام المنحنيات المتجمعة على المضلعات التكرارية عند ما يكون اهتمام الباحث منصبا على تحديد موقع الفرد بالنسبة إلى أقرانه بدلا من معرفة

أداء المجموعة كـكل ، ولذا فإن كثيراً من البيانات المستمدة من اختبارات القدرات والاختبارات التحصيلية ومقاييس الشخصية توضع على شكل توزيعات تكرارية متجمعة وتمثل بيانيا بمنحنيات متجمعة نظراً لان درجات هـــذه الاختبارات والمقاييس عادة تستخدم لأغراض التشخيص والتقويم .

ويمكن تحويل التكرارات المعتادة إلى نسب مئوية بحيث يكون مجموعها ١٠٠ بدلا من تقرير عدد الحالات ، ومن ثم يمكن تحديد النسب المئوية للتكرارات المتجمعة ، ورسم منحنى يسمى منحنى التكرار المتجمع النسبي . ويمكن باستخدام مثل هذا المنحنى معرفة النسب المئوية للحالات التي تقل عن قيمة معينة كما يمكن استخراج قيم تقريبية لما يسمى بالإرباعيات ، والإعشاريات والمئينات وغيرها من المقاييس الإحصائية الهامة التي سنعرض لها في الفصل الرابع .

أوجه اختلاف التوزيعات التكرارية :

تختلف التوزيعات التكرارية الممثلة في صورة جداول أو أشكال بيانية في عدد من الخصائص هي :ـ

١ ـــ النزعة المركزية Central Tendency

٢ ـــ التشتت Variability

٣ ـــ الالتواء Skewness

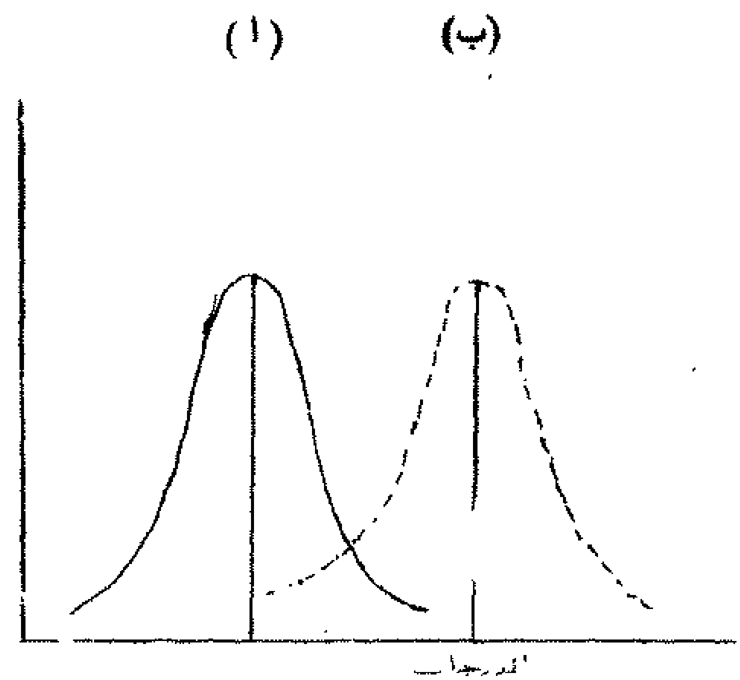
٤ ـــ التفرطح Kurtosis

وهذه الخصائص يمكن أن تصف التوزيع التكراري نفسه أو مجموعة الملاحظات أو البيانات التي تكون التوزيع . فالتوزيع التكراري ماهو إلا تنظيم وتبويب لمجموعة الملاحظات أو البيانات ، ولذلك فإننا يمكن أن نناقش هذه الخصائص بالإشارة إلى مجموعة الملاحظات قبل تبويبها أو بعد تنظيمها وتبويبها في شكل توزيع تكراري .

١ — النزعة المركزية لتوزيع ما تشير إلى قيمة المتغير بالقرب من مركز التوزيع . وتوجد تعريفات أكثر تحديدا لمقيـــاس النزعة المركزية (المتوسط والوسيط والمنوال) سوف نعرض لها بالتفصيل فى الفصل الثالث .

ولتوضيح خاصية النزعه المركزية ، يمكننا أن ننظر إلى المنحنيين التكراريين (مضلعين تكراريين ممهدين) المبينين فى شكل رقم (٥) حيث نجد أنهما يختلفان فقط بالنسبة للنزعة المركزية .

فالمنحنيان لهما نفس الشكل ولـكنهما يشغلان مكانين مختلفين بالنسبة إلى ميزان القياس (المحور السينى) . فمتوسط التوزيع ا أقل من متوسط التوزيع ب .



شكل رقم (٥)
توزيعان تكراريان يختلفان فقط
فى النزعة المركزية

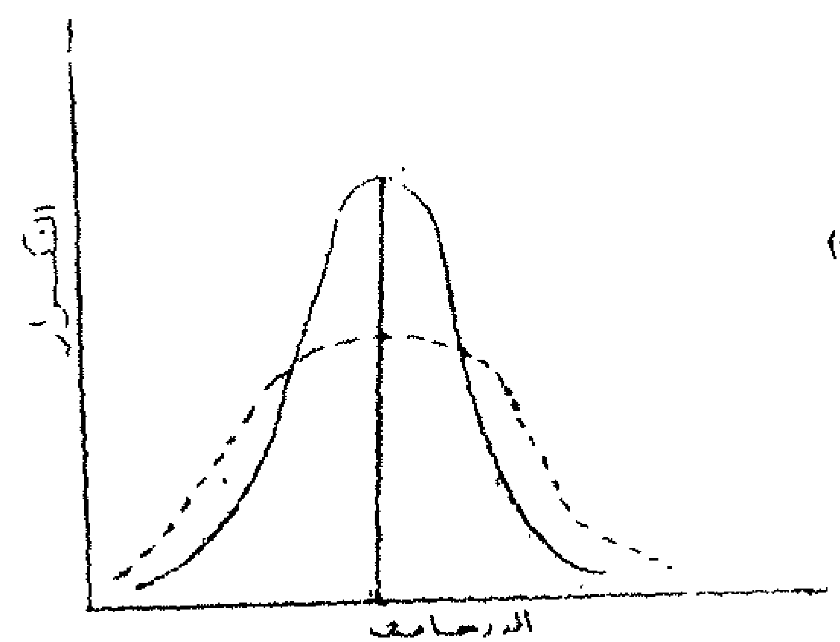
٢ — تشتت توزيع ما هو درجة انحراف الدرجات أو الملاحظات التى تكون التوزيع عن مركز التوزيع أو القيمة المتوسطة له . فإذا كانت جميع

الدرجات متراكمة حول هذه القيمة يقل التشتت عما لو انحرفت الدرجات بعيداً عن هذه القيمة . وسوف نعرض لمقاييس التشتت (المدى المطلق والانحراف المعيارى والتباين فى الفصل الرابع) .

ولتوضيح خاصية التشتت ، يمكننا أن ننظر إلى المنحنيين التكراريين المبينين فى الشكل رقم (٦) ، حيث نجد أنهما لهما نفس النزعة المركزية أى لهما نفس المركز إلا أنهما يختلفان فى التشتت . فدرجات التوزيع ا تميل إلى التراكم بدرجة أكبر حول مركز التوزيع التى يمثله الخط الرأسى الموضح بالشكل . بينما توجد نسبة أكبر من الدرجات فى التوزيع ب تبتعد عن المركز أو القيمة المتوسطة . أى أن تشتت درجات التوزيع ب أكبر من تشتت درجات التوزيع ا . ويعتبر مفهوم التباين أو التشتت من أكثر المفاهيم الإحصائية أهمية فى تحليل البيانات كما سنرى فيما بعد .

(أ)

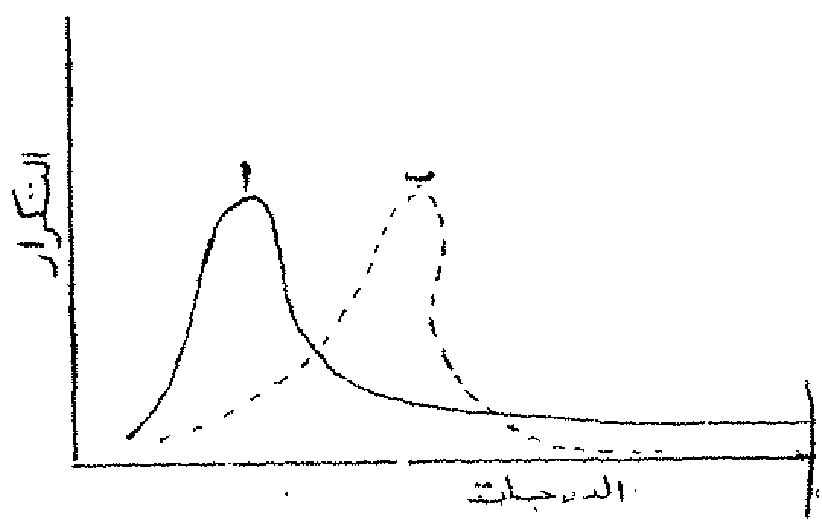
(ب)



شكل رقم (٦)

توزيعان تكراريان يختلفان فقط فى التشتت

٣ ـــ التواء توزيع ما يشير إلى تماثل أو عدم تماثل التوزيع . فإذا كان التوزيع غير متماثل بحيث تتراكم معظم التكرارات حول الطرف السفلى للتوزيع وتقل التكرارات كلما اتجهنا نحو الطرف العلوى له ، فانه يقال فى هذه الحالة أن التوزيع ملتو التواء موجبا Positively Skewed . أما إذا تراكمت معظم التكرارات حول الطرف العلوى للتوزيع بينما تقل التكرارات كلما اتجهنا نحو الطرف السفلى ، فإنه يقال أن التوزيع ملتو التواء سالبا Negatively Skewed .
ولتوضيح خاصية الالتواء ، يمكننا أن ننظر إلى المنحنيين التكراريين المبينين فى شكل رقم (٧) ، حيث نجد أنهما يختلفان فى النزعة المركزية والتشتت ، كما أن كلا منهما غير متماثل . والمنحنى ب أكثر التواء من المنحنى ا لأن نسبة أكبر من الدرجات تميل إلى التراكم نحو أحد طرفى التوزيع بينما تقل كلما اتجهنا نحو الطرف الآخر .

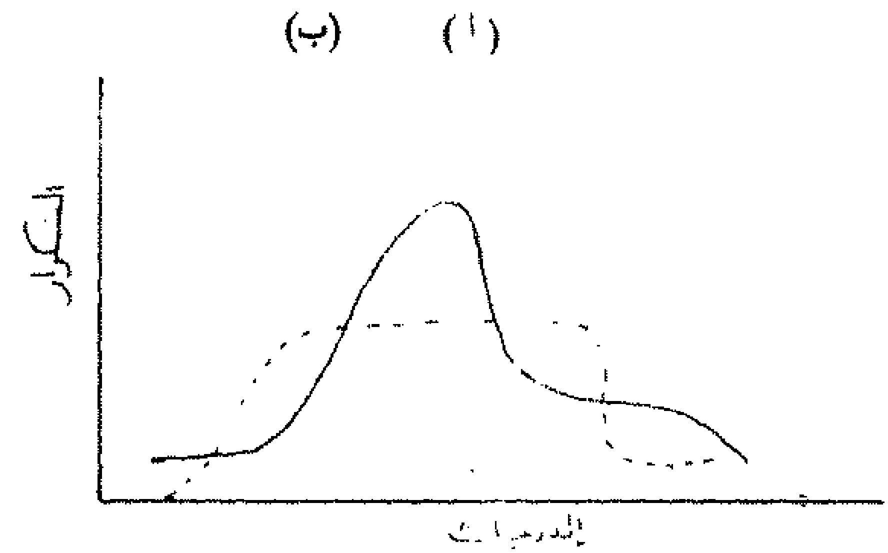


شكل رقم (٧)

توزيعان تكراريان يختلفان فى الالتواء

٤ تفرطح توزيع مايشير إلى الاستواء أو التدبب فى التوزيع بالنسبة لغيره من التوزيعات. فخاصية التفرطح هى خاصية نسبية. فاذا نظرنا إلى المنحنيين التكراريين الموضحين بشكل رقم (٨) نجد أنهما يتفقان فى النزعة المركزية ولكنهما يختلفان فى التفرطح، فالمنحنى ا مدبب بدرجة أكبر من المنحنى ب، ويتغير ارتفاع المنحنى ا بدرجة أكبر من المنحنى ب كلما زادت قيمة الدرجة على المحور السينى.

ولذلك فإنه يقال أن المنحنى ا أكثر تدببا Leptokurtic من المنحنى ب، أو يمكن أن نقول أن المنحنى ب أكثر استواء Platykurtic من المنحنى ا .



شكل رقم (٨)

توزيعان تكراريان يتفقان فى النزعة المركزية ولكنهما يختلفان فى التفرطح

ولإعطاء الباحث صورة أكثر شمولية لهذه الخصائص نعرض فى جدول رقم (٩) مجموعة افتراضية من البيانات تمثل توزيعات تكرارية تختلف فى هذه الخصائص.

١ فئات الدرجات	٢ متماثلة ذو حدين	٣ مدبب	٤ مستو	٥ مستطيل	٦ ثنائي المنوال	٧ شكل U	٨ ملتو التواء موجبا	٩ ملتو التواء سالبا	١٠ شكل J
٧٠ — ٧٩	١	٣	٥	١٦	٥	٣٠	٢	١٠	٥٠
٦٠ — ٦٩	٧	٨	١٤	١٦	١٠	٢٠	٦	٢٥	٣٠
٥٠ - ٥٩	٢١	١٣	٢٠	١٦	٢٥	١٠	١٠	٤٠	٢٠
٤٠ - ٤٩	٣٥	٤٠	٢٥	١٦	١٤	٤	١٥	٢٠	١٠
٣٠ — ٣٩	٣٥	٤٠	٢٥	١٦	١٤	٤	٢٠	١٥	٧
٢٠ — ٢٩	٢١	١٣	٢٠	١٦	٢٥	١٠	٤٠	١٠	٥
١٠ — ١٩	٧	٨	١٤	١٦	١٠	٢٠	٢٥	٦	٤
صفر - ٩	١	٣	٥	١٦	٥	٣٠	١٠	٢	٢
ن	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨	١٢٨

جدول رقم (٩)

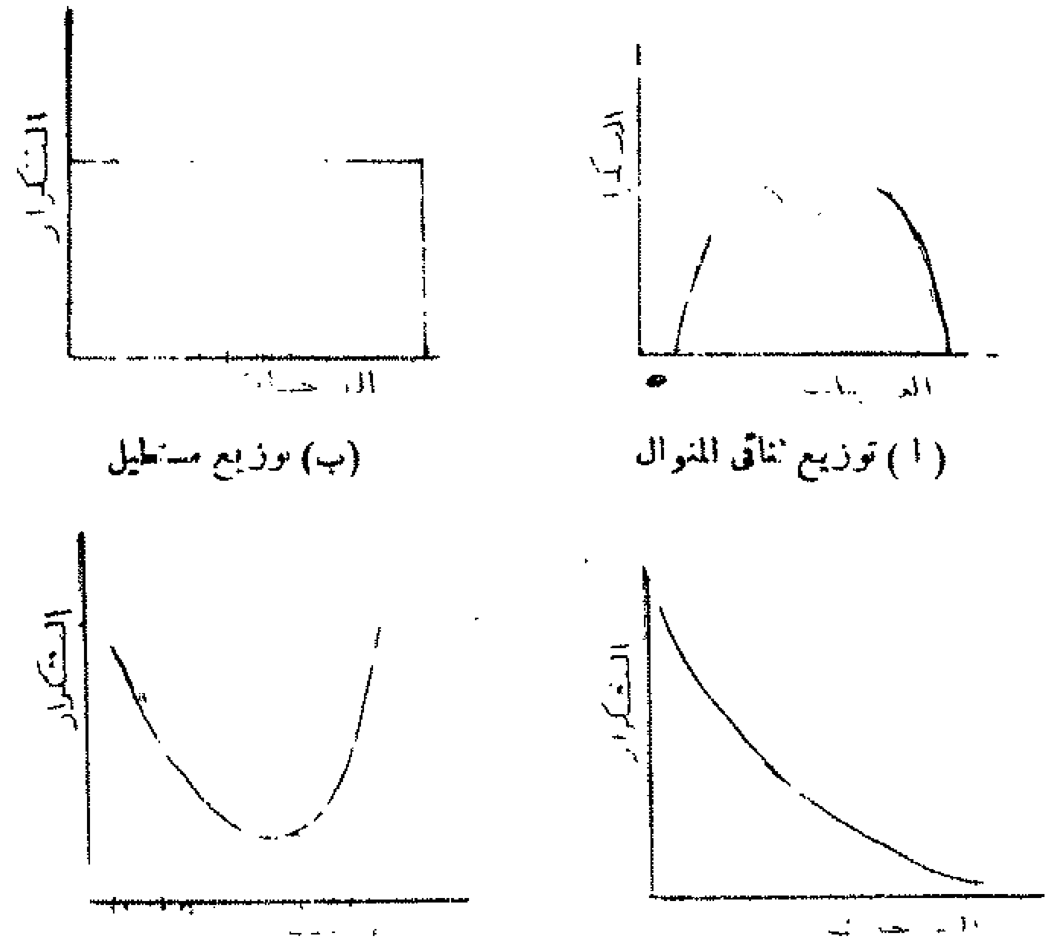
مجموعة افتراضية من البيانات تمثل توزيعات تكرارية مختلفة الشكل

فالتوزيع المبين فى العمود رقم٢ فى الجدول يسمى توزيعا متماثلا ذا حدين ، وهو من التوزيعات الهامة فى الإحصاء وفى تحليل البيانات وسوف نعرض له بالتفصيل فى فصل قادم والتوزيع المبين فى العمود رقم ٣ تتمركز فيه الدرجات حول المتوسط بدرجة أكبر من التوزيع الأول ، ولذلك فهو أكثر تدببا من هذا التوزيع . والتوزيع المبين فى العمود رقم ٤ تتمركز فيه الدرجات حول المتوسط بدرجة أقل من التوزيع ذى الحدين بينما يزيد تكرار الدرجات كلما اتجهنا نحو طرفى التوزيع ، ولذلك فهو أكثر استواء منه .

والتوزيع المبين فى العمود رقم٥ هو توزيع مستطيل لأن تكرار جميع فئاته متساو . والتوزيع المبين فى العمود رقم ٦ له قمتان أى ثنائى المنوال . والتوزيع المبين فى العمود رقم ٧ يشبه الحرف U لأن التكرارات الكبيرة توجد عند طرفى التوزيع بينما تقل التكرارات عند منتصف التوزيع .

وجميع هذه التوزيعات متماثلة وتتفق فى النزعة المركزية ولكنها تختلف فى التشتت . أما التوزيعان المبينان فى العمودين رقمى ٨ ، ٩ ، فهما يمثلان توزيعين أحدهما ملتو التواء موجبا ، والآخر ملتو التواء سالبا . أما إذا زاد التواء التوزيع زيادة كبيرة فإن هذا يؤدى إلى توزيع يشبه التوزيع المبين فى العمود رقم ١٠ وهو على شكل حرف J .

والشكل رقم (٩) يوضح بعض هذه التوزيعات .



(ا) توزيع ثنائي المنوال (ب) توزيع مستطيل

(ج) توزيع على شكل حرف J (د) توزيع على شكل حرف U

شكل رقم (٩)

اربعة انواع من التوزيعات

من هذا يتضح أن الخصائص الأربع التى عرضنا لها تفيد فى وصف الشكل العام لتوزيع تكرارى . فمثلا يمكن أن نقول أن توزيعا ما ملتو التواء موجباً وأكثر استواء من توزيع آخر . هذا الوصف اللفظى يعطينا فكرة سريعة عن شكل المنحنى الممثل لتوزيع البيانات . ولكن الباحث يود فى كثير من الأحيان أن يصف توزيع بياناته بدرجة أكثر دقة من مجرد الوصف اللفظى . فلكى يقارن التوزيعات التكرارية ربما يكون من الأدق استخدام مقاييس رياضية وإحصائية تعبر عن خصائص هذه التوزيعات ، وهذا هو ما سنعرض له بالتفصيل فى الفصول التالية .

تمارين على الفصل الثانى

فى التمارين من ١ إلى ٥ التالية : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الخمس المعطاة لكل :

١ — طول الفئة ٨ — ١٢ هو :

(أ) ٤

(ب) ٥

(ج) ٦

(د) ١٠

(هـ) ١١

٢ — الحدود الحقيقية للفئة ٨ — ١٢ هى :

(أ) ٧,٥ — ١١,٥

(ب) ٧,٥ — ١٢,٥

(ج) ٨,٠ — ١٢,٠

(د) ٨,٥ — ١١,٥

(هـ) ٨,٥ — ١٢,٥

٣ — منتصف الفئة ٢١ — ٢٧ هى :

(أ) ٢١,٠

(ب) ٢١,٥

(ج) ٢٤,٠

(د) ٢٥,٠

(هـ) ٢٧,٠

٤ — توزيع تكرارى يتكون من ٦ فئات ، إذا كانت الحدود الظاهرية للفئة الدنيا هى ١٥ - ١٩ ، فإن الحدود الظاهرية للفئة العليا هى :

(أ) ١٥,٠ — ١٩,٠
(ب) ٣٥,٠ — ٣٩,٠
(جـ) ٩٠,٠ — ١١٤,٠
(د) ٤٠,٠ — ٤٤,٠
(هـ) ٩٥,٠ — ٩٩,٠

٥ — إذا وضعنا علامات تناظر الدرجات ٩ ، ٨ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ١٦ ، ٩ ، ١٢ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ١٥ ، في جدول توزيع تسكرارى ، فإن عدد الدرجات التي تقع في الفئة التي طولها ٤ ، ومنتصفها ٥و١٢ هو :

(أ) ٣
(ب) ٥
(جـ) ٦
(د) ٧
(هـ) ٨

٦ — إذا كانت نسبة ذكاء مجموعة تتكون من ١٠٠ طالب هي :

١٠٠	١٠٧	٨٥	١١٩	٩٣	١١١	٨٩	٩٠	١١٣	٩٩
٩٢	١٠٨	١٠٣	٩٨	٨٦	٧٣	١٠٢	١٠٠	٧٤	١٠٣
١١٢	٩٧	١١٥	٧٢	١٠٤	١١٧	٩٨	١٢٧	٨٩	١٠٧
١٢٦	٩٩	٧١	٩٩	٨٥	٩٥	١٢١	٨٤	٩٦	٨٣
١٠١	٦٦	١٢٣	١٠٧	٩٧	١٠١	٨٦	١٠٦	١١٤	١٠٠
٨٥	١١٠	٧١	١٠٣	١١٨	١١١	١٠٣	٨٣	٩٩	١٢٦
١٠٢	٩٨	٩٦	١٣٠	٨٨	١١٤	١٠٠	١٠٠	٩٢	١٠٠
٩٦	٨١	١٢٢	٩٢	٨٠	٨١	١١٩	٨١	١٠٢	٩٣

١١٨	٩٢	٩٨	٨٨	١١٢	٩٥	١١٠	١٣٦	٩٧	٩٨
١٠٦	١١٢	٧٦	١١٣	٧٧	١٠٠	٩٧	١٠٥	١٠١	٨٩

(ا) كون جدول توزيع تكرارى لنسب الذكاء بحيث يكون طول الفئة ٥ والفئة السفلى ٦٥ — ٦٩ .

(ب) كون جدول توزيع تكرارى لنسب الذكاء بحيث يكون طول الفئه ١٠ ، والفئة السفلى ٦٠ — ٦٩ .

(ﺟ) أى التوزيعين يصف التوزيع العام لنسب الذكاء بدرجة أكثر فاعلية ؟ ولماذا ؟

٧ — ارسم المدرج التكرارى والمضلع التكرارى والمنحنى التكرارى للتوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى (ب) من السؤال السابق .

٨ — كون جدول توزيع تكرارى متجمع صاعد وتوزيع متجمع نسبى للتوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى (ا) من السؤال رقم (١) .

٩ — ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والمنحنى التكرارى المتجمع النسبى للتوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى السؤال رقم ٣ . وأوجد من الرسم عدد الطلاب الذين تقل نسب ذكائهم عن ١٥٠ .

١٠ - حصل ٤٠ طالبا فى إحدى الكليات على الدرجات الآتية فى اختبار فى اللغة الإنجليزية .

٤٢	٨٨	٣٧	٧٥	٩٨	٩٣	٧٣	٦٢
٩٦	٨٠	٥٢	٧٦	٦٦	٥٤	٧٣	٦٩
٨٣	٦٢	٥٣	٧٩	٦٩	٥٦	٨٥	٧٥
٥٢	٦٥	٤٩	٨٠	٦٧	٥٩	٨٨	٨٠
٤٤	٧١	٧٢	٨٧	٩١	٨٢	٨٩	٧٩

(ا) كون جدول توزيع تكرارى لهذه الدرجات مستخدما فئة طولها ٥ .

(ب) عين الحدود الحقيقية ومنتصف كل فئة فى الجدول الذى أعددته .

(ﺟ) ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل للتوزيع السابق . وأوجد من الرسم عدد الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن ٧٥ .

١١ — ماعدد الفئات التى تقترحها ، والحدود الحقيقية لهذه الفئات ومنتصفاتها عند إعداد جداول توزيعات تكرارية للبيانات الآتية :

(ا) درجات الخطأ التى تتراوح بين ٢٤ ، ٨٧ والتى حسبت لعينة من الفئران أثناء تجربة الجرى فى متاهة .

(ب) نسب ذكاء تتراوح بين ٩٦ ، ١٢٧ لمجموعة من أطفال المدارس .

(ﺟ) درجات اختبار استعداد دراسى تتراوح بين ٢٢٧ ، ٨٩٦ حصلت عليها مجموعة من طلاب الجامعات .

١١ — حصل ٤٠ طالبا فى إحدى الكليات على الدرجات الآتية فى اختبارين أحدهما فى الرياضيات والآخر فى اللغة الإنجليزية :

اللغة الإنجليزية				الرياضيات			
٧٨	٧٤	٣٨	٤٩	٥٢	٨٦	٩٢	٢٢
٧٢	٧٦	٨٨	٨٤	٤٠	٧٥	٦٢	٣١
٤٢	٥٥	٦٩	٨٦	٤٢	٣٧	٩٤	٥٥
٧٢	٨٨	٩١	٣١	٧٦	٤١	٨٨	٧٦
٧٨	٧٢	٦٦	٦٥	٢٩	٧٦	٨٨	٤٨
٨٤	٩٢	٩٩	٥٦	٧٢	٦٤	٧٢	٤٩
٦٧	٧٢	٨٦	٦٣	٥٩	٦٦	٦٥	٥٠
٧٧	٢٤	٥٩	٨١	٤٢	٥٨	٦٢	٨٥
٧٢	٨٨	٨٦	٦١	٥٤	٦٦	٢٥	٧
٨٩	٦٢	٨٤	٥١	٦٢	٧٦	٨٨	٣٨

(ا) كون جدول توزيع تكرارى لكل من درجات الاختبارين مستخدما فئة طولها ١٠ .

(ب) مثل كل من التوزيعين بمضلع تكرارى فى شكل واحد (استخدم التكرار النسبي) .

(ﺟ) قارن بين التوزيعين مقارنة سريعة من حيث النزعة المركزية والتشتت .

١٣ — فى كل من التوزيعات التكرارية الآتية حيث رمزنا للدرجات بالرمز س وللتكرار بالرمز ت ، بين ما إذا كان أى منها :

(ا) قريبا من الاعتدالية .

(ب) ملتويا التواء موجبا .

(ﺟ) ملتويا التواء سالبا .

(د) ثنائى المنوال ومتماثل تقريبا .

(ﻫ) ثنائى المنوال ، وملتويا التواء موجبا .

(و) ثنائى المنوال ، وملتويا التواء سالبا .

(ل) مستطيلا تقريبا .

(م) على شكل حرف U .

(ن) على شكل حرف J .

(١)		(٢)		(٣)		(٤)		(٥)			
س	ت	س	ت	س	ت	س	ت	س	ت	س	ت
١٠	صفر	٤٥ — ٤٩	٢	٢٧ — ٢٩	٢	٥٥ — ٥٩	صفر	١٠	٣	٨٠ — ٨٩	٥
٩	صفر	٤٠ — ٤٤	٣	٢٤ — ٢٦	٨	٥٠ — ٥٤	١	٩	٤	٧٠ — ٧٩	٤
٨	١	٣٥ — ٣٩	١	٢١ — ٢٣	١٧	٤٥ — ٤٩	٣	٨	١٠	٦٠ — ٦٩	٤
٧	صفر	٣٠ — ٣٤	٤	١٨ — ٢٠	٢٤	٤٠ — ٤٤	٣	٧	٦	٥٠ — ٥٩	٣
٦	١	٢٥ — ٢٩	٢	١٥ — ١٧	١٦	٣٥ — ٣٩	٨	٦	٢	٤٠ — ٤٩	٥
٥	٣	٢٠ — ٢٤	٥	١٢ — ١٤	٦	٣٠ — ٣٩	١٣	٥	٥	٣٠ — ٣٩	٦
٤	صفر	١٥ — ١٩	٢	٩ — ١١	٨	٢٥ — ٢٩	١٩	٤	١١	٢٠ — ٢٩	٥
٣	٢	١٠ — ١٤	٩	٦ — ٨	٢	٢٠ — ٢٤	١٢	٣	٦	١٠ — ١٩	٤
٢	٦	٥ — ٩	٣	٣ — ٥	٣	١٥ — ١٩	١٠	٢	٢	صفر — ٩	٤
١	١٤	صفر — ٤	صفر	صفر — ٢	١	١٠ — ١٤	٤	١	١		
صفر	٢١					٥ — ٩	١	صفر	صفر		
						صفر — ٤	صفر				

١٤ — إذا طبق اختبار تحصيل فى الحساب مصمم لتلاميذ الصف الثانى على تلاميذ الصف السادس ، ما هو توقعك لشكل توزيع درجات هـذا الاختبار ؟ ولماذا ؟

١٥ — صف التوزيع الذى تتوقع الحصول عليه إذا حاولت تمثيل كل ما يأتى بيانيا :

(أ) أطوال الرجال فى المجتمع المصرى .

(ب) أطوال النساء فى المجتمع المصرى .

(ح) أطوال الرجال والنساء معاً فى المجتمع المصرى فى شكل واحد .

الفصل الثالث

خصائص التوزيعات التكرارية

أولا : مقاييس النزعة المركزية

مفهوم النزعة المركزية .

قواعد رمز التجميع

المتوسط الحسابي .

الوسيط .

المنوال .

الوسط الهندسي .

اختيار مقياس النزعة المركزية المناسبة

عند تحليل البيانات .

مقدمـة :

عرضنا فى الفصل الثانى طرق تنظيم وتبويب البيانات وكيفيه تمثيلها بيانيا . وقد تبين لنا فائدة هذه الطرق فى توضيح نمط توزيع الظاهرة موضع البحث ، وإعطاء فكرة سريعة عن التوزيعات ، وتوضيح بعض أوجه الشبه والاختلاف بينها . إلا أن هذه الطريقة تعتمد على الوصف اللفظى للتوزيعات التكرارية . وبالطبع يصعب تحليل البيانات تحليلا إحصائيا دقيقا باستخدام مثل هـــذا الوصف اللفظى .

ويزداد الأمر تعقيداً إذا كنا بصدد مقارنة توزيعين مختلفين أو توزيعات مختلفة . كما أننا نحتاج فى كثير من الأحيان إلى إجابة أسئلة تتصل بمتوسط توزيع الظاهرة أو مدى شيوعها فى عينة ممثلة للمجتمع الأصل . كل هذا يتطلب استخدام مقاييس إحصائية رياضية أكثر دقة لتحديد ومقارنة خصائص التوزيعات المختلفة . ومن بين هذه المقاييس ما يطلق عليه مقاييس النزعة المركزية .

Measures of Central Tendency

ومقاييس التشتت	Measures of Variability
ومقاييس الالتواء	Measures of Skewness
ومقاييس التفرطح	Measures of Kurtosis

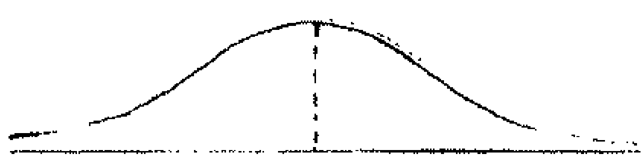
وسنفرد هـذا الفصل لمقاييس النزعة المركزية ، والفصل التالى للمقاييس الأخرى .

النزعة المركزية :

إذا بحثنا ظاهرة من الظواهر مثل ظاهرة طول قامة سكان إحدى المدن فى عمر معين ، واخترنا مجموعة كبيرة من سكان هذه المدينة من العمر المحدد كعينة ممثلة

لهذه الظاهرة لوجدنا أن العدد الأكبر من هذه العينة يكون طوله متوسطا ، وأن عدداً قليلا نسبيا يكون من ذوى القامة القصيرة ، وعدداً قليلا نسبيا من ذوى القامة الفارعة . أى أن معظم التكرارات تكون عادة لمتوسطى الطول ، ويقل التكرار تدريجياً كلما بعدنا عن المتوسط من الناحيتين ، ولذا فإن المنحنى التكرارى لمثل هذه الظاهرة يكون عادة له قمة واحدة ، ثم ينساب تدريجيا إلى أسفل على جانبى هذه القمة بشكل يكاد يكون منتظما . ومن هنا جاءت التسمية « النزعة المركزية » أى الميل إلى التجمع بالقرب من مركز التوزيع .

وإذا بحثنا توزيعات كثير من الظواهر كالأوزان والأعمار ونسب الذكاء وغيرها فى مجتمع معين لوجدنا أنها تمثل بمنحنيات على نفس هـــذه الصورة . والمفروض نظريا أن المنحنى الذى يجب أن ينتج من هذه الظواهر هو منحنى ذو شكل هندسى خاص يعرف باسم المنحنى الاعتدالى Normal Curve ، وهو كما يظهر فى شكل رقم (١٠) يشبه الجرس ، وله نهاية عظمى فى منتصفه ، كما أنه متماثل حول الخط الرأسى المار بنقطة النهاية العظمى .



شكل رقم (١٠)

منحنى اعتدالى

وهذا المنحنى هو فى الواقع منحنى نظرى مثالى ، كما أن التوزيعات التى تنتج المنحنيات الاعتدالية هى توزيعات نظرية مثالية وتسمى بالتوزيعات الاعتدالية Normal Distributions .

وهى تعتبر العمود الفقرى للنظريات الإحصائية ، إذ نستعين بها فى دراسة معظم مانشاهده من ظواهر . ولذا سنفرد لها جزءاً كبيرا من الفصول التالية .

غير أنه من الناحية العملية لانحصل من دراسة الظواهر الطبيعية والنفسية على توزيعات اعتدالية تماما . وإنما نحصل على توزيعات قريبة منها . ذلك لأن هذه الظواهر ولو أنها تخضع فى تغيرها لنظام معين ، إلا أنها تخضع أيضا لمؤثرات عرضية تؤثر فى هذا النظام وتحجبه عن الظهور على حقيقته . ولو جردت التوزيعات من هذه المؤثرات العرضية لكانت أقرب إلى التوزيعات الاعتدالية .

ومن ناحية أخرى قد يكون الاختلاف الذى نشاهده فى التوزيعات عن التوزيعات الاعتداليه راجعا أحياناً إلى عوامل أخرى منها مثلا أن تكون العينة التى اختيرت لتمثيل الظاهرة هى عينة غير ممثلة تماما للظاهرة ، ومنها عدم مراعاة الدقة الواجبة فى قياسها . ولذا نجد أن بعض التوزيعات تبتعد قليلا أو كثيراً عن الاعتدالية .

وقد عرضنا فى الفصل الثانى لأنواع هذه التوزيعات ، ومما هو جدير بالذكر أننا سنهتم فى هذا الكتاب بدراسة التوزيعات الاعتدالية والتوزيعات التى تنتج منحنيات ذات طابع خاص حتى يتمكن الباحث من تحليل بيانات بحثه مهما اختلف شكل التوزيع .

مقاييس النزعة المركزية :

يتضح مما سبق أنه فى كثير من التوزيعات يتراكم عدد كبير من قيم المتغير حول قيمة معينة ، ويقل هذا التراكم بالتدريج كلما ابتعد المتغير عن هذه القيمة . هذا التراكم أو التركز حول قيمة معينة يسمى بالنزعة المركزية للتوزيع . وتسمى القيمة التى يحدث حولها التراكم بمقياس النزعة المركزية . ومقاييس النزعة المركزية لها أهمية كبيرة فى وصف التوزيعات ومقارنتها. وعلى الرغم من وجود عدد من مقاييس النزعة المركزية إلا أننا سنهتم فى هذا الفصل بالمقاييس الآتية :

١ — المتوسط الحسابى Arithmetic Mean

٢ — الوسيط Median

٣ — المنوال Mode

٤ — المتوسط الهندسى Geometric Mean

ويتوقف اختيار الباحث لأى من هذه المقاييس لوصف توزيع ما على طبيعة البيانات التى يهتم بتحليلها . كما يتوقف على الهدف الذى ينشده من التحليل ، إذ أن كلا من هذه المقاييس يستخدم لأغراض معينة بدرجة أفضل من غيره من المقاييس . وسوف نعرض فى الجزء الباقى من هذا الفصل لمزايا وعيوب كل من هذه المقاييس ، وكيفية حساب قيمها . كما سنعرض للأسس التى يتم على ضوئها اختيار الباحث لمقياس النزعة المركزية المناسب .

وقد وضع يول Yule شروطا يرى أن توفرها فى مقاييس النزعة المركزية أمر مرغوب فيه إذا كان لهذه المقاييس أن تستخدم فى تمثيل التوزيعات المختلفة . وهذه الشروط هى أنه :

١ — يحسن أن تكون قيمة مقياس النزعة المركزية قيمة موضوعية محددة وليست مجرد تقدير ذاتى من الباحث . أى يحسن أن تكون طريقة رياضية لا يختلف فيها اثنان . كما يحسن أن تكون هذه الطريقة سلسلة غير معقده .

٢ — يحسن استخدام جميع قيم المتغير عند حساب قيمة مقياس النزعة المركزية وإلا اعتبرت هذه القيمة غير ممثلة حقيقة لمميزات التوزيع بأكمله .

٣ — يحسن أن تكون قيمة مقياس النزعة المركزية من القيم التى لا تتأثر بتذبذب العينات أو يكون تأثرها بذلك أقل ما يمكن . فإذا كان لدينا عدد من العينات المسحوبة من مجتمع واحد ، فمن النادر أن تتساوى متوسطات هذه العينات مهما كانت صورة هذه المتوسطات . ولكن قد يحدث أن تكون قيم

أحد مقاييس النزعة المركزية (إحدى صور المتوسطات) كالمتوسط الحسابي مثلا قريبة من بعضها . بمعنى أن تكون قيم المتوسطات الحسابية لجميع العينات متقاربة ، أما قيم المقاييس الأخرى مثل الوسيط أو المنوال مثلا فلا تكون قيمها متقاربة بنفس الدرجة . فهنا يفضل المتوسط الحسابي على مقاييس النزعة المركزية الأخرى لأنه بذلك يكون أقل تأثراً بتذبذب العينات . ويقال حينئذ أن المتوسط الحسابي أكثر ثباتا من غيره من المتوسطات .

٤ — يحسن أن تكون قيمة مقياس النزعة المركزية صالحة للمعالجة الرياضية. ويعتبر هذا الشرط فى واقع الأمر أهم الشروط السابقة .

ونظراً لأن الطرق التى سنعرض لها فى حساب هذه المقاييس تعتمد على عمليات رياضية معينة تتطلب رموزا خاصة من أهمها رمز التجميع (مجـ أو $\sum$) فإننا سنبدأ بتعريف هذا الرمز وقواعد استخدامه .

الرمز (مجـ) :

بفرض أن لدينا مجموعة من المتغيرات ، أو القياسات ، أو الملاحظات $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . ، $س_ن$ أو $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ ، . . . ، $ص_ن$ حيث ن ترمز إلى عدد المتغيرات . فالرمزان س ، ص يستخدمان عادة للإشارة إلى المتغيرات ، ولكن يمكن استخدام أى رموز أخرى . فالمتغير س مثلا ربما يكون درجات اختبار ما أو عدد المحاولات فى تجربة للتعلم وما إلى ذلك ، فالرمز $س_١$ يرمز إلى درجات التلميذ الأول فى الاختبار ، والرمز $س_٢$ يرمز إلى درجات التلميذ الثانى . وهكذا حتى نصل إلى الرمز $س_ك$ وهو يرمز إلى درجات التلميذ رقم ك .

فاذا كانت ك = ٥ وكانت درجات التلاميذ هى :

١٠ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢١ ، ٣٢ فإن $س_١$ = ١٠

$س_٢$ = ١٢ ، $س_٣$ = ١٩ ، $س_٤$ = ٢١ ، $س_٥$ = ٣٢

وعادة نرمز لأى قيمة للمتغير س بالرمز $س_ر$ حيث ر تأخذ القيم ١ إلى ن .

فإذا أردنا جمع قيم المتغير س أى :ـ

$$س_١ + س_٢ + \cdots + س_ن$$

فإنه يمكن التعبير عن هذا المجموع بطريقة مختصرة ومناسبة باستخدام رمز التجميع مجـ أو $\sum$ وهذا الرمز هو اختصار لكلمة « مجموع » أى أخذنا الحرفين الأول والثانى من الكلمة . وأحيانا نستخدم الرمز $\sum$ (ويقرأ سيجما) وهو أحد حروف اللغة اليونانية ليعبر أيضا عن المجموع .

وبذلك يمكن التعبير عن مجموع قيم المتغير كالآتى :

$$\underset{ر = ١}{\overset{ن}{مجـ}} \ س_ر$$

$$\text{أى أن}\quad \underset{ر = ١}{\overset{ن}{مجـ}} \ س_ر = س_١ + س_٢ + \cdots + \cdots + س_ن \quad \cdots (١)$$

والرمز الموضوع تحت وفوق علامة مجـ يشير إلى حدود التجميع، أى نجمع قيم المتغير س من ١ إلى ن

فمثلا $\underset{ر = ١}{\overset{٥}{مجـ}} \ س_ر$ تعنى مجموع القيم الخمس الأولى للمتغير س .

$\sum_{ن=٦}^{١٠} س_ن$ تعنى مجموع القيم الخمس التالية ، أى التى تبدأ من ن = ٦ إلى ن = ١٠

فإذا أردنا أن نعبر عن مجموع القيم ١٠ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢١ ، ٣٢ باستخدام الرمز مجـ فإننا بدلا من كتابة المجموع كالآتى :

١٠ + ١٢ + ١٩ + ٢١ + ٣٢ = ٩٤

يمكن كتابته : $\sum_{ن=١}^{٥} س_ن$ = ٩٤ حيث س تعبر عن المتغير المراد جمع قيمه الخمس .

قواعد رمز التجميع :

هناك قواعد هامة تفيد عند استخدام رمز التجميع نلخصها فيما يلى بالاستعانة بمجموعة من الأمثلة .

١ — افترض أن درجات ثمانية طلاب فى اختبارين س ، ص كالآتى :

الطالب	درجة الاختبار (س)	درجة الاختبار (ص)
١	٧	٨
٢	٩	٦
٣	٦	٤
٤	١٠	١٠
٥	٦	٥
٦	٥	١٠
٧	٣	٩
٨	٤	٨

يمكن التعبير عن مجموع درجات الاختبار س كالآتى .

$$\underset{ن = ١}{\overset{٨}{مجـ}} س = ٥٠$$

ومجموع درجات الاختبار ص كالآتى :

$$\underset{ن = ١}{\overset{٨}{مجـ}} ص = ٦٠$$

١ ــ القاعدة الأولى هى أن :

مجـ (س + ص) = مجـ س + مجـ ص ... (٢)

ويمكننا التحقق من هذه القاعدة باستخدام درجات الاختبارين س ، ص المذكورة كالآتى :

مجـ س + مجـ ص = ٥٠ + ٦٠ = ١١٠

، مجـ (س + ص) = (٧ + ٨) + (٩ + ٦) + ... + (٤ + ٨) = ١١٠

أى أن القاعدة صحيحة لأننا بالطبع نستطيع الحصول على نفس المجموع بغض النظر عن الترتيب الذى تم به عملية جمع الدرجات .

وبالمثل مجـ (س ــ ص) = مجـ س ــ مجـ ص ...... (٣)

٢ ــ القاعدة الثانية هى أن :

مجـ س ص ≠ مجـ س × مجـ ص .... (٤)

أى أن جمع حاصل ضرب قيم س ، ص المتناظرة لايساوى حاصل ضرب مجموع قيم س فى مجموع قيم ص .

ويمكننا التحقق من هذه القاعدة باستخدام نفس مجموعة الدرجات السابقة كالآتى :

$$\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص} = ٥٠ \times ٦٠ = ٣٠٠٠$$

$$\text{مجـ س ص} = (٧ \times ٨) + (٩ \times ٦) + \cdots + (٤ \times ٨) = ٣٧٢$$

وواضح بالطبع أن الناتجين مختلفان

٣ — القاعدة الثالثة هى أن .

$$\text{مجـ س}^٢ \neq (\text{مجـ س})^٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥)$$

أى أن مجموع مربعات قيم س لايساوى مربع مجموع نفس القيم

٤ — القاعدة الرابعة هى أنه إذا كانت ك أى مقدار ثابت فإن .

$$\text{مجـ ك} = \text{ن ك} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

فإذا فرضنا أن ك = ٢ مكررة ٨ مرات فإن .

$$\text{مجـ ك} = ٣ \times ٨ = ٢٤$$

٥ — القاعدة الخامسة هى أنه إذا كانت ك أى مقدار ثابت فإن .

$$\text{مجـ (س + ك)} = \text{مجـ س} + \text{مجـ ك}$$

= (مجـ س) + ن ك حيث ن ترمز لعدد القيم . . . (٧)

ولتوضيح ذلك افترض أن ك = ٥ و أن قيم س كالآتى .

س	ك	س + ك
٦	٥	١١
٨	٥	١٣
٥	٥	١٠
٩	٥	١٤
٥	٥	١٠
٢	٥	٧
٣	٥	٨

مجـ س = ٣٨

مجـ ك = ن ك = ٧ × ٥ = ٣٥

مجـ (س + ك) = ٧٣

(مجـ س) + ن ك = ٣٨ + ٣٥ = ٧٣

وبالمثل مجـ (س — ك) = (مجـ س) — ن ك .... (٨)

المتوسط الحسابي : Mean

يعتبر المتوسط الحسابي من أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما لوصف القيمة المتوسطة لتوزيع ما . والمتوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو خارج قسمة المجموع الجبرى لهذه القيم على عدد القيم ، أو هو تلك القيمة التى لو اتخذتها كل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية .

ويمكن التعبير عن المتوسط الحسابي باستخدام رمز التجميع كالآتى :ـ

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \quad .... \quad (٩)$$

حيث $\bar{س}$ (وتقرأ س بار) = المتوسط الحسابى للعينة ،

، مجـ س = مجموع قيم س

، ن = عدد القيم

فمثلا متوسط الدرجات ٧ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٣

$$هو\ \bar{س} = \frac{٤٠}{٨} = ٥$$

ويلاحظ أن مجرد جمع الدرجات لا يعد كافيا لتحديد متوسط هذه الدرجات ، إذ ربما يكون لدينا درجتان فقط ولكن لهما نفس المجموع ٤٠ ، ولذلك يلزم قسمة المجموع على عدد الدرجات ن حتى نستطيع مقارنة متوسط مجموعتى الدرجات .

ويمكن الحصول على المتوسط الحسابى للمجتمع الأصلى بنفس طريقة حساب المتوسط الحسابى للعينة .

حساب المتوسط الحسابى للبيانات المجمعة فى توزيعات تكرارية :

إذا كانت قيم المتغير س مكررة عددا من المرات فإننا نستطيع حساب المتوسط الحسابى بأن نضرب كل قيمة فى تكرارها ، ثم نجمع نواتج حواصل الضرب ، ونقسم الناتج على التكرار الكلى للقيم .

فإذا نظرنا إلى القيم :

١١ ، ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ١٣ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٣ ،
١٤ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٧ ، ١٨ نجد أن
القيمة ١١ تكررت مرتين ، والقيمة ١٢ تكررت ثلاث مرات ، وهكذا .
ولذا يمكن وضع هذه القيم فى جدول كالآتى :ـ

الدرجة (س)	التكرار (ت)	الدرجة (س) × التكرار (ت)
١٨	١	١٨
١٧	٢	٣٤
١٦	٢	٣٢
١٥	٣	٤٥
١٤	٢	٢٨
١٣	٥	٦٥
١٢	٣	٣٦
١١	٢	٢٢
المجموع	٢٠	٢٨٠

جدول رقم (١٠)

طريقة حساب المتوسط لمجموعة من البيانات المبوبة

ويمكن اعتبار الجدول السابق جدول توزيع تكرارى طول فئته = ١ .

فإذا أردنا إيجاد المتوسط الحسابى لهذا التوزيع فإننا نوجد حواصل ضرب الدرجة × التكرار فيكون الناتج ٢٨٠ ، ثم نقسم هذا الناتج على التكرار الكلى وهو ٢٠ فيكون المتوسط الحسابى $\frac{٢٨٠}{٢٠} = ١٤$.

وبوجه عام ، إذا كانت القيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... $س_ن$ مكررة $ت_١$ ، $ت_٢$ ، $ت_٣$ ، ... $ت_ن$ على الترتيب حيث ن تدل على عدد القيم المختلفة للتمييز $س_ن$ ، فإن المتوسط الحسابى :

$$\bar{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ت_٣ س_٣ + \cdots + ت_ن س_ن}{ن}$$

$$= \frac{\underset{ن=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} (ت_ن \times س_ن)}{ن} \quad .... (١٠)$$

وبالنظر إلى هذه الصورة الرياضية نلاحظ أننا جمعنا ن من الحدود وهو عدد القيم المختلفة للتغير س .

ويمكن أن يمتد استخدام هذه الطريقة بحيث تشمل البيانات المجمعة فى توزيعات تكرارية مهما كان طول الفئة .

وتستخدم منتصفات الفئات لتمثل جميع القيم الواقعة فى الفئة . وهنا نفترض أن المتغير س يأخذ قيما تناظر منتصفات الفئات ، وتعطى لها أوزانا تناظر التكرارات . ثم نضرب منتصفات الفئات × التكرارات ، ونقسم مجموع حواصل الضرب على التكرار الكلى فنحصل على المتوسط الحسابى . وباختصار يمكن الحصول على المتوسط الحسابى للبيانات المجمعة فى توزيعات تكرارية كالآتى : ـ

١ — توجد منتصف (مركز) كل فئة .

٢ — نضرب منتصف كل فئة × تكرارها .

٣ — نجمع حواصل ضرب منتصف كل فئة × التكرار .

٤ — نقسم الناتج على التكرار الكلى .

ولتوضيح ذلك يمكن أن نطبق هذه الخطوات على المثال الآتى لنوجد المتوسط الحسابى :

١ الفئات	٢ مراكز الفئات سن	٣ التكرار تن	٤ التكرار × مراكز الفئات تن × سن
صفر - ٤	٢	صفر	صفر
٥ - ٩	٧	٢	١٤
١٠ - ١٤	١٢	١١	١٣٢
١٥ - ١٩	١٧	٢٦	٤٤٢
٢٠ - ٢٤	٢٢	١٧	٣٧٤
٢٥ - ٢٩	٢٧	٨	٢١٦
٣٠ - ٣٤	٣٢	٦	١٩٢
٣٥ - ٣٩	٣٧	٣	١١١
٤٠ - ٤٤	٤٢	٢	٨٤
٤٥ - ٤٩	٤٧	١	٤٧
المجموع الكلى	ن =	٧٦	١٦١٢

جدول رقم (١١)

طريقة حساب المتوسط الحسابى للبيانات المجمعة فى فئات

$$ص = \frac{\sum_{ن=1}^{ن} (ت_ن \times س_ن)}{ن} = \frac{١٦١٢}{٧٦} = ٢١,٢١$$

الانحرافات عن المتوسط :

يتميز المتوسط الحسابي بعدد من الخصائص التي تفيد في تبسيط طرق حساب كثير من المقاييس الإحصائية ، ومن بين هذه الخصائص أن المجموع الجبري لانحرافات قيم المتغير في توزيع ما عن المتوسط الحسابي لهذه القيم يساوي صفر . بمعنى أننا لو طرحنا كل قيمة من قيم التوزيع من المتوسط الحسابي لهذه القيم يكون الناتج صفرا .

ويمكن التعبير عن هذه الخاصية باستخدام رمز التجميع كالآتي : ـ

$$\sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر}$$

ويمكن توضيح هذه الخاصية بالمثال الآتي :

$\text{س}_{\text{ن}}$	$\bar{\text{س}}$	$\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}$
٣	٥	٣ − ٥ = − ٢
٦	٥	٦ − ٥ = ١
٥	٥	٥ − ٥ = صفر
١	٥	١ − ٥ = − ٤
١٠	٥	١٠ − ٥ = ٥

$$\text{مج}\ \text{س}_{\text{ن}} = ٢٥ \qquad \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر}$$

ن = ٥

$\bar{\text{س}} = ٥$

من المثال السابق يتضح أن مجموع الانحرافات عن المتوسط = صفر . وتنطبق هذه القاعدة فى الحقيقة على جميع التوزيعات التكرارية .

ولذا يمكن تشبيه المتوسط الحسابى بنقطة اتزان التوزيع أو مركز ثقله . فنزعة الدرجات إلى الانحراف فى إحدى جهتى المتوسط تتعادل تماماً مع نزعتها إلى الانحراف فى الجهة الأخرى .

ويجب أن نلاحظ أنه بالرغم من أن مجموع انحرافات جميع الدرجات عن متوسطها يكون دائماً صفر ، إلا أن مجموع مربعات هذه الانحرافات عن المتوسط لا يساوى صفر .

$$\text{أى أن } \sum_{ن=١}^{ن} (س_ن - \overline{س})^٢ \neq \text{صفر} \quad \dots (١١)$$

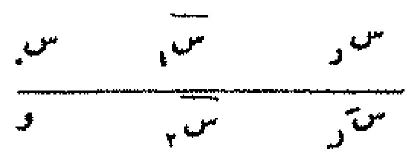
وفى الحقيقة أن مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير عن المتوسط الحسابى هو نهاية صغرى . أى أنه يكون أصغر من مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير عن أى قيمة أخرى . وهذا يكون صحيحا دائماً (إذا لم تكن جميع الدرجات متساوية) . وبهذا المعنى يعتبر المتوسط مقياساً للنزعة المركزية . ولهذه الخاصية أهمية كبيرة فى حساب كثير من المقاييس الإحصائية التى سنعرض لها فيما بعد .

استخدام طريقة الانحرافات فى حساب المتوسط الحسابى :

إذا اعتبرنا أن قيم المتغير تكون ممثلة بالإحداثيات السينية لنقطة متحركة على المحور السينى ، وعلى اعتبار أن المتوسط الحسابى ممثل بالإحداثى $\overline{س}_١$ بالنسبة إلى نقطة الأصل ، $\overline{س}_٢$ بالنسبة إلى نقطة تبعد بمقدار $س_٠$ عن نقطة الأصل ، فإن :

$$\overline{س}_١ = س_٠ + \overline{س}_٢$$

وإذا افترضنا أن س ر ترمز إلى قيمة المتغير بالنسبة إلى نقطة الأصل ، سَ ر إلى قيمة المتغير بالنسبة إلى النقطة التي تبعد بمقدار س. عن نقطة الأصل فإن :



$$س'_ر = س_٠ + س_ر$$

$$، \bar{س}_٢ = \frac{مجـ س'_ر}{ن}$$

وبالتعويض فى معادلة $\bar{س}_١$ السابقة نجد أن :

$$\bar{س}_١ = س_٠ + \frac{مجـ س'_ر}{ن} \quad .... \quad (١٢)$$

ويمكن استخدام هذا القانون الذى يعتمد على فكرة نقل نقطة الأصل فى حساب المتوسط الحسابى لمجموعة من القيم إذا كانت أعداداً كبيرة . إذ يمكن أن نختار قيمة من بين هذه القيم أو من غيرها ونعتبرها نقطة أصل ، ونحسب انحراف كل قيمة عن هذه النقطة ، وبذلك تيسر العمليات الحسابية .

فمثلا لإيجاد المتوسط الحسابى للأعداد ٣٠٤ ، ٢٩٥ ، ٢٥٠ ، ٢٣٢ ، ١٨٠ ، يمكن أن نختار العدد ٢٥٠ كنقطة أصل . فيكون انحرافات الأعداد الخمسة عن هذه النقطة هى ٥٤ ، ٤٥ ، صفر ، — ١٨ ، — ٧٠ ويكون المتوسط الحسابى :

$$\bar{س} = ٢٥٠ + \frac{٥٤ + ٤٥ + صفر - ١٨ - ٧٠}{٥}$$

$$= ٢٥٠ + \frac{١١}{٥}$$

= ٢٥٠ + ٢,٢

= ٢٥٢,٢

ونحصل على نفس النتيجة مهما كان العدد الذى نختاره كنقطة أصل سواء كان من بين مجموعة القيم المطلوب إيجاد المتوسط الحسابى لها أو من غيرها .

أما فى حالة البيانات المجمعة فى توزيع تكرارى فإننا نختار عادة نقطة الأصل الجديدة من بين مراكز فئات التوزيع .

ويمكن التوصل بطريقة مماثلة إلى القانون الذى يمكن استخدامه فى إيجاد المتوسط الحسابى لمجموعة من البيانات المجمعة فى توزيع تكرارى بطريقة مختصرة وهو :

$$\overline{س} = س_. + \frac{مجـ(ت \times ح)}{ن} \times ف \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٢)$$

أى أن المتوسط الحسابى للمتغير الأصلى = المتوسط الفرضى + المتوسط الحسابى للمتغير الجديد مضروبا فى طول الفئة .

ويحسن اختيار المتوسط الفرضى بحيث يناظر مركز الفئة القريبة من وسط التوزيع والتى يكون تكرارها كبيراً .

كما يحسن أن يكون هذا المركز هو مركز الفئة التى نحكم بالبداهة أنه قريب من المتوسط الحسابى الحقيقى للتوزيع .

ولتوضيح كيفية تطبيق هـــذه الصورة نوجد المتوسط الحسابى للبيانات الموضحة بجدول رقم (١٢) وهى تمثل التوزيع التكرارى لدرجات ٧٦ طالباً فى أحد الاختبارات :

١ الفئات	٢ مراكز الفئات	٣ التكرار (ت)	انحرافات الفئات (ح)	ت × ح
صفر – ٤	٢	صفر	– ٣	صفر
٥ – ٩	٧	٢	– ٢	– ٤
١٠ – ١٤	١٢	١١	– ١	١١
١٥ – ١٩	١٧	٣٦	صفر	صفر
٢٠ – ٢٤	٢٢	١٧	+ ١	+ ١٧
٢٥ – ٢٩	٢٧	٨	+ ٢	+ ١٦
٣٠ – ٣٤	٣٢	٦	+ ٣	+ ١٨
٣٥ – ٣٩	٣٧	٣	+ ٤	+ ١٢
٤٠ – ٤٤	٤٢	٢	+ ٥	+ ١٠
٤٥ – ٤٩	٤٧	١	+ ٦	+ ٦
المجموع	ن =	٧٦		٦٤

جدول رقم (١٢)

توزيع تكرارى لدرجات ٧٦ طالبا

فى احد الاختبارات

$$\bar{س} = س_{٠} + \frac{مج(ت \times ح)}{ن} \times ف$$

$$= \left(\frac{١٥ + ١٩}{٢}\right) + \frac{٦٤}{٧٦} \times ٥$$

$$= ١٧ + ٤,٢١$$

$= ٢١,٢١$ وهى نفس النتيجة السابقة .

ويلاحظ أننا اخترنا مركز الفئة (١٥ — ١٩) أى $\frac{١٥ + ١٩}{٢}$ = ١٧ كمتوسط فرضى لأنه يناظر أكبر تكرار ، ولهذا وضعنا أمام هذه الفئة الرقم صفر لأنها تنحرف عن نفسها صفر .

ثم رتبنا انحرافات الفئات الأقل كالآتى :

— ٥ ، — ١٠ ، — ١٥ وانحرافات الفئات الأكبر + ٥ ، + ١٠ ، + ١٥ ، + ٢٠ ، + ٢٥ ، + ٣٠ .

ولما كانت هذه الانحرافات جميعا من مضاعفات الخمسة (وهى طول الفئة) ، يفضل قسمة كل من هذه الانحرافات على طول الفئة وهو ٥ تبسيطا للعمليات الحسابية . وبذلك تكون الانحرافات محسوبة بدلالة طول الفئة .

ولا تختلف قيمة المتوسط الحسابى الناتج لنفس التوزيع مهما كان مركز الفئة التى نختارها كمتوسط فرضى .

ولكن يجب أن نلاحظ أن قيمة المتوسط الحسابى المحسوبة من البيانات المجمعة فى توزيع تكرارى تكون مختلفة إختلافا قليلا عن القيمة الحقيقية لهذا المتوسط أى عن القيمة المحسوبة لهذه البيانات قبل تجميعها . وذلك لأننا لتسهيل العمليات الحسابية فى التوزيعات التكرارية نضطر إلى افتراض أن جميع الدرجات الواقعة فى فئة ما تكون متساوية ومساوية لمركز هذه الفئة ، وهذا الفرض لا يخلو من الخطأ . فالدرجات الواقعة فى فئة ما تختلف بالطبع عن مركز هذه الفئة بمقادير معينة . إلا أن هذه الاختلافات أو الفروق تميل إلى تعويض بعضها البعض فى الفئة الواحدة ، إذ أن بعضها موجب والبعض الآخر سالب ، كما أنها تميل إلى تعويض بعضها البعض فى التوزيع كله ، وبخاصة إذا كان عدد الدرجات كبيراً ، ولو أن الخطأ — ويسمى بخطأ التجميع — لا ينعدم تماما فى معظم الحالات . وعلى كل حال فإن هذا الخطأ يكون طفيفا فى العادة . إذ لا بأس من التضحية بشىء طفيف من الدقة فى سبيل توفير الكثير من مشقة العمليات الحسابية إذا

لم يتوفر لدى الباحث آلة حاسبة أو حاسب الكترونى . ومع هذا فلابد من التدقيق فى طريقة تجميع الدرجات للتقليل من هذا الخطأ بقدر الإمكان .

حساب المتوسط الحسابى لمجموعة من الدرجات باستخدام متوسطات مجموعاتها الجزئية :

أحيانا يكون لدينا متوسطات مجموعات من الدرجات و نود حساب المتوسط الحسابى للمجموعة الكلية التى تشتمل على هذه المجموعات جميعا . فإذا علمنا الدرجات الأصلية لكل مجموعة ، فإنه يسهل علينا جمع جميع هذه الدرجات وقسمة المجموع على عدد هذه الدرجات ، وبذلك نحصل كالمعتاد على المتوسط الحسابى للمجموعة الكلية . إلا أن هذه الطريقة تكون شاقة ، كما أننا ربما لا يكون لدينا الدرجات الأصلية لكل مجموعة . فلكى نوجد المتوسط الحسابى فى هذه الحالة دون الاعتماد على وجود الدرجات الأصلية ، يجب أن نعطى أوزانا لمتوسط كل مجموعة منها تبعا لعدد الدرجات التى تتكون منها المجموعة . ويمكن أن نجرى ذلك باستخدام الصورة الآتية :

$$\bar{س} = \frac{و_١ \bar{س}_١ + و_٢ \bar{س}_٢ + \cdots + و_ن \bar{س}_ن}{و_١ + و_٢ + \cdots + و_ن} \quad \ldots \quad (١٤)$$

وتشير الحروف $و_١$ ، $و_٢$ ، ... ، $و_ن$ إلى عدد قيم المجموعات ، $\bar{س}_١$ ، $\bar{س}_٢$ ، ... $\bar{س}_ن$ إلى متوسطات المجموعات ، ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالى :

إذا افترضنا أن لدينا ثلاث مجموعات من القيم تتكون المجموعة الأولى من من ٥ قيم ، والمجموعة الثانية من ٤ قيم والمجموعة الثالثة من قيمتين ، والمطلوب إيجاد المتوسط الحسابى للمجموعة الكلية

فالخطوة الأولى هى أن نحسب المتوسط الحسابى لكل من المجموعات الثلاثة كالآتى :

المجموعة (١)	المجموعة (٢)	المجموعة (٣)
٥	٨	١٠
٧	١١	٤
١٠	٢٠	
٩	١	
٤		
المجموع ٣٥	٤٠	١٤
المتوسط ٧	١٠	٧

ثم نطبق القانون السابق :

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{و}_1 \bar{\text{س}}_1 + \text{و}_2 \bar{\text{س}}_2 + \text{و}_3 \bar{\text{س}}_3}{\text{و}_1 + \text{و}_2 + \text{و}_3}$$

$$= \frac{٥ \times ٧ + ٤ \times ١٠ + ٢ \times ٧}{٥ + ٤ + ٢}$$

$$= \frac{٣٥ + ٤٠ + ١٤}{١١} = \frac{٨٩}{١١} = ٨,٠٩$$

المتوسط الحسابي المرجح : **Weighted Mean**

فى بعض الأبحاث يعطى المتغير أوزاناً معينة بحسب أهميته أو قيمته فى البحث . فى بعض الاستبيانات نعطى وزناً قدره ٥ للإجابة « أوافق جداً » ، ووزناً قدره ٤ للإجابة « أوافق » ، ووزناً قدره ٣ للإجابة « لا أدرى » ، ووزناً قدره ٢ للإجابة « لا أوافق » ، ووزناً قدره ١ للإجابة « لا أوافق إطلاقاً » .

كذلك فى تقدير الدرجة النهائية لمجموعة من الطلاب قد نعطى أوزانا خاصة لكل من الدراسة العملية ، ومتوسط الاختبارات الشفهية ، ومتوسط الاختبارات التحريرية بحسب أهمية كل منها فى تقويم الطلاب فى الدراسة .

وتسمى هذه الطريقة بطريقة الترجيح بالأوزان ، كما يسمى المتوسط الحسابى لها بالمتوسط الحسابى المرجح أو الموزون . أى أن :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}\ و\ س}{ن} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (١٥)$$

حيث و ترمز إلى الوزن الذى نختاره .

، ن = مجموع الأوزان

وهذه المعادلة تشبه المعادلة التى استخدمناها فى حساب المتوسط الحسابى لمجموعة من الدرجات باستخدام متوسطات مجموعاتها الجزئية ، ولذلك يمكن اعتبار المتوسط الحسابى لتوزيع تكرارى متوسطا حسابيا مرجحا بأوزان تساوى التكرارات .

مزايا وعيوب المتوسط الحسابى كمقياس للنزعة المركزية :

المتوسط الحسابى هو أكثر مقاييس النزعة المركزيه استخداما وبخاصة فى حالة القياس الفترى والنسبى ، كما أنه أقربها إلى تحقيق جميع شروط يول Yule التى سبق أن ذكرناها . والمتوسط الحسابى أكثر هذه المقاييس ثباتا (أى لا تتغير قيمته كثيراً من عينة إلى أخرى) إذا كان التوزيع متماثـلا (غير ملتويا) . كما أنه أكثرها قابلية للمعالجة الرياضية وتستخدم فى حسابه طريقة موضوعية تشمل جميع قيم المتغير . والمتوسط الحسابى يتأثر بدرجة أكبر بأى تغيير يحدث فى قيم المتغير ، وهذه الخاصية تفيد فى البحث التجريبى عند ما يود الباحث دراسة أثر طريقة تجريبية معينة على متغير ما .

كما أن المتوسط الحسابي يرتبط بغيره من المقاييس الإحصائية الهامة والشائعة الاستخدام مثل التباين ، ومعامل ارتباط بيرسون واختبار (ت) وغيرها كما سنرى فيما بعد .

غير أن المتوسط الحسابي لا يصلح لتمثيل البيانات التي تؤدي إلى توزيعات شديدة الالتواء لأنه يتأثر بالقيم المتطرفة أي التي تشذ عن بقية قيم المجموعة .

فمثلا إذا كنا نريد حساب متوسط دخل مجموعة من الأفراد أغلبهم من ذوي الدخل المحدود ، وكان من بينهم أقلية صغيرة من ذوي الدخل المرتفع جداً ، فإن المتوسط الحسابي يكون أعلى مما ينبغي ، ولا يصلح لتمثيل المجموعة .

الوسيط : Median

إذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . . هي قيم مفردات مجموعة ما ، وكانت هذه القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا ، فإن الوسيط هو قيمة المفردة التي يسبقها عدد من المفردات يساوي عدد المفردات التي تعقبها .

أي أن الوسيط هو النقطة التي تقسم التوزيع إلى قسمين بحيث يكون عدد الدرجات التي تقع أعلى هذه النقطة يساوي عدد الدرجات التي تقع أسفل النقطة .

ويعتمد حساب الوسيط على ما إذا كان عدد الدرجات فرديا أم زوجيا ، وعلى ما إذا كان هناك تكرار لدرجة معينة بالقرب من الوسيط ، ونهتم بهذا التكرار فقط عند ما يحدث بالقرب من الوسيط ، وفيما عدا ذلك يمكن إغفال هذا التكرار .

وفيما يلي طريقة حساب الوسيط في حالات ثلاث : —

١ — إذا كان عدد الدرجات فرديا ، ولا يتكرر أي منها بالقرب من الوسيط :

فهنا يكون الوسيط هو الدرجة الوسطى . فإذا كانت الدرجات هي

(٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٠) فإن الدرجة ٦ تقسم هذا التوزيع إلى نصفين ، نظراً لان الدرجتين ٢ ، ٥ أقل من ٦ ، والدرجتين ٧ ، ١٠ أكبر من ٦ .

٢ — إذا كان عدد الدرجات زوجيا ، ولا يتكرر أى منها بالقرب من الوسيط :

فهنا يكون الوسيط مساويا لمتوسط الدرجتين اللتين تقعان فى وسط التوزيع . فإذا كانت الدرجات هى (٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١١) فإن الدرجة التى تقسم هذا التوزيع إلى نصفين تقع بين الدرجتين ٦ ، ٧ وهنا يكون الوسيط مساويا

$$\frac{٦ + ٧}{٢} = ٦,٥$$

٣ — إذا كانت بعض الدرجات تتكرر بالقرب من الوسيط :

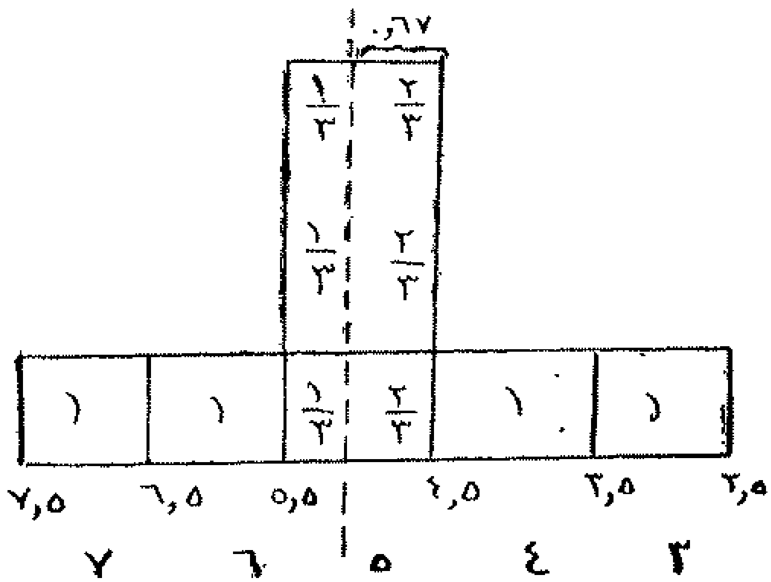
إذا تكرر عدد من الدرجات بالقرب من الوسيط ، فإننا يمكن أن نحصل على الوسيط بواسطة عملية استكمال Interpolation بغض النظر عما إذا كان عدد الدرجات فرديا أو زوجيا . فإذا كانت الدرجات هى (٢ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧) فهنا يجب أن يقع الوسيط بين الدرجتين الرابعة والخامسة وكل منهما ٥ . وفى مثل هذه الحالة نفترض أن الدرجات ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٥ تقع أسفل الوسيط ، والدرجات ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ تقع أعلى الوسيط . فإذا قلنا أن الوسيط يقع بين الدرجتين الرابعة والخامسة ، وكل منهما ٥ ، لا نكون بذلك قد حددنا قيمة واحدة دقيقة للوسيط ، ولذلك يفضل تحديد هذه القيمة .

وبالنظر إلى شكل رقم (١١) الذى يمثل هذه المجموعة من الأعداد بيانيا نجد أننا قد مثلنا كل درجة منها بمستطيل صغير على ميزان القياس فوق الحدود الحقيقية للدرجات .

ونظراً لان لدينا ٨ درجات تقع أربع منها أعلى الوسيط ، والأربع الأخرى أسفله ، لذا يجب أن تقع الدرجتان ٢ ، ٤ أسفل الوسيط ، كما يجب أن تقع الدرجتان ٥ ، ٥ أى ثلثا عدد تكرار الرقم ٥ ـ لان الرقم ٥ مكرر ثلاث مرات ـ

أسفل الوسيط أيضاً ، أى ثلثا المسافة على خط الدرجات ، التى تناظر القيمة ٥ .
وهذه تساوى ⅔ × ١ = ٠,٦٧ تقريبا .

الوسيط = ٥,١٧



شكل رقم (١١)

طريقة حساب الوسيط اذا كانت بعض الدرجات تتكرر بالقرب من الوسيط
(عدد الدرجات زوجى)

ويجب أن نضيف هذه القيمة على الحد الحقيقى الأدنى للدرجة ٤,٥ لنصل إلى النقطة التى تناظر ثلثى المسافة المذكورة .

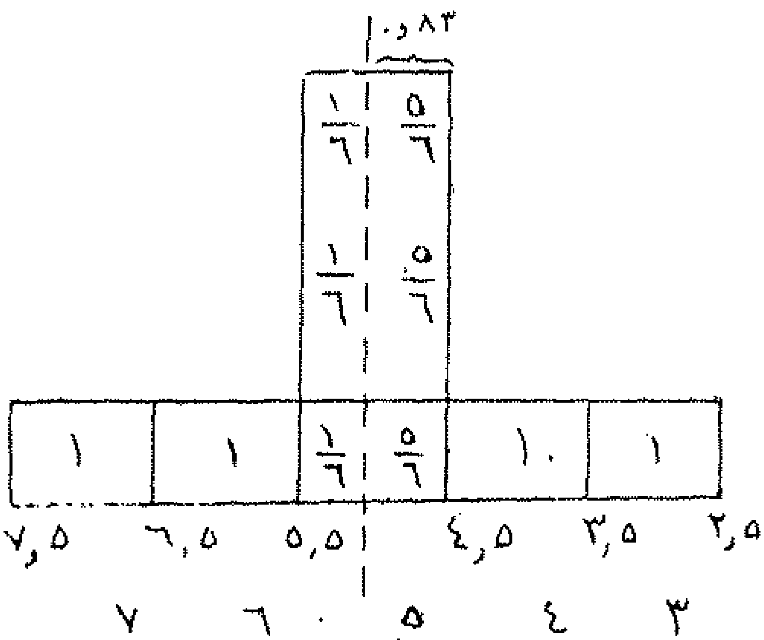
أى أن الوسيط = ٤,٥ + ٠,٦٧ = ٥,١٧ . وباختصار فان الوسيط (الذى يمثله الخط الرأسى المتقطع) يقسم المسافة الكلية إلى جزأين متساويين .

ويمكن اتباع نفس الطريقة إذا كان عدد الدرجات فرديا . فاذا افترضنا أن الدرجات هى (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧) فإنه يمكن تمثيل هذه الدرجات بيانيا فى شكل رقم (١٢) ، ونظراً لأن عدد الدرجات فردى وهو ٩ ، فإن الوسيط يجب أن يكون هو النقطة التى تقع أسفلها ٤,٥ من الدرجات ، وتقع أعلاها ٤,٥ من الدرجات . فإذا بدأنا العد من أصغر الدرجات إلى أكبرها

نجد أن الدرجتين ٣ ، ٤ سوف تقعان أسفل الوسيط ، ويبقى ٢,٥ من الدرجات الثلاث التى تساوى كل منها ٥ .

وهذه = $\frac{٢,٥}{٣}$ = $\frac{٥}{٦}$ = ٠,٨٣

الوسيط = ٥,٣٣



شكل رقم (١٢)

طريقة حساب الوسيط اذا كانت بعض الدرجات تتكرر بالقرب من الوسيط (عدد الدرجات فردى)

ولذلك فإن الدرجتين ٣ ، ٤ مضافا إليها ٠,٨٣ من المسافة التى تناظر الدرجة ٥ كلها سوف تقع أسفل الوسيط ، فالوسيط سيكون أعلى من الحد الحقيقى الأسفل للفئة ٥ وهو ٤,٥ بقدر ٠,٨٣ .

فالوسيط إذن = ٤,٥ + ٠,٨٣ = ٥,٣٣

ويمكن التعبير عن هذه الخطوات بالصورة اللفظية الآتية التى يمكن أن تستخدم لاختصار هذه الخطوات وهى :ـ

الوسيط = الحد الأدنى للقيمة الوسيطية +

$$\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{عدد الدرجات التى تقع دون الحد الحقيقى الأدنى للقيمة الوسيطية}}{\text{تكرار القيمة الوسيطية}}$$

.... (١٦)

فإذا طبقنا هذه الصورة على أحد المثالين السابقين وليكن المثال الثانى نجد أن :

$$\text{الوسيط} = ٤,٥ + \frac{٤\frac{١}{٢} - ٢}{٣}$$

$$= ٤,٥ + \frac{٢,٥}{٣}$$

$$= ٤,٥ + ٠,٨٣$$

$$= ٥,٣٣$$

ونلاحظ فى هذا المثال أن الحد الأدنى للقيمة الوسيطية ٥ هو ٤,٥ وأن هناك درجتان هما ٣ ، ٤ تقعان دون هذا الحد الأدنى ، كما أن القيمة الوسيطية تكررت ٣ مرات .

حساب الوسيط إذا كانت البيانات مجمعة فى توزيع تكرارى :

إذا كانت البيانات مجمعة فى توزيع تكرارى فيمكن تمثيلها بيانيا بواسطة المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى ويكون الوسيط هو النقطة التى على المحور الأفقى التى لو رسم منها مستقيم مواز للمحور الرأسى يقسم المدرج أو المضلع إلى قسمين متساويين فى المساحة .

ويمكن بطريقة مماثلة للطريقة السابقة أن نستنتج صورة نستخدم لحساب الوسيط إذا كانت البيانات مجمعة فى توزيع تكرارى وهى : ـ

الوسيط = الحد الأدنى الحقيقى للفئة الوسيطية +

$$\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع للفئة السابقة لفئة الوسيط}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة}$$

.... (١٧)

وعلى هذا فإن إيجاد الوسيط يتطلب تحديد الفئة الوسيطية كما يتطلب تحديد مجموع التكرارات السابقة لهذه الفئة .

وهذا كله يمكن تحديده من جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد .

كما يمكن أن نتوصل إلى صورة مماثلة إذا أردنا حساب الوسيط من جدول التوزيع التكرارى المتجمع النازل وهى :

الوسيط = الحد الأعلى الحقيقى للفئة الوسيطية —

$$\frac{\text{ترتيب الوسيط — التكرار المتجمع للفئة اللاحقة بفئة الوسيط}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة}$$

(١٨) ....

مثال : احسب الوسيط للبيانات المجمعة الموضحة بجدول رقم (١١)

(١) الفئات	(٢) الحدود الحقيقية للفئات	(٣) التكرار	(٤) التكرار المتجمع الصاعد	(٥) التكرار المتجمع النازل
صفر — ٤	-٠,٥ — ٤,٥	صفر	صفر	٧٦
٥ — ٩	٤,٥ — ٩,٥	٢	٢	٧٦
١٠ — ١٤	٩,٥ — ١٤,٥	١١	١٣	٧٤
١٥ — ١٩	١٤,٥ — ١٩,٥	٢٦	٣٩	٦٣
٢٠ — ٢٤	١٩,٥ — ٢٤,٥	١٧	٥٦	٣٧
٢٥ — ٢٩	٢٤,٥ — ٢٩,٥	٨	٦٤	٢٠
٣٠ — ٣٤	٢٩,٥ — ٣٤,٥	٦	٧٠	١٢
٣٥ — ٣٩	٣٤,٥ — ٣٩,٥	٣	٧٣	٦
٤٠ — ٤٤	٣٩,٥ — ٤٤,٥	٢	٧٥	٣
٤٥ — ٤٩	٤٤,٥ — ٤٩,٥	١	٧٦	١
المجموع		٧٦		

جدول رقم (١٢)

طريقة حساب الوسيط للبيانات المجمعة فى توزيع تكرارى

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{٧٦}{٢} = ٣٨$$

وبتأمل العمود رقم (٤) من جدول رقم (١٣) نرى أن ١٢ طالبا حصلوا على درجات أقل من ١٤,٥ ، ٣٩ طالبا حصلوا على درجات أقل من ١٩,٥ ، وإذن يقع الوسيط بين القيمتين ١٤,٥ ، ١٩,٥ . أي أن الفئة الوسيطية هي الفئة (١٥ — ١٩) ، والحد الأدنى لها هو ١٤,٥ وتكرارها ٢٦ . أما مجموع التكرارات السابقة لهذه الفئة فهو ١٢ . وبتطبيق القانون المشار إليه فيما سبق نجد أن :

$$\text{الوسيط} = ١٤,٥ + \frac{٣٨ - ١٢}{٢٦} \times ٥$$

$$= ١٤,٥ + \frac{٢٥}{٢٦} \times ٥$$

$$= ١٤,٥ + \frac{١٢٥}{٢٦} = ١٤,٥ + ٤,٨$$

$$= ١٩,٣ \text{ تقريبا .}$$

وليس من الضروري حفظ الصورة السابقة ، إذ يمكن حساب الوسيط من جدول التكرار المتجمع الصاعد بعملية تناسب بسيطة . فبعد حساب ترتيب الوسيط واكتشاف الفئة الوسيطية كما سبق ، نلاحظ أننا عند الدرجة ١٤ نكون قد مررنا بعدد قدره ١٣ طالبا . ولكي نصل إلى الطالب الذي ترتيبه ٣٨ ، فمن اللازم أن نضيف الدرجة التي حصل عليها ٢٥ طالبا آخر (٣٨ — ١٣ = ٢٥) من فئة الوسيط ، وهي (الفئة ١٥ — ١٩) . وعلى فرض أن الدرجات في هذه الفئة موزعة توزيعا منتظما على طولها وهو ٥ ، يكون نصيب كل طالب $\frac{١}{٢٦}$ من هذا الطول أي $\frac{١}{٢٦} \times ٥$. ويكون نصيب ٢٥ طالبا في هذه الفئة $\frac{٢٥}{٢٦} \times ٥$

وإذن الوسيط = ١٤,٥ + $\frac{٢٥}{٢٦}$ × ٥ = ١٩,٣ تقريبا .

ويمكن أيضا أن نحسب الوسيط من نفس جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد كالآتي :ـــ

الوسيط = ١٩,٥ − $\frac{٣٩ - ٣٨}{٢٦}$ × ٥

= ١٩,٥ − $\frac{٥}{٢٦}$

= ١٩,٥ — ٠,٢ = ١٩,٣ تقريبا .

وبالمثل يمكن حساب الوسيط من جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل باستخدام المرد رقم (٥) ، ومنه يتضح أن ٦٣ طالبا حصلوا على درجات أكبر من ١٤,٥ (الحد الأعلى الحقيقي للفئة ١٥ — ١٩) ، ٣٧ طالبا حصلوا على درجات أكبر من ١٩,٥ (الحد الحقيقي الأعلى للفئة ٢٠ — ٢٤) . وإذن يقع الوسيط بين القيمتين ١٤,٥ ، ١٩,٥ .

أى أن : ـــ

الحد الأعلى الحقيقي لفئة الوسيط = ٩,٥

، تكرار فئة الوسيط = ٢٦

، مجموع التكرارات اللاحقة بفئة الوسيط = ٣٧

∴ الوسيط = ١٩,٥ − $\frac{٣٨ - ٣٧}{٢٦}$ × ٥

= ١٩,٥ − $\frac{١}{٢٦}$ × ٥

= ١٩,٥ — ٠,٢ = ١٩,٣ تقريبا

وهى نفس القيمة السابقة .

مزايا وعيوب الوسيط كمقياس للنزعة المركزية :

للوسيط أهمية كبيرة كمقياس للنزعة المركزية ، وأهم ميزاته أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة ، ولهذا يفضل استخدامه فى تحليل البيانات التى تمثل بتوزيعات ملتوية ، كما هو الحال فى قياس متوسط الدخول أو المرتبات أو عدد ساعات العمل حيث يكون الاهتمام منصبا على دراسة الظروف الاجتماعية أو الاقتصادية للمجموعة موضع البحث .

كما أن الوسيط يصلح لتمثيل التوزيعات المفتوحة التى تشتمل على فئات مفتوحة مثل (— ٤) أو (— ٩) حيث لا يصلح المتوسط الحسابى لتمثيلها .

كما يصلح الوسيط لتمثيل البيانات النوعية حيث يصعب القياس الكمى وإنما نستطيع ترتيب البيانات بحسب نوعها أو حجمها .

هذا فضلا عن أن الوسيط هو أنسب مقياس فى حالة تقسيم البيانات على أساس الإرباعيات أو الإعشاريات أو المئينيات ، كما سنرى فيما بعد .

وطريقة حساب الوسيط هى طريقة موضوعية غير أنها لا تتضمن جميع قيم المتغير . والوسيط أقل ثباتا من المتوسط الحسابى ، إذ تختلف قيمته كثيراً من عينة إلى أخرى من نفس المجتمع .

ومن عيوبه أيضا أنه قليل الحساسية بمعنى أننا قد نستبدل كثيراً من قيم المتغير بقيم أخرى دون أن يتأثر الوسيط . ولتوضيح ذلك نعتبر الأعداد : ١٥ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٨ ، ٤٥ ، ٤٦ . وقيمة الوسيط = ٢٥ .

فإذا استبدلنا بالأعداد الثلاثة الأولى الأعداد ٢ ، ٥ ، ٧ مثلا لما تغيرت قيمة الوسيط . بل لو استبدلنا جميع الأعداد ما عدا العدد ٢٥ مع الاحتفاظ بالترتيب التصاعدى لما تغيرت هذه القيمة ، بينما يتأثر المتوسط الحسابى تأثراً كبيراً بتغيير أى قيمة من قيم المتغير .

المنـــوال :

المنوال هو قيمة المتغير الذى تكراره نهاية عظمى . أى هو القيمة الأكثر شيوعا أو تكراراً فى المجموعة .

فمنوال مجموعة الأعداد ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٨ هو ٥ . وأحيانا يكون للتوزيع منوالان . مثال ذلك مجموعة الأعداد ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٨ . لها منوالان هما ٤ ، ٧ ، ولذا يسمى هذا التوزيع بالتوزيع ثنائى المنوال Bimodal ، وربما ينتج هذا النوع من التوزيعات إذا قمنا بتحليل بيانات مستمدة من ضم نتائج عينة تشتمل على مجموعتين متباينتين إلى حد كبير من الأفراد .

ويصعب تعيين القيمة الحقيقية للمنوال إذا كانت البيانات مجمعة فى توزيع تكرارى ، ولذا نشير فى هذه الحالة إلى « الفئة المنوالية » وليس « المنوال » . ولعل الطريقة الوحيدة التى تعطينا قيمة المنوال بدقة فى هذه الحالة هى طريقة توفيق منحنى تكرارى نظرى Curve Fitting لبيانات التوزيع ثم إيجاد الإحداثى السينى لنقطة النهاية العظمى لهذا المنحنى . ولكن المجال لا يسمح هنا بذكر تفاصيل هذه الطريقة .

على أن هناك طرقا مختلفة للحصول على قيم تقريبية للمنوال ، منها أن نرسم المنحنى التكرارى بالنظر ونعتبر أن المنوال هو الإحداثى السينى لأعلى نقطة فيه . ولكن هذه الطريقة بعيدة عن الدقة الواجبة لأن رسم هذا المنحنى لا يمكن أن يكون دقيقا ، فهو ناشىء عن تمهيد المضلع التكرارى تمهيداً ذاتيا ، فضلا عن صعوبة تحديد أعلى نقطة فيه . كما يمكن أن نعتبر أن المنوال هو مركز الفئة المنوالية (أى الفئة الأكثر تكرارا) ، وهذه الطريقة بعيدة أيضا عن الدقة لأن المنوال لا يكون واقعا بالضبط عند مركز الفئة المنوالية إلا إذا كان التوزيع متماثلا حول هذه الفئة على الأقل ، بمعنى أن يكون تكرار الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية متساويا ،

وهذا قليل الحدوث . والأغلب أن تراكم الدرجات أو القيم يكون مختلفاً فى هاتين الفئتين ، وحينئذ لا يكون المنوال فى منتصف المسافة بين حدى الفئة المنوالية بل يكون أقرب إلى الحد المجاور للفئة الأكثر تكراراً منه إلى الحد الآخر .

وعلى هذا الأساس يمكن أن نحسب المنوال للبيانات المجمعة فى توزيع تكرارى باستخدام إحدى الطريقتين التقريبيتين الآتيتين ، وكل منهما يعتمد على دراسة ثلاث فئات هى الفئة المنواليةوالفئتان المحيطتان بها .

ولإيضاح هاتين الطريقتين نتناول المثال الآتى ونلخصه فى البيانات الآتية :

الفئـــات	التكرار (ت)
١٦٠ — ١٦٤	١٤
١٦٥ — ١٦٩	٢٢ (الفئة المنوالية)
١٧٠ — ١٧٤	١٠

الطريقة الأولى : (طريقة الرافعة)

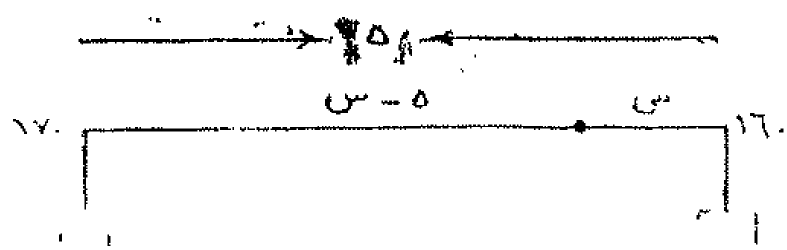
فى علم الإحصاء كثيراً ما نفترض أن كل قيمة (ن) من قيم التوزيع تمثل وحدة قوة وهذه الوحدة تساوى $\frac{١}{ن}$ من القوة الكلية (جميع قيم التوزيع) التى يمثلها التوزيع بأكمله . وعلى أساس هذا الافتراض يمكن أن نعتبر أن الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية تجذبان المنوال بقوتين تتناسبان مع تكرارهما .

وإذن يكون المنوال هو النقطة التى تقسم طول الفئة المنوالية بنسبة تكرارى الفئتين الأخريين .

أى أن المنوال فى المثال السابق = ١٦٥ + $\frac{١٠}{٢٤}$ × ٥

= ١٦٥ + ٢,٠٨ = ١٦٧,٠٨ تقريباً .

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بالرافعة المبينة بالشكل الآتى :



شكل رقم (١٣)

حساب المنوال بطريقة الرافعة للبيانات المجمعة

لحسب قاعدة العزوم :

١٤ × س = ١٠ (٥ — س)

∴ ١٤س + ١٠س = ٥٠

∴ ٢٤س = ٥٠

∴ س = ٢,٠٨ تقريباً

إذن المنوال = ١٦٥ + ٢,٠٨ = ١٦٧,٠٨ تقريبا

ويلاحظ أننا هنا قد وضعنا التكرارين ١٤ ، ١٠ عند طرفى الفئة المنوالية ، والأفضل وضعهما فى مركزى الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية ، كما أننا أهملنا تكرار الفئة المنوالية ذاتها . ولذا فهذه الطريقة غير دقيقة ، وتفضل عليها الطريقة الثانية :

الطريقة الثانية (طريقة الفروق أو طريقة بيرسون) :

فى هذه الطريقة نعتبر أن القوتين الجاذبتين للمنوال هما فرق تكرار الفئة المنوالية عن تكرارى الفئتين المحيطتين بها . ويكون المنوال هو النقطة التى تقسم طول الفئة المنوالية بنسبة هذين الفرقين .

الفروق	التكرار	الفئات
$ل_١$ = ٢٢ — ١٤ = ٨	١٤	١٦٠ — ١٦٤
	٢٢	١٦٥ — ١٦٩
$ل_٢$ = ٢٢ — ١٠ = ١٢	١٠	١٧٠ — ١٧٤

$$\text{والمنوال} = أ + \frac{ل_١}{ل_١ + ل_٢} \times ف \quad \ldots (١٩)$$

حيث أ ترمز إلى الحد الأدنى للفئة المنوالية

$ل_١$ ، $ل_٢$ ترمزان إلى فرق تكرار الفئة المنوالية عن تكرارى الفئتين المحيطتين بها .

، ف ترمز إلى طول الفئة

$$\text{إذن المنوال فى المثال السابق} = ١٦٥ + \frac{٨}{٢٠} \times ٥$$

$$= ١٦٥ + ٢$$

$$= ١٦٧$$

مزايا وعيوب المنوال كمقياس للنزعة المركزية :

يمكن للباحث النفسى أو التربوى الذى يهتم بدراسة مدى شيوع ظاهرة معينة أن يستخدم المنوال كمقياس للنزعة المركزية . ويمتاز المنوال بأنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة ، وهو فى هذه الحالة يفضل المتوسط الحسابى كما يفضله فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة والتوزيعات الشديدة الالتواء ، غير أنه لا يعتمد على جميع قيم المتغير موضع البحث ، ولذا فهو قليل الحساسية وقليل الثبات . كما أنه

لا يدخل فى حساب غيره من المقاييس الإحصائية إلا نادراً ، ويقتصر استخدامه فى التحليل الوصفى للبيانات . ولذلك فإن استخدامه فى البحوث النفسية والتربوية قليل ، فهو لا يصلح إلا كمقياس تقريبى سريع للنزعة المركزية .

الوسط الهندسى :

الوسط الهندسى لمجموعة من القيم عـــددها ن هو الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم ، ويرمز له بالرمز هـ .

فمثلا الوسط الهندسى للقيم ١ ، ٢ ، ٤ هو

$$\sqrt[٣]{(١)(٢)(٤)} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$$

والوسط الهندسى هو نوع خاص من المتوسطات يستخدم فى دراسة الظواهر التى تميل إلى التغير بنسبة ثابتة كما فى دراسة تزايد السكان أو النمو الجسمى أو العقلى للأطفال . فقد لوحظ أن التغير فى مثل هذه الحالات يحدث بنسب تكاد تكون ثابتة .

فإذا اعتبرنا القيم ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ٢٤٣ وهى قيم تتغير بنسبة ثابتة ، فهنا ليس من المعقول أن نمثل هذه المجموعة — أى نوجد القيمة النموذجية Typical التى تمثلها — باستخدام المتوسط الحسابى .

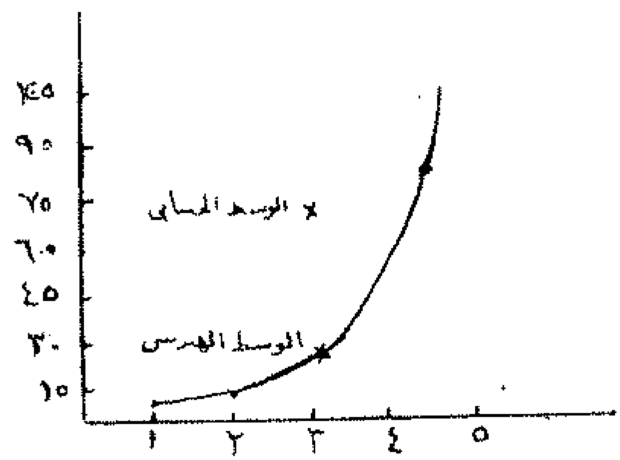
فالمتوسط الحسابى لهذه القيم $= \frac{٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١ + ٢٤٣}{٥}$

$= ٧٢,٦$

أما الوسط الهندسى لهذه القيم فهو =

$$\sqrt[٥]{(٣)(٩)(٢٧)(٨١)(٢٤٣)} = ٢٧$$

فقيمة الوسط الهندسى بلا شك تتوسط المجموعة بل هى فى الواقع إحدى قيم المجموعة وتقع على المنحنى الممثل لها ، وبذلك فهى تمثلها بدرجة أفضل من المتوسط الحسابى كما فى الشكل رقم (١٤) الآتى :



شكل رقم (١٤)

الوسط الهندسى والوسط الحسابى لمجموعة من القيم

ويلاحظ أننا نستخدم جميع القيم الملاحظة فى حساب الوسط الهندسى ، وهو قليل التأثر بالقيم المتطرفة ، ويصلح للمعالجة الرياضية . غير أنه لايكون له معنى إذا اشتملت البيانات على أى قيم صفرية أو سالبة . وهو لا يستخدم أيضاً إلا نادراً فى البحوث النفسية والتربوية .

كيف يختار الباحث مقياس النزعة المركزية المناسب عند تحليل البيانات :

إن أول ما يجب أن يأخذه الباحث فى الاعتبار عند اختيار مقياس النزعة المركزية عند تحليل بياناته هو ميزان أو مستوى القياس المناسب للبيانات . فإذا كان ميزان القياس الخاص بالبيانات من المستوى الاسمى يكون المنوال هو القياس المناسب . وإذا كان ميزان القياس من المستوى الرتبى يمكن استخدام المنوال أو الوسيط . أما إذا كان ميزان القياس من المستوى الفترى فإنه يمكن فى هذه الحالة استخدام أى من المتوسط أو الوسيط أو المنوال ، وأحياناً يكون من

المرغوب فيه استخدام أكثر من مقياس واحد للنزعة المركزية لنفس مجموعة البيانات .

والاعتبار الثانى الذى يجب مراعاته عند اختيار مقياس النزعة المركزية هو الغرض من استخدامه . فاذا كان الباحث يود مجرد وصف البيانات بدرجة أفضل، فالمهم هنا هو أن يكون مقياس النزعة المركزية معبرا حقيقيا عن البيانات التى يمثلها .

أما إذا أراد الباحث أن يستدل على خصائص المجتمع الأصل من نتائج العينة فإن اختياره لمقياس النزعة المركزية سوف يتحدد إلى درجة كبيرة بالأسلوب الإحصائى الذى يناسب البيانات وفروض البحث .

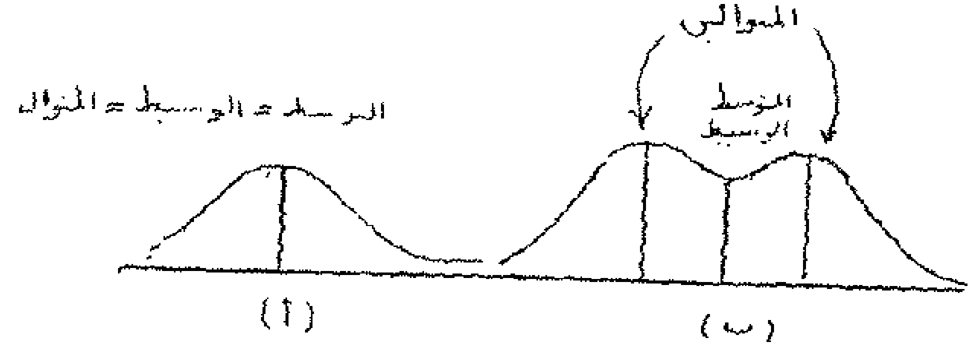
وسوف يجد الباحث كثيرا من هذه الأساليب الإحصائية الاستدلالية فى الجزء الثانى من هذا الكتاب .

والمتوسط الحسابى يتميز بعدة ميزات ، فنظرا لأنه يمكن تعريفه بطريقة جبرية فإنه يسمح بكثير من العمليات مما يجعل استخدام المتوسط الحسابى أمراً أساسيا . كما أن المتوسط الحسابى يعد أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداما فى الاستدلال الإحصائى من العينة إلى المجتمع الأصل . فتوسط العينة يحتمل بدرجة أكبر أن يستخدم لتقدير بارامتر المجتمع الأصل عن غيره من مقاييس النزعة المركزية . إلا أن المتوسط يتأثر بدرجة أكبر بالقيم المتطرفة عن غيره من المقاييس . وينطبق هذا بصفة خاصة فى حالة العينات الصغيرة . وهنا يفضل استخدام الوسيط بدلا من المتوسط .

ويبين الشكل رقم (١٥) العلاقة بين المتوسط ، والوسيط ، والمنوال، للتوزيعات المتماثلة .

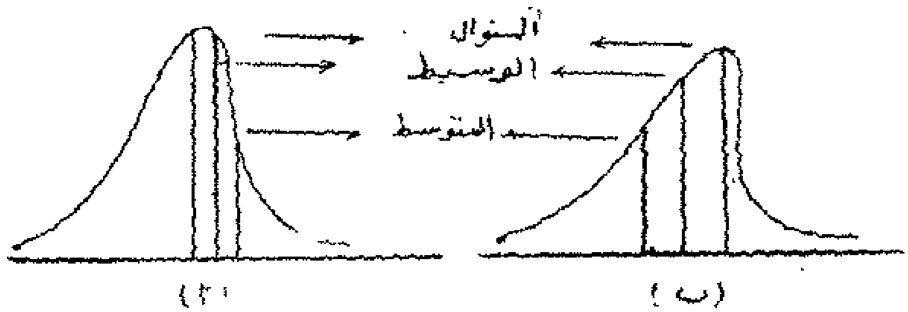
فالمنحنى (أ) أحادى المنوال ، والمنحنى (ب) ثنائى المنوال . ويبين الشكل رقم (١٦) العلاقة بين المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيعات غير المتماثلة . فالمنحنى (أ) فى هذا الشكل ملتو التواء موجبا . والمنحنى (ب) ملتو التواء سالبا،

ويحسن في مثل هذه التوزيعات استخدام الوسيط كمقياس للنزعة المركزية ، وهو النقطة التي على المحور الأفقي التي لو رسمنا منها مستقيما عموديا على هذا المحور يقسم المنحنى إلى جزأين متساويين .



شكل رقم (١٥)

المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيعات المتماثلة



شكل رقم (١٦)

المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيعات غير المتماثلة

وفي التوزيعات المتماثلة تتساوى قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال . أما في التوزيعات القريبة من التوزيعات المتماثلة فإن هذه المتوسطات الثلاثة تكون قريبة من بعضها . وقد وجد بيرسون أن هناك علاقة تقريبية بينها وهي أن : —

المتوسط — المنوال = ٣ (المتوسط — الوسيط)

والمواضع النسبية لهذه المتوسطات موضحة فى الشكل رقم (١٦) .

وبما أن الوسط الحسابى والوسيط أسهل فى حسابهما من المنوال . فإن هذه المعادلة تستخدم أحيانا لإيجاد قيمة تقريبية للمنوال فى الحالات التى يكون فيها التوزيع قريبا من التماثل .

ويلاحظ أن المنوال هو موقع العمود النازل من قمة المنحنى على المحور الأفقى . وأن الوسيط هو موقع العمود الذى يقسم مساحة المنحنى إلى قسمين متساويين . أما المتوسط الحسابى فهو موقع العمود المار بمركز ثقل التوزيع ، كما يلاحظ أنه أكثر ميلا نحو الجانب الملتوى .

تمارين على الفصل الثالث

١ — أوجد المتوسط ، والوسيط ، والمنوال لكل مجموعة من مجموعات الدرجات الآتية ، وبين أن : مجـ (س — $\bar{س}$) = ٠ .

(أ) ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٠ ، ٨ ، ٣ ، ٢ ، ٢ ، ٨ ، صفر

(ب) ١ ، ٣ ، ٣ ، ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ٩

(ﺟ) ١٢٠ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، صفر

٢ — فى أى مجموعة من مجموعات الدرجات السابقة يعتبر المتوسط الحسابى مقياسا غير مناسب للنزعة المركزية ؟ ولماذا ؟

٣ — فى مجموعات الدرجات السابقة بين أن مجموع مربعات انحرافات الدرجات عن المتوسط أقل من مجموع مربعات الانحرافات عن أى درجة أخرى .

٤ — إذا غيرنا الدرجة ١٢٠ فى السؤال رقم ١ (ﺟ) إلى ٢٠ ، ما تأثير ذلك على كل من المتوسط ، والوسيط ، والمنوال .

٥ — أوجد الوسط الهندسى للقيم ٦ ، ٥٠ ، ٩٠ .

٦ — بين باستخدام البيانات الآتية ، إذا كان هناك دليل على التواء التوزيع ، وإذا تبين لك أن التوزيع ملتو ، عين اتجاه الالتواء .

(أ) المتوسط = ٥٦ ، الوسيط = ٦٢ ، المنوال = ٦٨

(ب) المتوسط = ٦٨ ، الوسيط = ٦٢ ، المنوال = ٥٦

(ﺟ) المتوسط = ٦٢ ، الوسيط = ٦٢ ، المنوال = ٦٢

(د) المتوسط = ٦٢ ، الوسيط = ٦٢ ، المنوال = ٣٠

٧ — ما نوع التوزيعين رقم ٥ (ﺟ) ، ٥ (د) فى السؤال السابق .

٨ — احسب قيمة المتوسط الحسابى للدرجات ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٧ .

اجمع الرقم ٢ على كل درجة من الدرجات السابقة . أعـد حساب قيمة المتوسط . ما تأثير إضافة أى عـدد إلى كل درجة أو طرح أى عدد من كل درجة على المتوسط الحسابى .

٩ — إذا علمنا أن المتوسط الحسابى والوسيط لمجموعة من الدرجات متساويان . ماذا يمكننا القول عن شكل توزيع الدرجات .

١٠ — اذكر أمثلة لبيانات يفضل فيها استخدام :

(أ) المتوسط الحسابى

(ب) الوسيط

(جـ) المنوال

١١ — بمعلومية التوزيع الآتى :

س	ت
٢٠	١
١٨	١
١٧	٣
١٦	٢
١٤	٤
١٢	٥
١١	٥
١٠	٦
٩	٤
٧	٣

(أ) احسب المتوسط الحسابى

(ب) حدد قيمة الوسيط

(جـ) حدد قيمة المنوال

١٢ — إذا كان المتوسط الحسابي لدرجات تلاميذ فصل مكون من ٢٤ طالبا في إحدى المواد الدراسية هو ٤٥,٧ والمتوسط الحسابي لدرجات تلاميذ فصل آخر مكون من ٣٠ طالبا في نفس الاختبار هو ٤١,٦ . احسب المتوسط الحسابي العام لدرجات طلاب الفصلين معا في الاختبار .

١٣ — احسب المتوسط الحسابي ، وحدد قيمة كل من الوسيط والمنوال للبيانات الآتية : ـ

الفئات	التكرار
٢٥ — ٢٩	١٠
٣٠ — ٣٤	١٨
٣٥ — ٣٩	١٦
٤٠ — ٤٤	١٦
٤٥ — ٤٩	١١
٥٠ — ٥٤	٢٧
٥٥ — ٥٩	١٧
٦٠ — ٦٤	٤٩
٦٥ — ٦٩	٢٦
٧٠ — ٧٤	٦
٧٥ — ٧٩	٨

١٤ ارسم المنحنى التكراري لهذه البيانات محددا قيم المتوسط والوسيط والمنوال .

١٥ أوجد المتوسط الحسابي المرجح للمتوسطات الآتية :

١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١ إذا استخدم في حساب هذه المتوسطات عينات عدد أفراد كل منها ٦ ، ١٠ ، ٢٥ ، ٢٠ على الترتيب . أوجد أيضا المتوسط الحسابي غير المرجح لهذه المتوسطات . قارن بين النتيجتين مع التفسير .

الفصل الرابع

خصائص التوزيعات التكرارية

(ثانياً) مقاييس التشتت والالتواء والتفرطح

المدى المطلق

الانحراف الربيعى

الانحراف المتوسط

الانحراف المعيارى والتباين

المقاييس النسبية للتشتت

العزوم حول المتوسط الحسابي

مقاييس الالتواء

مقاييس التفرطح

مقدمة :

عرضنا فى الفصل السابق مجموعة من المقاييس التى تعبر بطرق مختلفة عن قيم نموذجية Typical صالحة لتمثيل أو تلخيص البيانات ووصف التوزيعات التكرارية . غير أن هذه القيم لا تكفى وحدها للوصف والمقارنة . فقد تشترك عدة مجموعات فى أحد المتوسطات ، ومع هذا يكون الفرق بينها كبيراً فإذا افترضنا أن البيانات الآتية تعبر عن درجات خمسة طلاب فى مادتين مختلفتين :

٣٥	٤٢	٥٢	٥٦	٦٥
١٠	٢٣	٤٥	٧٢	١٠٠

نلاحظ أن المتوسط الحسابى واحد فى الحالتين ومقداره ٥٠ ، ومع هذا فهناك اختلاف واضح بين توزيع الدرجات فى المادتين . فالدرجات فى المادة الأولى تقع بين ٣٥ ، ٦٥ فهى متراكمة بالقرب من المتوسط . أما فى المادة الثانية فالدرجات تقع بين ١٠ ، ١٠٠ ، فهى تمتد بعيداً عن المتوسط . أى أن الدرجات فى المادة الأولى تكون أكثر تجانساً وتقارباً منها فى المادة الثانية . ويقال حينئذ أن « تشتت » القيم فى الحالة الأولى أقل منه فى الحالة الثانية .

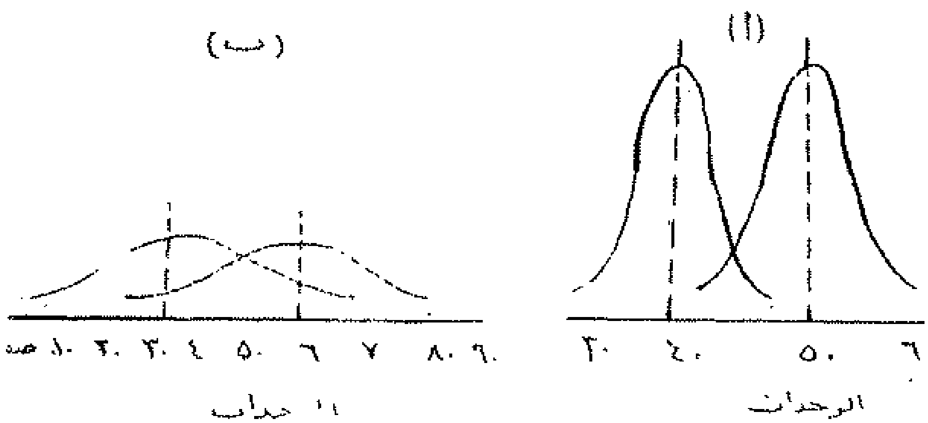
وكما نهتم بدراسة متوسطات المجموعات ، يجب أن نهتم أيضاً بدراسة تشتت قيم المتغير حول هذه المتوسطات . فخاصية التغير من أهم خصائص المتغير Variable حيث تؤدى إلى درجات مختلفة للأفراد المختلفين .

فالمجتمع الذى يقوم عادة الباحث النفسى والتربوى بدراسته يتباين فى بعد أو أكثر من أبعاده . وهنا يهتم الباحث بتحديد مقدار هذا التباين .

فمثلا قد لا يهم الباحث معرفة متوسط دخل أفراد المجتمع بقدر اهتمامه بكيفية توزيع الدخول بين هؤلاء الأفراد لأن هذا هو الذى يبين مدى التجانس ومدى العدالة فى هذا التوزيع . فمن الضرورى إذن أن يستخدم الباحث مقاييس

تعبر عن مدى تشتت قيم المتغير تساعده بالإضافة إلى مقاييس النزعة المركزية على تكوين فكرة أكثر وضوحاً لما يقوم بتحليله من بيانات فكلما زاد تشتت التوزيعات التكرارية كلما كانت مقاييس النزعة المركزية أقل تمثيلا لهذه التوزيعات ، وبالتالى يقل احتمال انطباق ما نتوصل إليه من استنتاجات على المجتمع الأصل الذى اشتقت منه هذه التوزيعات . وعند مقارنة العينات نجد أنه كلما زاد تشتت درجات هذه العينات كلما قل احتمال الحصول على نفس الفروق بين عينتين منها إذا ما حلت عينتان أخريتان مماثلتان لهما محل هاتين العينتين .

فإذا نظرنا إلى كل من التوزيعين الموضحين فى الشكلين رقم (١٧) أ ، ب حيث تمثل مقاييس النزعة المركزية بالخطين الرأسيين فى كل من الشكلين ا ، ب ، نجد أن مقياسى النزعة المركزية يبتعدان عن بعضهما بقدر ١٠ وحدات ، إلا أن التشتت فى الشكل ب أكبر بكثير من التشتت فى الشكل أ مما يدل على ابتعاد التوزيعين فى الشكل ب عن بعضهما بدرجة أكبر مما هو الحال فى الشكل أ .



شكل رقم (١٧)

مجموعتان من التوزيعات التكرارية متفقتان فى مقياس النزعة المركزية ولكنها مختلفتين فى التشتت

ومن بين مقاييس التشتت التي سنعرض لها في هذا الفصل :

١ — المدى المطلق Range
٢ — المدى الربيعي Interquartile Range
٣ — الانحراف المتوسط The Mean Deviation
٤ — الانحراف المعياري Standard Deviation
٥ — التباين Variance

المدى المطلق :

يعتبر المدى المطلق أبسط مقاييس التشتت . ويمكن الحصول على قيمته بإيجاد الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمه للمتغير . فالمدى المطلق الدرجات ١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٠ هو ٢٠ — ١٠ = ١٠ ، والمدى المطلق للدرجات ٢ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٢ ، ٢٨ هو ٢٨ — ٢ = ٢٦ . وهذا يدل على أن المجموعة الثانية أكثر تشتتاً من المجموعة الأولى . ولكن المدى المطلق لا يعتبر في حد ذاته مقياساً هاماً للتشتت لأنه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير ، ولهذا فهو يتأثر تأثراً بالغاً باختلاف العينة لأن أي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين — وهو أمر كبير الاحتمال — يؤثر بوضوح في قيمة المدى المطلق ، فضلا عن أن المدى المطلق لا يفيدنا شيئاً عن القيم الأخرى في التوزيع . ومع هذا فلا شك أن تسجيل المدى المطلق إلى جانب المقاييس الأخرى الأكثر تعقيداً يزيد من معلومات الباحث عن البيانات التي يفحصها .

الانحراف الربيعي :

يفضل استخدام الانحراف الربيعي إذا استخدم الباحث الوسيط كمقياس للنزعة المركزية، وهو يسمى أيضا بنصف المدى الربيعي Semi - Interquartile Range لأنه يساوي نصف المدى بين الربيع الأول (ر$_1$) والربيع الثالث (ر$_3$)

أى يعتمد على تعيين نقطتين على ميزان الدرجات تقع دون أحدهما ١٥ ٪ من الحالات وتقع دون الأخرى ٧٥ ٪ من الحالات .

ويرمز لنصف المدى الربيعى بالرمز « ر »

أى أن : $ر = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$ . . . (١)

وهذا المقياس يتوقف كذلك على قيمتين فقط من قيم التوزيع هما قيمتا الربيعين الأول والثالث ، ولهذا فهو يتأثر أيضا باختلاف العينة . ولكنه أفضل من المدى المطلق لأنه لايتأثر بالقيم المتطرفة التى تكون عادة شاذة عن بقية القيم ، فعند حسابه نستبعد الربع الأول والربع الأخير من قيم المتغير .

ولتوضيح ذلك اعتبر البيانات الموضحة بجدول رقم (١٤) والتى تبين درجات مجموعة من الأزواج (عددها ٢٠) ومجموعة من الزوجات (٢٠ زوجة) فى مقياس للاتجاه نحو العمل اليدوى .

مجموعة الأزواج		مجموعة الزوجات	
س	ت	س	ت
٩	١	٩	١
٨	١	٨	١
٧	٣	٧	صفر
٦	٣	٦	٣
٥	٤	٥	١٠
٤	٣	٤	٢
٣	٢	٣	٢
٢	٢	٢	صفر
١	١	١	١

جدول رقم (١٤)

درجات مجموعة من الأزواج والزوجات

فى مقياس للاتجاه نحو العمل اليدوى

فمن الجدول يمكن أن نحدد بسهولة الوسيط لكل من المجموعتين وهو يساوى ٥ ، والمدى المطلق لكل منهما ويساوى ٨ ، وهذا يشير إلى أنه لا توجد فروق فى اتجاهات كل من المجموعتين نحو العمل اليدوى .

فإذا حسبنا نصف المدى الربيعى للمجموعة الأولى نجده = $\frac{٧ - ٤}{٢}$

= ١,٥ (لاحظ أن $ر_{١}$ = ٤ ، $ر_{٣}$ = ٧)

ونصف المدى الربيعى للمجموعة الثانية = $\frac{٦ - ٥}{٢}$ = ٠,٥ (لاحظ أن $ر_{١}$ = ٥ ، $ر_{٣}$ = ٦)

وهذا يدل على أن اتجاهات مجموعة الزوجات أقل تشتتا من اتجاهات مجموعة الأزواج ، ولذلك ربما يفسر الباحث هذه النتيجة بأن يقول أن مجموعة الزوجات أقل تطرفا فى اتجاهاتهن وأنها أكثر تجانسا من مجموعة الأزواج فى الاتجاه موضع الاهتمام .

ويمكن حساب نصف المدى الربيعى من البيانات المجمعة فى توزيع تكرارى بنفس الطريقة التى سبق أن اتبعناها فى الفصل الثالث عند حساب الوسيط للبيانات المجمعة ، إلا أننا هنا نهتم بالربيعين الأول والثالث . ولذا يجب أن نستعين بجدول التكرار المتجمع الصاعد (أو النازل) أو بالمنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) لحساب كل من الربيعين .

ويجب أن نتذكر أن رتبة الربيع الأول = $\frac{ن}{٤}$ ، ورتبة الربيع الثالث = $\frac{٣ ن}{٤}$ حيث ن ترمز إلى التكرار الكلى .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا التوزيع التكرارى لدرجات اختبار ما وهو مبين بالجدول رقم (١٥) الآتى :

الدرجات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
١٠ — ١٤	٢	٢
١٥ ١٩	٨	١٠
٢٠ — ٢٤	٦	١٦
٢٥ — ٢٩	١٢	٢٨
٣٠ — ٣٤	٧	٣٥
٣٥ ٣٩	٦	٤١
٤٠ — ٤٤	٤	٤٥
٤٥ - ٤٩		٤٨
٥٠ — ٥٤	١	٤٦
٥٥ — ٥٩	١	٥٠

ن = ٥٠

جدول رقم (١٥)

ترتيب الإرباعى الأول = $\frac{٥٠}{٤}$ = ١٢,٥

ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

ترتيب الإرباعى الثالث = $\frac{٣}{٤} \times ٥٠$ = ٣٧,٥

الإرباعى الأول = ١٩,٥ + $\frac{١٢,٥ - ١٠}{٦} \times ٥$

= ١٩,٥ + ٢,٠٨ = ٢١,٥٨

$$\text{الوسيط} = ٢٤,٥ + \frac{٢٥ - ١٦}{١٢} \times ٥ = ٢٤,٥ + ٣,٧٥ = ٢٨,٢٥$$

$$\text{الإرباعى الثالث} = ٣٤,٥ + \frac{٣٧,٥ - ٣٥}{٦} \times ٥$$

$$= ٣٤,٥ + ٢,٠٨ = ٣٦,٥٨$$

$$\text{إذن نصف المدى الربيعى} = \frac{\text{الإرباعى الثالث} - \text{الإرباعى الأول}}{٢}$$

$$= \frac{٣٦,٥٨ - ٢١,٥٨}{٢} = \frac{١٥}{٢} = ٧,٥$$

وكلما كان التوزيع متماثلا كان الوسيط على بعدين متساويين من الربيع الأدنى والربيع الأعلى .

ففى المثال السابق نجد أن الوسيط وقيمته ٢٨,٢٥ أقرب قليلا إلى الربيع الأدنى منه إلى الربيع الأعلى مما يبين أن التوزيع ليس اعتداليا ولكنه قريب من الاعتدالية .

ويصلح الانحراف الربيعى لقياس التشتت لأن قيمته تتناسب مع مدى انتشار قيم التوزيع . فإذا كانت قيمته كبيرة دل ذلك على زيادة تشتت واختلاف القيم ، وإذا كانت قيمته صغيرة دل ذلك على قلة التشتت والاختلاف بين القيم . وهو كمقياس للتشتت يتمشى مع الوسيط كمقياس للنزعة المركزية ، فكلاهما يعتمد على ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا . ويمكن للباحث استخدام الوسيط والانحراف الربيعى لوصف التوزيعات التكرارية وتلخيص البيانات .

ومن الملاحظات الجديرة بالذكر أنه فى حالة التوزيعات الاعتدالية تقع قيم ٥٠ ٪ من الحالات بين القيمتين (الوسيط ± الانحراف الربيعى) نظرا لتماثل هذه التوزيعات .

وعلى هذا نستطيع أن نحكم على درجة اعتدالية توزيع ما بمدى انطباق هذه القاعدة عليه .

ففى المثال السابق نستطيع أن نقول أن التوزيع يكون قريباً من الاعتدالية إذا وقعت نصف الحالات تقريبا بين القيمتين (٢٨,٢٥ ± ٧,٥) أى بين القيمتين (٢٠,٧٥ ، ٣٥,٧٥) .

فإذا كانت البيانات غير المجمعة الخاصة بهذا المثال متوافرة لأمكن التأكد من صحة هذا الفرض .

وفى وصف التوزيعات بواسطة الإرباعيات يحسن تسجيل قيمة كل من ر١ ، ر٢ ، ر٣ لأن هذه القيم معا تعطى صورة واضحة عن التوزيع ، وبخاصة أن الانحراف الربيعى لا يسهل معالجته رياضيا ، وهذا أحد عيوبه . ومن عيوبه أيضا فضلا عن تأثره باختلاف العينة أنه لا يدخل فى حسابه قيم الإرباعى الأول وقيم الإرباعى الثالث من التوزيع لأنه يعتمد فقط على قيم النصف الأوسط .

الانحراف المتوسط :

إن المقياسين السابق ذكرهما لا يدخل فى حسابهما جميع قيم المتغير ، فكل منهما يعتمد على نقطتين معينتين فى التوزيع . أى أن كليهما لا يتضمن الاختلافات الفردية لقيم المتغير . فإذا أراد الباحث أن يهتم بذلك وهو ما يجب أن يكون - فلابد من استخدام مقاييس تتناول هذه القيم جميعا . وأبسط طريقة تصلح لذلك هى إيجاد متوسط انحرافات كل قيمة فى التوزيع عن قيمة ما فى وسط التوزيع ، لأن مدى اقتراب أو ابتعاد قيم المتغير عن قيمة ما لا بد أن يشير إلى مدى تشتت هذه القيم . ومن البديهى أن تكون هذه القيمة التى نختارها لهذا الغرض هى إحدى قيم مقاييس النزعة المركزية . ويفضل بعض علماء الإحصاء استخدام المتوسط الحسابى كنقطة تقاس منها الانحرافات لأن مجموع الانحرافات المطلقة عن المتوسط الحسابى هو نهاية صغرى .

وبهذا يكون لدينا مقياس فريد لهذا الانحراف . وللتوضيح ذلك نفترض الدرجات الآتية :

العينة أ	٨	٨	٨	٨	٨
العينة ب	١	٤	٧	١٠	١٣
العينة جـ	١	٥	٢٠	٢٥	٢٩

فدرجات العينة أ أقل تشتتا من درجات العينة ب . وهذه بدورها أقل تشتتا من درجات العينة جـ . ومتوسط العينات الثلاث هي ٨ ، ٧ ، ١٦ على الترتيب . فإذا ما عبرنا عن درجات كل عينة بالانحرافات عن متوسطها فإننا نحصـــل على الانحرافات الآتية :

العينة أ	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
العينة ب	— ٦	— ٣	صفر	+ ٣	+ ٦
العينة جـ	— ١٥	— ١١	+ ٤	+ ٩	+ ١٣

وإذا تأملنا هذه الانحرافات نجد أنه بزيادة الاختـــلاف أو التشتت يزيد انحراف مجموعات الدرجات عن متوسطاتها .

ولذلك فإنه يمكننا استخدام هذه الخاصية لإيجاد مقياس للتشتت يطلق عليه الانحراف المتوسط . ويعرف الإنحراف المتوسط بأنه متوسط الانحرافات المطلقة لقيم التوزيع عن المتوسط الحسابي . ونقصـــد بالانحرافات المطلقة الانحرافات بغض النظر عن إشارتها الجبرية + أو — .

وللحصول على الانحراف المتوسط لمجموعة من القيم نحسب الانحرافات عن المتوسط الحسابي ونجمع هذه الانحرافات بغض النظر عن إشارتها الجبرية ، ثم نقسم الناتج على عدد هذه القيم .

فبالنسبة للمجموعة أ يكون الانحراف المتوسط صفرا . وبالنسبة للمجموعة ب يكون الانحراف المتوسط $\frac{٦ + ٣ + صفر + ٣ + ٦}{٥} = \frac{١٨}{٥} = ٣,٦$

وبالنسبة للمجموعة جـ يكون الانحراف المتوسط

$$\frac{١٥ + ١١ + ٤ + ٩ + ١٣}{٥} = \frac{٥٢}{٥} = ١٠,٤$$

وبذلك يكون الانحراف المتوسط $= \frac{مجـ |س - \bar{س}|}{ن}$

ويرمز الخطان الرأسيان المحيطان بالفرق س − $\bar{س}$ إلى القيمة المطلقة للفرق.

أما إذا كانت جميع القيم أو بعضها مكررا فيمكن استخدام الصورة الآتية :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{مجـ ك |س - \bar{س}|}{ن} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (٢)$$

حيث ك ترمز إلى التكرار .

ويلاحظ أننا نأخذ القيم المطلقة للانحرافات — أى بصرف النظر عن إشارتها — وذلك لأن مجموع الانحرافات الفعلية عن المتوسط الحسابى يساوى صفر ؛

والمثال الآتى يوضح كيفية إيجاد الانحراف المتوسط للبيانات المجمعة .

الفئات	التكرار (ك)	مراكز الفئات (س)	س × ك	(س — س̄)	ك(س — س̄)
صفر — ٤	صفر	٢	صفر	١٩,٢١	صفر
٥ ٩	٢	٧	١٤٤	١٤,٢١	٢٨,٤٢
١٠ — ١٤	١١	١٢	١٣٢	٩,٢١	١٠,١٣١
١٥ — ١٩	٢٦	١٧	٤٤٢	٤,٢١	١٠٩,٤٦
٢٠ — ٢٤	١٧	٢٢	٣٧٤	,٧٩	١٣,٤٣
٢٥ — ٢٩	٨	٢٧	٢١٦	٥,٧٩	٤٦,٣٢
٣٠ — ٣٤	٦	٣٢	١٩٢	١٠,٧٩	٦٤,٧٤
٣٥ — ٣٩	٣	٣٧	١١١	١٥,٧٩	٤٧,٣٧
٤٠ — ٤٤	٢	٤٢	٨٤	٢٠,٧٩	٤١,٥٨
٤٥ — ٤٩	١	٤٧	٤٧	٢٥,٧٩	٢٥,٧٩
المجموع =	٧٦		١٦١٢		٣٨٧,٢٤١

جدول رقم (١٦)

طريقة حساب الانحرافات المتوسطة للبيانات المجمعة

$$\bar{س} = \frac{مج\ ت \times س}{ن} = \frac{١٦١٢}{٧٦} = ٢١,٢١$$

$$\text{إذن الانحراف المتوسط} = \frac{مج\ ك\ |س - \bar{س}|}{ن}$$

$$= \frac{٣٨٧,٢٤١}{٧٦}$$

$$= ٥,٠٩٥$$

ومن خواص التوزيعات الاعتدالية أن المدى بين المقدارين (المتوسط الحسابى ± الانحراف المتوسط) يشمل حوالى ٥٨ ٪ من التكرار الكلى . فإذا افترضنا أن توزيع البيانات المبينة فى الجدول السابق قريب من الاعتدالية نتوقع أن يقع ٥٨ ٪ من القيم تقريبا بين المقدارين (٢١,٢١ ± ٥,٠٩٥) أى بين (١٦,١١٥ ، ٢٦,٣٠٥)

وبالطبع كان من الممكن التأكد من اعتدالية التوزيع إذا كان لدينا البيانات غير المجمعة للتحقق من النسبة المئوية للقيم التى تقع بين القيمتين ١٦,١ ، ٢٦,٣ .

والانحراف المتوسط يفيد فى بعض الحالات مثل تحليل البيانات الاقتصادية، ولكنه قليل الاستخدام فى البحوث النفسية والتربوية لأن إهمال إشارة الانحرافات يؤدى إلى قصور هذا المقياس عن المعالجة الرياضية .

الانحراف المعيارى والتباين للعينات :

Sample Standard Deviation and Variance

هذا المقياس هو أدق مقاييس التشتت وهو مبنى على نفس الأساس الذى بنى عليه الانحراف المتوسط ، أى على أساس أن متوسط مجموع انحرافات قيم المتغير عن المتوسط الحسابى هو قيمة صالحة لقياس مدى تشتت هذه القيم . غير أن الانحراف المعيـــارى لا يهمل إشارات الانحرافات بل يتخلص من وجودها بطريقة رياضية مقبولة وهى إيجاد مربعات هذه الانحرافات .

أى أننا فى هذا المقياس نستخدم المقدار $\frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$

ولكن بما أن الأساس هو متوسط الانحرافات ذاتها وليس متوسط مربعاتها ، لذا يكون من الضرورى أخذ الجذر التربيعى لهذا المقدار ، وهذا الإجراء يمكننا أيضاً من الاحتفاظ بوحدة القياس الأصلية للمتغير .

وعلى هذا يعرف الانحراف المعيارى لتوزيع ما بأنه القيمة الموجبة للجذر التربيعى لمتوسطات مربعات انحرافات قيم التوزيع عن متوسطه الحسابى ، ويرمز له بالرمز « ع » ، أى أن :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^2}{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

ويلاحظ أننا نحسب الانحرافات عن المتوسط الحسابى ، وذلك لأن مجموع مربعات انحرافات قيم التوزيع يكون أقل ما يمكن إذا كانت هذه الانحرافات محسوبة عن المتوسط الحسابى ، وبهذا يكون لدينا مقياس فريد للانحرافات .

كما يلاحظ أن مربع الانحراف المعيارى أى ($ع^2$) يسمى التباين Variance ، ولذا فهو يسمى أيضاً بالانحراف التربيعى المتوسط .

أى أن التباين $ع^2 = \frac{مجـ (س - \bar{س})^2}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$

والانحراف المعيارى والتباين يكونان ركنا أساسيا فى علم الإحصاء وفى تحليل البيانات .

ولكننا يجب أن نفرق بين الانحراف المعيارى وتباين العينة Sample والانحراف المعيارى وتباين المجتمع الأصل Population . وفى الحقيقة فإن استخدام الصورة :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^2}{ن}}$$

يعطينا تقديراً للإنحراف المعيارى للمجتمع الأصل . أى أن القيم الناتجة من استخدام هذه الصورة تميل إلى أن تكون أقـــل من القيم الحقيقية للانحرافات المعيارية للمجتمعات الأصل .

والقسمة على ن — ١ بدلا من ن تعطينا قيماً تقديرية غير متحيزة .

ولذلك يفضل استخدام الصورتين الآتيتين :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن - ١}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٥)$$

$$ع^٢ = \frac{مجـ (س - \overline{س})^٢}{ن - ١} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٦)$$

إذا أردنا تقدير الانحراف المعيارى لتباين المجتمع الأصل من البيانات المستمدة من عينات مسحوبة من هذا المجتمع .

ونلاحظ أن الرمز ن يشير إلى عدد الدرجات أو القيم أو القياسات أو الملاحظات ، بينما يشير المقدار ن — ١ إلى عدد الانحرافات عن المتوسط التى يمكن أن تتغير . ولتوضيح ذلك ، لفترض أن لدينا القيم ٧ ، ٨ ، ١٥ ومتوسطها ١٠ . وبذلك تكون انحرافاتها عن المتوسط هى —٣ ، —٢ ، +٥ ، ومجموع هذه الانحرافات صفر : أي (— ٣) + (— ٢) + (+ ٥) = صفر . وحيث إن المجموع صفر ، فإننا نستطيع بمعلومية أى انحرافين منهـــا أن نحدد الانحراف الثالث ، أى لا تختلف قيمته إذا علمنا قيمتى الانحرافين الآخرين . ومجموع مربعات الانحرافات هى ٩ + ٤ + ٢٥ = ٣٨ ، وبالرغم من أننـا حصلنا على هذا المجموع نتيجة إضافة مربعات القيم الثلاث ، إلا أن قيمتين فقط من هذه القيم لها حرية التغيير . ويطلق على عدد القيم الحرة التغيير اسم « درجات الحرية Degrees of Freedom . فالمقدار مجـ $(س - \overline{س})^٢$ يقترن بدرجات

الحرية ن — ١ لأنه يمكن لقيم عددها ن — ١ من بين مربعات الانحرافات التى عددها ن أن تتغير .

وفى الحقيقة أن مفهوم « درجات الحرية » يعتبر من المفاهيم الأساسية العامة والمفيدة فى علم الإحصاء . وسوف يرى الباحث بنفسه أهمية هذا المفهوم عند دراسته للأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات والتى سنعرض لها فى الجزء الثانى من الكتاب .

مثال تطبيقى :

لكى نثرى فهمنا لطبيعة التباين والانحراف المعيارى نعتبر المثال التطبيقى الآتى حيث قام باحث بتصميم موقف تجريبى لبحث أثر تعاطى عقار معين على الأداء فى مطلب معرفى ما مثل الترميز Coding ، فاختار عينتين عشوائيتين من الطلاب إحداهما تجريبية أعطيت العقار ، والأخرى ضابطة لم تعط العقار ، وتتكون كل مجموعة من ١٠ أفراد . ونفترض أن درجات الطلاب فى المطلب المعرفى التى حصل عليها كل منهم كانت كما يلى :

المجموعة التجريبية	٥	٧	١٧	٣١	٤٥	٤٧	٦٨	٨٥	٩٦	٩٩
المجموعة الضابطة	٢٩	٣٦	٣٧	٤٢	٤٩	٥٨	٦٢	٦٣	٦٩	٧٠

فمتوسط المجموعة التجريبية يساوى ٥٠ ، ومتوسط المجموعة الضابطة ٥١,٥ . وهنا ربما يتسرع الباحث ويستنتج من هذين المتوسطين أن العقار ليس له تأثير على الإطلاق على أداء الفرد .

ولكن إذا حسبنا الانحراف المعيارى لدرجات كل مجموعة نجده ٣٥,٦٣ ، ١٤,٨٦ على الترتيب . أى أن درجات المجموعة التجريبية أكثر تشتتاً وانتشاراً من المجموعة الضابطة مما يدل على أن أداء المجموعة التجريبية فى المطلب المعرفى

أكثر تباينا من أداء المجموعة الضابطة . وبذلك يتضح للباحث أن العقار يبدو أن له تأثيراً كبيراً على تباين الأداء بالرغم من أن تأثيره على مستوى الأداء كان طفيفاً .

فعند تحليل البيانات المستمدة من الوقائع التجريبية يجب على الباحث إلى جانب تفسير الفروق بين المتوسطات الحسابية أن يعتنى أيضا بتفسير اختلاف التباين أو الانحرافات المعيارية للبيانات التي يحصل عليها .

حساب الانحراف المعيارى والتباين للبيانات غير المجمعة :

إذا أردنا حساب الانحراف المعيارى والتباين لمجموعة من القيم مثل ٥ ، ٧ ، ٩ فما علينا إلا أن نكون جدولا بسيطا كالآتى لتيسير العمليات الحسابية .

س	$\overline{س}$	س — $\overline{س}$	(س — $\overline{س}$)^{٢}
٥	٧	— ٢	٤
٧	٧	صفر	صفر
٩	٧	+ ٢	٤
		صفر	٨

مجـ س = ٢١

ن = ٣

$$\overline{س} = \frac{٢١}{٣} = ٧$$

$$\text{الانحراف المعيارى } ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$$

والتباين $ع^{٢} = ٤$

لاحظ أننا حسبنا المتوسط أولا ($\bar{\text{س}} = ٧$) ثم طرحنا كل درجة من المتوسط ($\text{س} - \bar{\text{س}}$) وقمنا بتربيع هذا الفرق ($\text{س} - \bar{\text{س}}$)^{٢} ، ثم قسمنا مجموع هذه الفروق على عدد القيم مطروحاً منها الواحد الصحيح .

ونستطيع حساب الانحراف المعياري والتباين باستخدام القيم ذاتها دون الحاجة إلى حساب انحرافات هذه القيم عن المتوسط الحسابي ، وذلك باستخدام قانون يمكن اشتقاقه من القانون الأصلي السابق كالآتي :

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\text{مج}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مج س}^{٢} - ٢\,\text{مج س}\,\bar{\text{س}} + \text{مج}\,\bar{\text{س}}^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مج س}^{٢} - ٢\,\bar{\text{س}}\,\text{مج س} + \text{مج}\,\bar{\text{س}}^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مج س}^{٢} - ٢\,\frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \times \text{مج س} + \text{ن}\,\bar{\text{س}}^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مج س}^{٢} - ٢\left(\frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \times \text{مج س}\right) + \text{ن}\left(\frac{\text{مج س}}{\text{ن}}\right)^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مج س}^{٢} - \frac{\text{مج س}}{\text{ن}}\,(٢\,\text{مج س} - \text{مج س})^{٢}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢} - \text{مجـ س} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}}{\text{ن} - ١}$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}(\text{ن} - ١)} \quad . \quad . \quad . \quad (٧)$$

وهذا القانون لا يتطلب إلا جدولا مكونا من عمودين كما يتضح من الجدول الآتى :

	س	$\text{س}^{٢}$
	٥	٢٥
	٧	٤٩
	٩	٨١
المجموع	٢١	١٥٥

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}(\text{ن} - ١)}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣ \times ١٥٥ - (٢١)^{٢}}{٣ \times ٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٦٥ - ٤٤١}{٦}} = \sqrt{\frac{٢٤}{٦}} = \sqrt{٤} = ٢$$

غير أن هناك حقيقة هامة تعيننا على تبسيط هذه الأعداد وخاصة إذا كانت الاعداد كبيرة أو كان متوسطها الحسابى عدداً كسرياً .

وهذه الحقيقة هى أن الانحراف المعيارى لا يتغير بتغير نقطة الأصل. وذلك لأننا حين ننقل نقطة الأصل إلى نقطة أخرى على نفس المحور الممثل لقيم المتغير فإن جميع القيم تتغير بمقدار ثابت ، وتظل المسافة بين أى قيمتين للمتغير ثابتة . ويظل المقدار $(س - \bar{س})$ وهو انحراف أى قيمة عن المتوسط الحسابى ثابتاً . وعلى هذا فإن المقدار $مج (س - \bar{س})^2$ هو مقدار ثابت للتوزيع الواحد ، ومن ثم فالانحراف المعيارى هو أيضا مقدار ثابت .

وهذه الحقيقة تسهل العمليات الحسابية بدرجة كبيرة لأنها تعنى أننا لو طرحنا أو أضفنا مقدارا ما من أو إلى جميع قيم المتغير لمـــا تأثرت قيمة الانحراف المعيارى .

ففى المثال السابق ، لتوفير الجهد فى حساب الانحراف المعيارى نطرح مقدارا ثابتا من كل من الأعداد الثلاثة وليكن ٧ . ثم نكون جدولا مكونا من ثلاثة أعمدة كما يلى .

	س	$\bar{س} = س - ٧$	$\bar{س}^2$
	٥	٢ —	٤
	٧	صفر	صفر
	٩	٢ +	٤ .
المجموع	٢١	صفر	٨

$$ع = \sqrt{\frac{ن \, مج \, س^2 - (مج \, س)^2}{ن \, (ن - ١)}}$$

$$= \sqrt{\frac{٣ \times ٨ - \text{صفر}}{٣ \times ٢}} = \sqrt{\frac{٢٤}{٦}} = \sqrt{٤} = ٢$$

وهو نفس الجواب السابق .

وتفسير التباين لا يعد أمرا سهلا ، فهو لا يعدو أن يكون قيمة عددية صرفة تزيد بزيادة تشتت واختلاف الدرجات .

ولكن التباين له أساس منطقي . فالمتوسط الحسابي هو القيمة المركزية للتوزيع ، وبذلك يكون من الطبيعي أن يعتمد مقياس التشتت على الانحراف عن هذه القيمة المركزية . كما أننا ذكرنا فيما سبق أن مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط أقل من مجموع مربعات الانحرافات عن أي قيمة أخرى . فهذه تدعم الأساس المنطقي لاختيار مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط كمقياس للتشتت .

والنتيجة العملية تربيع الانحرافات تسهم جميع الانحرافات إسهاما موجبا في المجموع الكلي لمربعات الانحرافات لأن الانحرافات السالبة تصبح موجبة بعد تربيعها .

كما أن الانحرافات الكبيرة بعد تربيعها تسهم بدرجة كبيرة في المجموع الكلي (فالانحراف ٤ وحدات مثلا يصبح ١٦ بعد تربيعه ، أما الانحراف ٨ وحدات وهي ضعف الانحراف ٤ وحدات فيسهم بعد تربيعه بقدر ٦٤ في المجموع الكلي لمربعات الانحرافات) . ولذا فإن القيمة النهائية تتأثر بوجه خاص بالقيم التي تبعد كثيرا عن المتوسط بسبب عملية التربيع .

كما أن قسمة مجموع مربعات الانحرافات على ن — ١ يجعل التباين من نوع « متوسط مربعات الانحرافات » وبذلك يمكن للباحث أن يقارن تباين التوزيعات التي تتكون من عدد مختلف من القيم أو الدرجات بنفس الطريقة التي يقارن بها متوسطات التوزيعات التي تتكون من عدد مختلف من القيم .

التمثيل الهندسى للانحرافات والتباين والانحراف المعيارى :

إذا افترضنا أن لدينا درجات عينة مكونة من سبعة طلاب . فإنه يمكننا إيجاد المتوسط الحسابى لهـــذه الدرجات ، وانحراف كل درجة منها عن المتوسط ، ومربعات هذه الانحرافات كما هو مبين بالجدول رقم (١٧) الآتى :

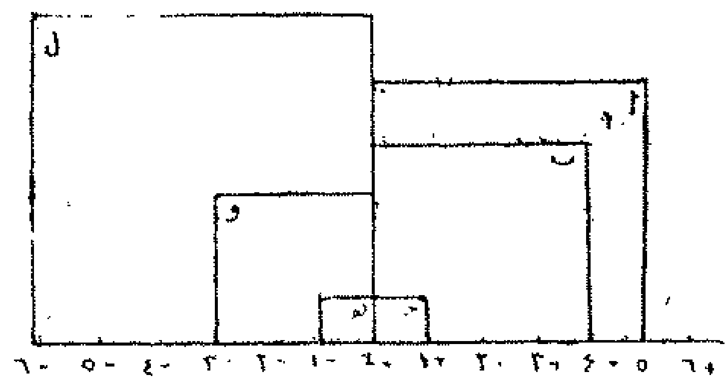
الطالب	الدرجة (س)	الانحراف (ح)	مربع الانحراف (ح^2)
أ	١٥	+ ٥	٢٥
ب	١٤	+ ٤	١٦
جـ	١١	+ ١	١
د	١٠	صفر	٠
هـ	٩	— ١	١
و	٧	— ٣	٩
ل	٤	— ٦	٣٦
المجموع	مجـ س = ٧٠	مجـ ح = صفر	مجـ ح^2 = ٨٨
المتوسط	= ١٠	= صفر	= ١٢,٥٧
الانحراف المعيارى			= ٣,٥٥

جدول رقم (١٧)
متوسط ومربعات الانحرافات من المتوسط
لدرجات عينة مكونة من سبعة طلاب

ولكى نمثل هذه البيانات هندسيا يجب أن نرسم خطا أفقيا يوضح ميزان القياس . ولكننا هنا لن نضع الدرجات الأصلية للطلاب السبعة على هذا الخط ، ولكننا سنجعل نقطة الأصل (نقطة الصفر) هى المتوسط الحسابى . وهذا هو ما يحدث عندما نعتمد على انحرافات الدرجات الأصلية عن المتوسط الحسابى .

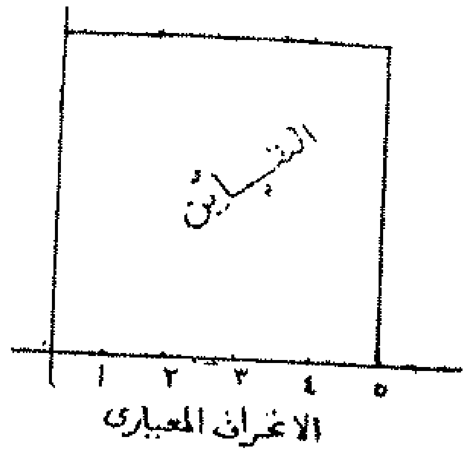
واستخدام هذه الانحرافات لا يغير من الترتيب النسبي للطلاب السبعة . ولكننا فقط نكون قد أزحنا نقطة الصفر ١٠ وحدات (قيمة المتوسط) على ميزان القياس (الخط الأفقي) .

ومربعات الانحرافات عندئذ تمثل بالمساحات أو المربعات المنشأة على خط الانحرافات كما هو موضح بالشكل رقم (١٨) . وهذه المربعات تناظر مربعات الانحرافات المبينة بجدول رقم (١٧) .



شكل رقم (١٨)
الانحرافات عن المتوسط والتباين والانحراف المعياري
لعينة مكونة من سبعة طلاب

ويتضح من هذا الشكل كيف أن الانحرافات الكبيرة بعد تربيعها تزيد بدرجة أكبر من تربيع الانحرافات الصغيرة ، ومجموع مربعات الانحرافات يمثل هندسيا بالمساحة المساوية لمجموع جميع المربعات وهي ٨٨ وحدة مربعة . وإيجاد المتوسط الحسابي لهذه المساحة الكبرى يكون بمثابة تقسيم تناسبي للمساحة بين الطلاب السبعة . فهذا المتوسط هو الجزء من المساحة الذي يخص كل طالب إذا كان نصيب كل منهم يساوي نصيب الآخر . فهذا هو التباين الذي يمكن تمثيله هندسيا بالمربع المبين بالشكل رقم (١٩) الآتي :



شكل رقم (١٩)
التمثيل الهندسي للانحراف المعياري والتباين

فالمربع المنشأ على خط القاعدة طول ضلعه الذي يمثل الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للمساحة . ويمكن بشروط معينة تجزئة التباين إلى مكونات ترجع إلى مصادر مختلفة . وهذه تمكن الباحثين من إجابة سؤال مثل : إذا كان هناك تباين في مجموعة من الدرجات ، ما هي نسبة التباين التي ترجع إلى السبب أ في مقابل السبب ب ؟ وغيرها من الأسئلة .

وسوف نتناول هذا النوع من التحليل بالتفصيل في الجزء الثاني من الكتاب .

أثر الإضافة أو الطرح أو الضرب في ثابت على الانحراف المعياري :

إذا أضفنا مقداراً ثابتاً إلى كل درجة من درجات العينة لا يتغير الانحراف المعياري . إذ ربما يجد الباحث أن الاختبار الذي طبقه على الطلاب غاية في الصعوبة فيضطر إلى إضافة ١٠ درجات مثلا إلى كل درجة . وبالرغم من هذا يظل الانحراف المعياري للدرجات بعد الإضافة مساويا للانحراف المعياري للدرجات الأصلية . وذلك لأننا إذا فرضنا أن الدرجة الأصلية هي س ، فإن الدرجه بعد إضافة مقدار ثابت وليكن جـ تصبح س + جـ . وإذا كان متوسط الدرجات الأصلية سَ ، فإن متوسط الدرجات بعد إضافة الثابت تصبح سَ + جـ .

ويكون الانحراف عن المتوسط الجديد هو :

$$(س + جـ) - (\overline{س} + جـ) = س - \overline{س}$$

وهذا بالطبع يساوى انحراف الدرجات الأصلية عن المتوسط الأصلى .

ونظراً لعدم تغير قيمة الانحراف بعد إضافة مقدار ثابت فإن الانحراف المعيارى لايتغير أيضاً نتيجة لإضافة المقدار الثابت .

ولتوضيح ذلك نفترض أننا أضفنا مقداراً ثابتاً وليكن ٥ على كل درجة من الدرجات ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ التى متوسطها ٧ فتصبح الدرجات هى ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ومتوسطها يصبح ٧ + ٥ أى ١٢ . والانحرافات عن المتوسطات تساوى — ٦ ، — ٣ ، صفر ، + ٣ ، + ٦ هى نفسها فى الحالتين وبذلك تظل قيمة الانحراف المعيارى ٤,٧٤ .

ويمكن الحصول على نتائج مماثلة إذا طرحنا مقداراً ثابتاً من كل درجة .

أما إذا ضربنا كل درجة فى مقدار ثابت فإن قيمة الانحراف المعيارى تساوى القيمة الأصلية مضروبة فى القيمة المطلقة لهذا المقدار الثابت .

فإذا كان الانحراف المعيارى لدرجات اختبار ما هو ٤ ، وضربنا كل درجة منها فى ثابت مقداره ٣ ، فإن الانحراف المعيارى الناتج يساوى ٤ × ٣ = ١٢ .

ولتوضيح ذلك نفترض أن المتوسط الأصلى لمجموعة من الدرجات هو $\overline{س}$. فإذا ضربنا كل درجة منها فى ثابت مقداره جـ يصبح المتوسط جـ $\overline{س}$. ويصبح الانحراف عن المتوسط هو جـ س — جـ $\overline{س}$ = جـ (س — $\overline{س}$) ، وبعد تربيع هذا المقدار وجمع انحرافات الدرجات عن المتوسط والقسمة على ن — ١ نحصل على :

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجـ} (\text{جـ س} \quad \text{جـ} \overline{س})^2}{ن - ١}$$

$$= \frac{\text{جـ}^{2}\ \text{مجـ}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن} - 1}$$

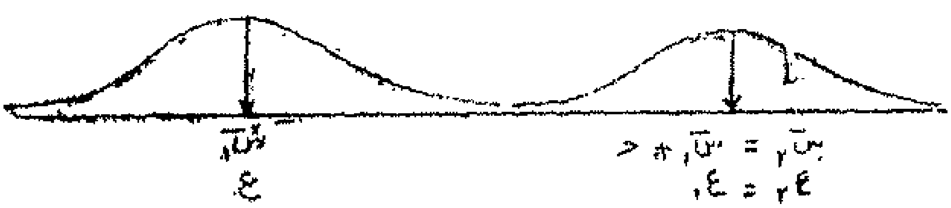
$$= \text{جـ}^{2}\ \text{ع}^{2}$$

ويكون الانحراف المعياري الجديد = جـ ع

أى يساوى الثابت مضروبا فى الانحراف المعيارى الأصلى .

وخلاصة هذا أن إضافة مقدار ثابت إلى كل درجة يؤدى إلى زيادة متوسط الدرجات بقدر هذا الثابت ، ولكن هذه الإضافة لاتؤثر فى قيمة الانحراف المعيارى .

فإذا نظرنا إلى شكل رقم (٢٠) نتبين أن إضافة مقدار ثابت إلى كل درجة يؤدى إلى إزاحة التوزيع إلى اليمين على طول المحور الأفقى ولكنه لايغير من شكل التوزيع أو تشتت الدرجات .

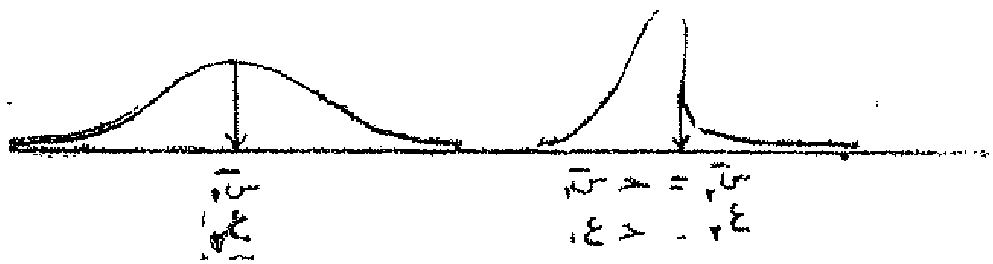


شكل رقم (٢٠)

اضافة مقدار ثابت موجب جـ
الى كل درجة

أما ضرب كل درجة فى مقدار ثابت جـ أكبر من الواحد الصحيح يؤدى إلى إزاحة موضع المتوسط الحسابى إلى اليمين على طول المحور الأفقى ، وفى نفس الوقت يمد النصف الأعلى للتوزيع أكثر من النصف الأسفل ، وبذلك يتغير المنحنى

المتماثل حول المحور الرأسي إلى منحنى ملتو التواء موجبا كما هو مبين بشكل رقم (٢١) ويزيد الانحراف المعياري بمقدار يتناسب مع هذا المقدار الثابت .

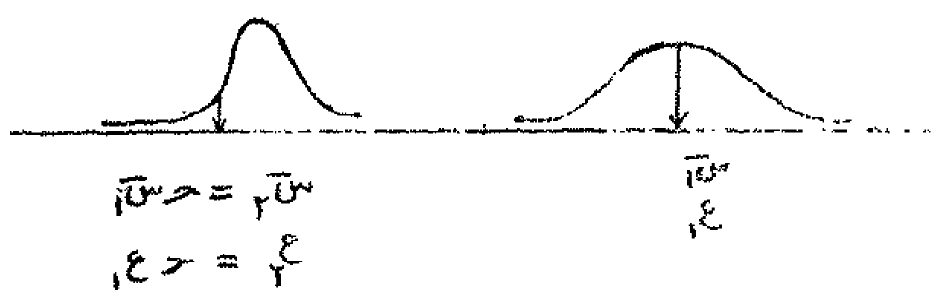


شكل رقم (٢١)

ضرب كل درجة فى مقدار ثابت جـ

اكبر من الواحد الصحيح

وبالعكس إذا ضربنا كل درجة فى مقدار ثابت جـ أقل من الواحد الصحيح فإن هذا يؤدى إلى إزاحة التوزيع إلى اليسار على طول الخط الأفقى كما هو مبين بشكل رقم (٢٢) كما يؤدى إلى تقلص النصف الأعلى للتوزيع أكثر من النصف الأسفل مما يجعل المنحنى ملتويا التواء سالبا ويقل الانحراف المعيارى بمقدار يتناسب مع هذا المقدار الثابت .



شكل رقم (٢٢)

ضرب كل درجة فى مقدار ثابت جـ

اقل من الواحد الصحيح

ويمكن أن نبين أهمية استخدام هذه القواعد بالمثال الآتى :

نفترض أن معلما طبق على طلابه اختبارا غاية فى الصعوبة ووجد أن متوسط الدرجات ٥٠ والانحراف المعيارى ١٠ ، وأراد أن يعدل الدرجات بحيث يصبح المتوسط ٧٥ . فإحدى طرق إجراء ذلك أن يضيف ٢٥ إلى كل درجة وبذلك تزيد المتوسط الحسابى من ٥٠ إلى ٧٥ ، ولكن هذا لن يغير من قيمة الانحراف المعيارى وهى ١٠ .

والطريقة الاخرى أن يضرب كل درجة فى المقدار ١,٥ ، فهذا التحويل للدرجات يؤدى إلى زيادة المتوسط بقدر ٢٥ درجة أى يزيد المتوسط من ٥٠ إلى ٧٥ ، كما يزيد الانحراف المعيارى من ١٠ إلى ١٥ درجة .

ويستفيد من هذه التحويلة الطلاب الذين تقع درجاتهم أعلى المتوسط . فالطالب الذى حصل على الدرجة ٦٠ فى الاختبار الأصلى تصبح درجته ٩٠ نتيجة لعملية الضرب فى المقدار الثابت . ولكن درجته تصبح ٨٥ إذا أضفنا إليها ٢٥ . وعلى العكس من ذلك ، فإن عملية الضرب فى مقدار ثابت لاتفيد الطالب الذى حصل على درجة أقل من المتوسط . فإذا كانت درجته ٣٥ مثلا فى الاختبار الأصلى فإن درجته تصبح ٥٢,٥ فقط نتيجة لعملية الضرب ولكنها تصبح ٦٠ إذا أضفنا إلى الدرجة الأصلية ٢٥ .

حساب الانحراف المعيارى إذا كانت البيانات مجمعة :

توجد عدة طرق لحساب الانحراف المعيارى إذا كانت البيانات مجمعة فى توزيع تكرارى أبسطها الطريقة التى سنعرض لها هنا وتسمى الطريقة المختصرة ، لأنها توفر كثيرا من الوقت اللازم لإجراء العمليات وخاصة إذا كانت الفئات

كثيرة ، وقيم الدرجات كبيرة ، فضلا عن أن الجدول الذى تتطلبه هذه الطريقة تحسب عن طريقه المتوسط الحسابى ، وبالطبع فإننا نحتاج دائما إلى المتوسط الحسابى فى دراسة ووصف التوزيعات .

وفكرة هذه الطريقة تعتمد أيضا على الحقيقة التى سبق أن ذكرناها وهى أن الإنحراف المعيارى هو مقدار ثابت للتوزيع الواحد . ولا تتأثر قيمته بنقل نقطة الأصل طالما كنا محتفظين بوحدة القياس . وعادة ننقل نقطة الأصل إلى مركز إحدى فئات التوزيع .

وتعتمد هذه الطريقة على فكرة الحصول على مجموع مربعات انحرافات الدرجات عن مركز هذه الفئة الافتراضية بدلا من استخدام المتوسط الحقيقى الذى ربما تكون قيمته كسرية . أما المتوسط الفرضى فهو القيمة التى تنحرف عن مراكز الفئات بأعداد صحيحة مثل — ٦ ، — ٣ ، ٠ ، ١ ، ٥ ، ... الخ ، ويمكن إيجاد مجموع مربعات هذه الانحرافات ممثلة بطول الفئة ثم قسمة الناتج على التكرار الكلى لكى نحصل على متوسط مجموع مربعات الانحرافات .

ثم تجرى عملية تصحيح هذا المتوسط بحيث ندخل فى اعتبارنا أننا قد حسبنا الانحرافات عن متوسط فرضى بدلا من المتوسط الحقيقى كما هو مبين بالصورة الرياضية الآتية . فإذا ما تساوى المتوسطان الفرضى والحقيقى كان المقدار المستخدم فى التصحيح يساوى صفرا . وبعد استخراج الجذر التربيعى لمتوسط مجموع مربعات الانحرافات بعد تصحيحها نضرب الناتج فى طول الفئة لنحول وحدات القياس مرة أخرى إلى وحدات الدرجات الخام .

والقانون المستخدم فى هذه الحالة هو :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ت ح^2}{ن} - \left(\frac{مجـ ت ح}{ن}\right)^2} \times ف \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

حيث ف ترمز إلى طول الفئة

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الصورة نفترض أن لدينا جدول التوزيع التكرارى الآتى (جدول رقم ١٨) :

(١) الفئات	(٢) التكرار (ت)	(٣) مراكز الفئات	(٤) ح	(٥) ت×ح	(٦) ت × ح٢	(٧) ت(ح+١)٢
٢٠ — ٢٩	٣	٢٤,٥	+٤	١٢	٤٨	٧٥
٣٠ — ٣٩	٨	٣٤,٥	+٣	٢٤	٧٢	١٢٨
٤٠ — ٤٩	١٢	٤٤,٥	+٢	٢٤	٤٨	١٠٨
٥٠ — ٥٩	٢٠	٥٤,٥	+١	٢٠	٢٠	٨٠
٦٠ — ٦٩	٣٦	٦٤,٥	صفر	صفر	صفر	٣٦
٧٠ — ٧٩	٣٣	٧٤,٥	—١	—٣٣	٣٣	صفر
٨٠ — ٨٩	٢٤	٨٤,٥	—٢	—٤٨	٩٦	٢٤
٩٠ — ٩٩	١٦	٩٤,٥	—٣	—٤٨	١٤٤	٦٤
١٠٠ — ١٠٩	٧	١٠٤,٥	—٤	—٢٨	١١٢	٦٣
١١٠ — ١١٩	٢	١١٤,٥	—٥	—١٠	٥٠	٣٢
المجموع	١٦١			—٧٧	٦٢٣	٦١٠

جدول رقم (١٨)

خطوات حساب الانحراف المعيارى بالطريقة المختصرة

ويمكن تلخيص الخطوات التى تتبع لحساب الانحراف المعيارى للبيانات المجمعة فى الخطوات الآتية :ـ

١ — نختار فئة منتصف التوزيع بحيث تناظر أكبر تكرار لتيسير العمليات الحسابية ونضع أمامها صفرا .

٢ — نضع أمام الفئة التي تعلوها مباشرة + ١ والتي تليها + ٢ وهكذا . ثم نضع أمام الفئة التي تقع أسفلها مباشرة — ١ والتي تليها — ٢ وهكذا . وهذه تمثل الانحرافات (ح) عن مركز الفئة الافتراضية وندونها في العمود رقم (٤) بالجدول السابق .

٣ — نضرب التكرار (ت) في الانحراف (ح) ، ونسجل النتائج في العمود رقم (٥) ونجمع قيم ت × ح وندونها أسفل الجدول .

٤ — نضرب الانحراف (ح) في القيم المبينة بالعمود رقم (٥) ، لنحصل على قيم ت × ح² وندون النتائج في العمود رقم ٦ . ونجمع قيم ت × ح² وندونها أسفل الجدول .

٥ — نجمع التكرار الكلي ت وندونه أسفل الجدول .

٦ — نطبق الصورة السابقة رقم (٨) وهي :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ ت\ ح^{2}}{ن} - \left(\frac{مجـ\ ت\ ح}{ن}\right)^{2}} \times ف$$

$$= \sqrt{\frac{٦٢٣}{١٦١} - \left(\frac{٨٧}{١٦١}\right)^{2}} \times ١٠$$

$$= \sqrt{٣,٨٧٠ - (٠,٥٤٠)^{2}} \times ١٠$$

$$= ١٠\sqrt{٣,٥٧٨} = ١,٨٩٢ \times ١٠$$

$$= ١٨,٩٢$$

التحقق من صحة العمليات الحسابية :

يمكن التحقق من صحة العمليات الحسابية فى الجدول السابق لو أضفنا عموداً آخراً لحساب القيمة ت (ح + ١)^{٢} واستخدام المطابقة :

مجـ ت (ح + ١)^{٢} = مجـ ت ح^{٢} + ٢ مجـ ت ح + ن ...... (٩)

وهذا يسمى بتحقيق شارلير

فى المثال السابق :

مجـ ت (ح+١)^{٢} = ٦١٠

، مجـ ت ح^{٢} = ٦٢٣

، مجـ ت ح = — ٨٧

، ن = ١٦١

مجـ ت ح^{٢} + ٢ مجـ ت ح + ن = ٦٢٣ + ٢ (— ٨٧) + ١٦١

= ٦٢٣ — ١٧٤ + ١٦١

= ٨٧٤ — ١٧٤

= ٦١

وواضح أن هذا = مجـ ت (ح + ١)^{٢}

وبذلك نتأكد أن العمليات الحسابية صحيحة .

ونظراً لاننا اعتمدنا فى تطبيق القانون السابق على أن ... جميع الدرجات (التكرار) فى فئة ما تتركز فى منتصف الفئة ، فإن الخطأ الناشيء عن هذا الافتراض والذى يسمى بخطأ التجميع Grouping Error يكون كبيراً إذا كان مدى الفئة متسعاً . وهنا يجب تصحيح هذا الخطأ باستخدام معادلة تصحيح شبرد Sheppard's Correction وهى :

الانحراف المعيارى بعد تصحيحه من خطأ التجميع

$$= \sqrt{ع^{٢} - \frac{ف^{٢}}{١٢}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٠)$$

حيث ع ترمز إلى الانحراف المعيارى المحسوب من البيانات المجمعــــة ، ف طول الفئة .

وبالتعويض من معادلة تصحيح شبرد فى الصورة رقم (٨) وهى :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ت ح^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ت ح}{ن}\right)^{٢}} \times ف$$

نجد أن الانحراف المعيارى بعد تصحيحه من خطأ التجميع

$$= \sqrt{\frac{مجـ ت ح^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ ت ح}{ن}\right)^{٢} - ٠,٨٣٣} \times ف \quad ...... \quad (١١)$$

وقد وجد أنه عندما يكون طول الفئة ف مساوياً ٠,٤٩ ع ، فإن معادلة شبرد تعطى فرقاً قدره ٠,٠١ بين قيمتى الانحراف المعيارى بعد وقبل تصحيحه.

وهذا الخطأ يمكن التغاضى عنه إلا إذا أردنا الدقة الكاملة أو احتجنا استخدام الانحراف المعيارى الناتج فى عمليات إحصائية أخرى . إما إذا كان طول الفئة حوالى نصف قيمة الانحراف المعيارى (أى ٠,٤٩ ع) كما ذكرنا وكانت العينة كبيرة ، وإذا كان المدى حوالى ستة انحرافات معيارية فإنه يكون لدينا ١٢ فئة وإذن يجب أن تكون ١٢ فئة هى الحد الأدنى لحساب الانحراف المعيارى بدقة فى حالة العينات الكبيرة . فإذا كان لدينا أقل من ١٢ فئة يجب استخدام معادلة تصحيح شبرد لمزيد من الدقة أى أن حجم العينة ، وعدد فئات التوزيع ،

والهدف من الحصول على الانحراف المعيارى هو الذى يحدد استخدام هذه المادة من عدمه .

تفسير الانحراف المعيارى :

فى مناقشتنا للانحراف المعيارى رأينا أن تشتت مجموعة من الدرجات يكون صغيراً إذا تجمعت الدرجات بدرجة أكبر حول المتوسط ، ويكون التشتت كبيراً إذا انتشرت الدرجات انتشاراً واسعاً حول المتوسط . ولذا يمكن القول أنه إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من الدرجات صغيراً تميل الدرجات إلى التراكم حول المتوسط ، وإذا كان الانحراف المعيارى كبيراً تنتشر الدرجات انتشاراً واسعاً حول المتوسط .

وربما يتساءل البعض عما نقصده بانحراف معيارى صغير وانحراف معيارى كبير . ولتوضيح ذلك يجب أن نذكر نظرية هامـــة تسمى نظرية شيبيشيف Chebyshev's Theorem نسبة إلى عالم الرياضيات الروسى شيبيشيف (١٨٢١ — ١٨٩٤) وهى أنه تقع $(1 - \frac{1}{ك^2}) \times 100$ فى المائة من مجموعة الدرجات فى مدى قدره ك انحراف معيارى عن متوسطها الحسابى .

فإذا كانت ك = ٢ فإنه يمكننا القول بأنه تقع $(1 - \frac{1}{2^2}) \times 100$ $= \frac{3}{4} \times 100 = 75$ فى المائة على الأقل من أى مجموعة بيانات فى مدى قدره انحرافان معياريان عن المتوسط .

ففى المثال السابق الموضح بالجدول رقم (١٨) نجد أن ٧٥٪ على الأقل من الدرجات تقع بين س — ٢ع ، س + ٢ع

أى بين ٥٩,١ - ٢ × ١٨,٩٢ = ٥٩,١٠ — ٣٧,٨٤ = ٢١,٢٦

، ٥٩,١ + ٢ × ١٨,٩٢ = ٥٩,١٠ + ٣٧,٨٤ = ٩٦,٩٤

ويمكن التحقق من ذلك بالرجوع إلى البيانات الموضحة بجدول رقم (١٨) حيث نجد أن هناك حوالى ١٥٢ درجة من بين ١٦١ درجة أى حوالى ٩٥ في المائة من الحالات تقع بين ٢١ ، ٩٧ . أى أن نسبة لا تقل عن ٧٥٪ تقع بين هاتين الدرجتين .

كما توضح نظرية شيبيشيف أنه عندما يكون ك = ٥ فإنه يجب أن تقع ٩٦٪ من الدرجات على الأقل بين ٥ انحرافات معيارية عن متوسطها . وعندما تكون ك = ١٠ فإنه يجب أن تقع ٩٩٪ من الدرجات على الأقل بين ١٠ إنحرافات معيارية عن متوسطها .

والنظرية تطبيقات أكثر عند استخدام الأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات . وقد قصدنا ذكرها هنا باختصار لتوضيح كيف يدل الانحراف المعيارى على انتشار مجموعة من البيانات .

ومن هذا يتضح أن الانحراف المعيارى هو مقياس حساس لدرجة انحراف أو ابتعاد قيم المتغير عن المتوسط الحسابى . وصغر قيمته تدل على أن هذه القيم متقاربة ومتراكمة بالقرب من هذا المتوسط .

وهذا يعنى أن تشتتها صغير والعكس بالعكس. فالانحراف المعيارى هو إذن أفضل مقاييس التشتت لأنه مبنى على أساس منطقى سليم ويستخدم فى حسابه طريقة موضوعية تتناول جميع قيم المتغير . وهو يتميز على بقية مقاييس التشتت بأنه يستجيب للمعالجة الرياضية .

ولذا لا يمكن الاستغناء عنه فى حساب أهم المقاييس الإحصائية الأخرى كمعاملات الالتواء والتفرطح والارتباط ، كما لا يمكن الاستغناء عنه فى تحليل التباين ودراسة العينات والحكم على ثبات التفسيرات والتنبؤات الإحصائية فهو يعد العمود الفقرى لكثير من طرق تحليل البيانات .

المقاييس النسبية للتشتت :

إن جميع مقاييس التشتت السابق ذكرها تكون قيمتها معطاة بدلالة وحدات قياس المتغير . وهى صالحة إذن لمقارنة المجموعات التى لها نفس الوحدات ، وبشرط أن تكون متوسطاتها متقاربة لأن التشتت مقياس يعتمد على الانحراف عن المتوسط .

ولكن ما هو الحال لو أراد الباحث مقارنة توزيعات ليس لها نفس الوحدات أو متوسطاتها مختلفة اختلافاً كبيراً ؟

وحتى لو استخدم الباحث نفس الوحدة لقياس نوعين من التوزيعات ، فإن مقارنة تجانس هذين التوزيعين لا يكون صحيحاً إذا اختلفت الدقة فى قياسهما .

فمثلا إذا قلنا أن الانحراف المعيارى لمجموعة مقاييس لوزن بعوضة هو ١ ,٠ من الجرام ، وأن الانحراف المعيارى لمجموعة مقاييس لوزن بيضة دجاجة هو ٦ ,٠ من الجرام ، فإن مقارنة هذين العددين لا تكون معقولة إذ من الواضح أن القياس فى حالة البيضة أدق كثيراً منه فى حالة البعوضة .

ومن هنا نشأت الحاجة إلى مقاييس نسبية للتشتت . فى مثل هذه المقارنات لابد أن يكون لدينا مقاييس يتوفر فيها شرطان :

الأول : أن يكون المقياس مطلقا أى لا يعتمد على الوحدات المستخدمة .

والثانى : أن يجمع بين مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

وأكثر هذه المقاييس استخداما هو المقياس الذى اقترحه « بيرسون » والذى يسمى « معامل الاختلاف Coefficient of Variation » .

وهو النسبة بين الانحراف المعيارى والمتوسط الحسابى . وتحول هذه النسبة عادة إلى نسبة مئوية .

أى أن : معامل الاختلاف = $\frac{ع}{س} \times ١٠٠$ . . . . (١٢)

فإذا كان الانحراف المعيارى لعينة ما = ٠,٢

والمتوسط الحسابى = ٢٤٠

فإن معامل الاختلاف = $\frac{٠,٢٠}{٢٤٠} \times ١٠٠$

= $\frac{٢٠}{٢٤٠} = ٠,٠٨٣ ٪$

فبدلا من مقارنة الأوزان المقيسة بالكيلو جرام مثلا بالأطوال مقيسة بالبوصة ، وبالأعمار مقيسة بالأعوام ، وبالأسعار مقيسة بالجنيهات فإننا نقارن معاملات الاختلاف المناظرة والتى تكون جميعها على صورة نسب مئوية .

غير أنه فى بعض التوزيعات التكرارية يتعذر حساب المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى كما فى التوزيعات المفتوحة . كما أن هذين المقياسين قد لا يكونان أنسب المقاييس فى بعض التوزيعات ، ولهذا نلجأ إلى مقاييس نسبية أخرى .

ومن هذه المقاييس ما يتوقف على الربيعين الأعلى والأدنى ويسمى :

معامل الاختلاف الربيعى وهو

= $\frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{\text{الربيع الثالث} + \text{الربيع الأول}} \times ١٠٠$ . . . . (١٣)

وهو مقياس مطلق يصلح لجميع التوزيعات كما يسهل إيجاده بالرسم .

كيف يختار الباحث مقياس التشتت المناسب عند تحليل البيانات :

هناك عدد من الاعتبارات يجب أن يأخذ بها الباحث عند اختياره لمقياس التشتت الذى يناسب موقفا معينا أو بيانات معينة نلخصها فيما يلى :

حساسية المقياس لتذبذب العينات بمعنى ثبوت القيمة النسبية للمقياس للعينات المسحوبة من نفس المجتمع الأصلي. فإذا كانت العينات مسحوبة بطريقة عشوائية فإنه يمكن ترتيب مقاييس التشتت من حيث مدى حساسيتها لتذبذب العينات من الأكثر ثباتاً إلى الأقل ثباتاً كما يلي :

الانحراف المعياري ، الانحراف المتوسط ، نصف المــدى الربيعي المدى المطلق .

وينعكس الترتيب السابق من حيث سرعة وسهولة حساب مقياس التشتت . وإذا كان الباحث مهتماً بحساب مقاييس إحصائية أخرى لمجموعة بياناته مثل تقدير متوسط المجتمـــع الأصلي أو دلالة الفروق بين متوسطات أو حساب معاملات الارتباطات أو معادلات الانحدار وما شابه ذلك فإن الانحراف المعياري يفضل على جميع مقاييس التشتت الأخرى .

ويمكن للباحث أن يختار بين الانحراف المعياري ، والانحراف المتوسط . ونظراً لأن الانحراف المعياري يعتمد على مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط فإنه يعطي وزناً أكبر للانحرافات المتطرفة . فإذا كان التوزيع يحتوي على عدد كبير من القيم المتطرفة في اتجاه ما أو في الاتجاهين ربمــا يستخدم الباحث الانحراف المتوسط ، وبخاصة إذا كان التوزيع ملتو التواء شديداً

أما نصف المدى الربيعي فهو لا يدخل في حسابه القيم المتطرفة وهو يفضل أحياناً لهذا السبب على الانحراف المعياري والانحراف المتوسط ، وهو يهتم بدرجة أكبر بالقيم الوسطى .

فإذا ما استخدم الباحث الوسيط كمقياس للنزعة المركزية يكون من الطبيعي أن يستخدم نصف المــدى الربيعي كمقياس للتشتت ، فكلاهما يعتمد على نفس القواعد وإذا كان التوزيع ناقصاً أو مبتوراً Truncated أو يحتوي على قيم غير محددة ، فإن نصف المدى الربيعي يكون هو مقياس التشتت المناسب .

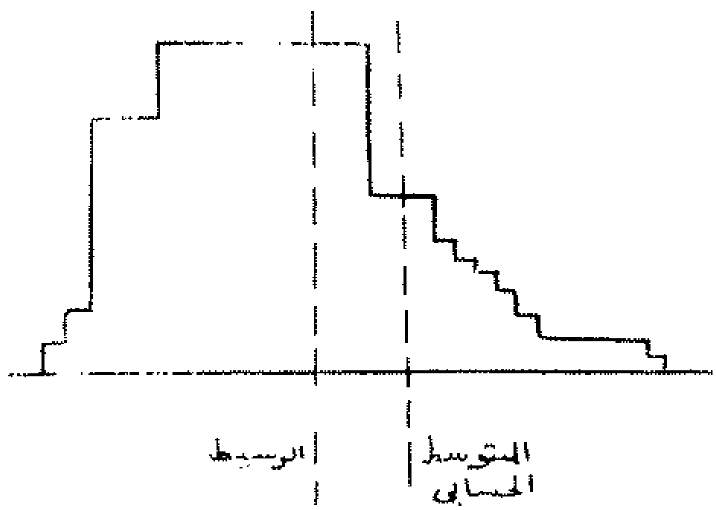
خصائص أخرى للتوزيعات التكراريه

عرضنا فيما سبق بعض خصائص التوزيعات التكراريه ومقاييس النزعه المركزية ومقاييس التشتت . وفي الحقيقه يمكن وصف البيانات بطرق كثيرة ومتعـــددة . فعلماء الإحصاء يمدوننا باستمرار بطرق جديدة لوصف البيانات العددية والبيانات النوعية . وسوف نعرض هنا باختصار لطرق وصف الشكل العام للتوزيعات التكرارية .

وبالرغم من أن التوزيع التكرارى يمكن أن يتخذ أى شكل إلا أنه توجد بعض الأشكال النموذجية التي تناسب معظم التوزيعات التي يقابلها الباحث في المواقف الفعلية ، وقد عرضنا لها في الفصل الثاني . ومن بين هذه التوزيعات التوزيع الاعتدالي وهو توزيع يشبه الجرس المقلوب ، والتوزيع الملتوى التواء موجبا والذى تتراكم فيه قيم المتغير حول النهايه الدنيا للتوزيع . والتوزيع الملتوى التواء سالبا حيث تتراكم فيه قيم المتغير حول النهاية العليا للتوزيع

فإذا لم يكن التوزيع اعتداليا فإنه يجب أن لا يكتفى الباحث عنـــد وصف التوزيع بالمتوسط والانحراف المعيارى . وإنما يحتاج إلى مقياس آخر يعبر عن مدى ابتعاد التوزيع عن الاعتدالية أى درجه التوائه ومن المرغوب فيه أيضا أن يصف التوزيع بمقياس آخر يعبر عن درجه تفرطح أو تدبب التوزيع

وتوجد عدة طرق لقياس مدى التواء التوزيعات التكراريه . وأبسط هـذه الطرق تعتمد على الفكرة الموضحه بالشكل البياني رقم (٣٠) .



شكل رقم (٢٣)
موضع كل من المتوسط الحسابى والوسيط
فى توزيع ملتو التواء موجبا

فهنا نجد أن التوزيع له ذيل متجه نحو اليمين . ولذلك نجد الوسيط يسبق المتوسط الحسابى (وينعكس هذا الترتيب إذا كان التوزيع ملتو التواء سالبا) . واعتماداً على هذا الفرق توصل بيرسون Pearson إلى مقياس يسمى معامل الالتواء وهو :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{٣ (المتوسط الحسابى – الوسيط)}}{\text{الانحراف المعيارى}} \quad \cdots \quad (\text{١٤})$$

وهنا نقسم ثلاثة أمثال الفرق بين المتوسط والوسيط على الانحراف المعيارى وذلك لكى نجعل شكل التوزيع مستقلا عن وحدات القياس المستخدمة .

فإذا كان متوسط توزيع ما ٥٦,٧ ، والوسيط ٥٦,٢ ، والانحراف المعيارى ١٥,٤ فإن :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{٣\,(٥٦,٧ - ٥٦,٢)}{١٥,٤}$$

$$= ٠,٠٩٧$$

ونظراً لأن هذه القيمة قريبة جـــداً من الصفر فهذا يدل على أن التوزيع متماثل تقريبا .

العزوم حول المتوسط الحسابى :

فى الحقيقة يمكن وصف التواء التوزيع بدرجة تقريبية بطرق مختلفة أحدها هو الطريقة السابقة التى اعتمدت على الفرق بين المتوسط الحسابى والوسيط مقسوما على الانحراف المعيارى .

ويمكن الاعتماد على الإرباعى الأعلى والإرباعى الأدنى للتوزيع كما رأينا عند مناقشتنا لنصف المدى الربيعى وهو أحد مقاييس التشتت .

أما إذا أردنا الحصول على مقاييس دقيقة وثابتة لوصف الالتواء والتفرطح فإنه يفضل استخدام طريقة تعتمد على العزوم حول المتوسط الحسابى .

فالمتوسط الحسابى والانحراف المعيارى يرتبطان بعائلة من المقاييس الإحصائية تسمى العزوم Moments ، والعزوم الأربعة الأولى حول المتوسط هى :

$$م_١ = \frac{مج\,(س - \bar{س})}{ن} = \text{صفر} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (١٥)$$

$$م_٢ = \frac{مج\,(س - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{ن - ١}{ن}\,ع^٢ \quad . \quad . \quad . \qquad (١٦)$$

$$م_٣ = \frac{مج\,(س - \bar{س})^٣}{ن} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (١٧)$$

$$م_٤ = \frac{مج (س - \bar{س})^٤}{ن} \quad \ldots\ldots \quad (١٨)$$

ويرتبط مفهوم العزوم بعلم الميكانيكا . فإذا افترضنا أن لدينا رافعة مرتكزة على محور ، وأن هناك قوة $ق_١$ تؤثر على ذراع الرافعة على مسافة $س_١$ من المحور فإن حاصل ضرب $ق_١ \times س_١$ تسمى عزم القوة حول المحور . وإذا أثرت قوة أخرى $ق_٢$ على مسافة $س_٢$ من المحور ، فإن العزم الكلى يساوى $ق_١ \times س_١ + ق_٢ \times س_٢$. وإذا ربعنا المسافة س نحصل على العزم الثانى ، وإذا رفعناها إلى القوة الثالثة نحصل على العزم الثالث ، وهكذا .

وفى حالة التوزيعات التكرارية ، يمكن اعتبار نقطة الأصل تشبه محور ارتكاز الرافعة ، وأن تكرارات الفئات المختلفة تشبه القوى المؤثرة على مسافات مختلفة من نقطة الأصل .

ونلاحظ أن العزم الأول حول المتوسط يساوى صفر ، والعزم الثانى يساوى $\frac{ن - ١}{ن}$ مضروباً فى التباين غير المتحيز للعينة (سبق أن أوضحنا معنى عدم التحيز فى مناقشتنا للانحراف المعيارى) ، والعزم الثالث يستخدم للحصول على مقياس الالتواء ، ونحصل عن طريق العزم الرابع على مقياس التفرطح

مقاييس الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم :

أولا : مقياس الالتواء ($ل_١$) : Skewness

المقياس الشائع الاستخدام والذى يعتمد على العزم الثالث يعرف كالآتى :

$$ل_١ = \frac{م_٣}{م_٢ \sqrt{م_٢}} \quad \ldots\ldots \quad (١٩)$$

وهذا المقياس مبنى على فكرة أنه عندما يكون التوزيع ، أو توزيع أى مجموعة من القيم متماثلا ، فإن مجموع الانحرافات الموجبة عن المتوسط مرفوعة للقوة الثالثة (أى بعد تكعيبها) سوف تتوازن مع مجموعة الانحرافات السالبة عن المتوسط مرفوعة للقوة الثالثة .

ولذلك فإنه إذا كان التوزيع متماثلا تكون $م_٣ = ٠$ وينتج أن $ل_١ =$ صفر . أما إذا كان التوزيع غير متماثل فإن الانحرافات الموجبة مرفوعة للقوة الثالثة لا تتوازن مع الانحرافات السالبة مرفوعة للقوة الثالثة . وعندئذ $م_٣ \neq$ صفر ، وبالتالى $ل_١ \neq$ صفر .

فإذا كان التوزيع ملتويا التواء موجبا فإن $ل_١$ تكون موجبة . وإذا كان التوزيع ملتويا التواء سالبا تكون $ل_١$ سالبة . أما المقدار $م_٢ \sqrt{م_٢}$ قد استخدم فى مقام الكسر لضمان إمكانية مقارنة $ل_١$ عندما تكون التوزيعات مختلفة فى التشتت .

لذلك فإن $ل_١$ هو مقياس مستقل عن ميزان القياس أى أننا يمكننا مقارنة التواء مجموعة من القيم والقياسات مقارنة مباشرة سواء كانت بالجرام أو المتر أو درجات اختبار نفسى معين باستخدام المقياس $ل_١$.

ولتوضيح ذلك ، افترض أن لدينا مجموعتين من الأعداد أ ، ب :

						المتوسط
أ	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٠
ب	٦	٨	١٠	١١	١٥	١٠

ويمكن التعبير عن هذه الدرجات بواسطة انحرافاتها عن متوسطها كالآتى :

أ	٤ —	٢ —	صفر	٢ +	٤ +
ب	٤ -	٢ —	صفر	١ +	٥ +

فمجموعة الاعداد أ متماثلة أما المجموعه ب فهى غير متماثلة وعندما نرفع هده الانحرافات إلى القوة الثالثه نجد أن :

أ	٦٤	٨ -	صفر	٨ +	٦٤ +
ب	٦٤ -	٨ -	صفر	١ +	١٢٥ +

فبالنسبة إلى المجموعة أ تكون $م_٣ = ٠$ لأن :

$$م_٣ = \frac{مج(س - \overline{س})^٣}{ن}$$ وبالتالى فان $ل_١ =$ صفر ،

أما بالنسبة إلى المجموعة ب تكون $م_٣ = ١٠,٨٠$

أى أن توزيع المجموعة ب ملتو التواء موجبا .

ثانيا : مقياس التفرطح ($ل_٢$) : Kurtosis

المقياس الشائع الاستخدام والذى يعتمد على العزم الرابع يعرف كالآتى :

$$ل_٢ = \frac{م_٤}{م_٢^٢} - ٣ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٢٠)$$

ويعتمد هذا التعريف على فكرة أن الانحرافات الكبيرة عن المتوسط عندما ترفع إلى القوة الرابعة سوف تسهم إسهاما أكبر فى العزم الرابع للتوزيع من الانحرافات الصغيرة ، واستخدام $م_٢^٢$ فى المقام تمكننا من مقارنة التوزيعات المختلفة . أما الرقم ٣ الذى طرحناه من النسبة $\frac{م_٤}{م_٢^٢}$ فذلك لأن هذه النسبة $= ٣$ فى التوزيعات التكرارية فاذا كان التوزيع اعتداليا تصبح $ل_٢ =$ صفر . أما فى التوزيعات المدببة فان $ل_٢$ تكون أكبر من الصفر ، وفى التوزيعات المسطحة إلى حد ما تكون $ل_٢$ أصغر من الصفر .

ولتوضيح ذلك ، افترض أن لدينا مجموعتين من الأعداد أ ، ب :

أ	٦	٨	١٠	١٢	١٤
ب	٥,٦٤	٩	١٠	١١	١٤,٣٦

فإذا تأملنا الأعداد فى المجموعتين ربما نلاحظ أن توزيع كل من المجموعتين ليس مدببا . وفى الحقيقة فإن المجموعة أ أكثر تفرطحا من المجموعة ب ، وكل منهما له نفس المتوسط والانحراف المعيارى تقريبا ، وكلاهما متماثل ، ولكنهما يختلفان فى خاصية التفرطح . فعندما ترفع انحرافات أعداد كل من المجموعتين عن المتوسط إلى القوة الرابعة تصبح الأعداد كما يلى :

أ	٢٥٦	١٦	صفر	١٦	٢٥٦
ب	٣٦١,٣٦	١	صفر	١	٣٦١,٣٦

فبالنسبة إلى المجموعة أ تكون $م_4$ = ١٠٨,٨٠

وبالنسبة إلى المجموعة ب تكون $م_4$ = ١٤٤,٩٤

أما بالنسبة إلى كل من المجموعتين فإن $م_2$ = ٨,٠٠ ، وبالنسبة إلى المجموعة أ تكون $ل_2$ = — ١,٣٠ ، وبالنسبة إلى المجموعة ب تكون $ل_2$ = — ٠,٧٤ . أى أن كلا منهما مفرطح . ولكن المجموعة أ أكثر تفرطحا من المجموعة ب كما هو واضح من قيمتى $ل_2$.

متى يلجأ الباحث إلى حساب مقاييس الالتواء والتفرطح :

ذكرنا فيما سبق أن التوزيع يكون ملتويا إذا تراكمت الدرجات عند أحد أطراف التوزيع دون الطرف الآخر . وتوجد عدة أسباب لالتواء توزيعات الدرجات ، فمثلا إذا كان اختبار عقلى معين غاية فى السهولة أو غاية فى الصعوبة فإن توزيع درجات هذا الاختبار يكون ملتويا . وبعض المقاييس الفسيولوجية مثل مقاييس زمن الرجع وسرعة الأداء ... الخ يحتمل أن تكون توزيعات درجاتها ملتوية .

ويمكن أن يكون توزيع البيانات المقاسة على ميزان فترى أو رتبى ملتويا . فإذا كانت البيانات الفترية ملتوية فإنه يفضل استخدام الوسيط كمقياس للنزعة المركزية ، ونصف المدى الربيعى كمقياس للتشتت . وكثير من الأساليب الإحصائية تفترض أن توزيع الدرجات الخام لمتغير ما اعتدالى أو ليس بملتو .

فإذا كان التوزيع فى حقيقته اعتداليا يكون مقياس الالتواء صفراً وعندئذ ينطبق الوسيط على المتوسط ، وهنا لا داعى لتطبيق مقياس إحصائى ليبين أن التوزيع ليس ملتويا . ولكن الباحث يمكنه تحديد درجة الالتواء ويقرر ما إذا كان لابد من إجراء بعض التصحيحات (مثل تحويل ميزان القياس كما سنرى فيما بعد) قبل أن يستمر فى تحليل بياناته .

فلكى يجعل الباحث توزيع الدرجات قريبا من الاعتدالية — إذا لم يكن كذلك — ربما يلجأ إلى نوع من أنواع التحويلات غير الخطية على البيانات ولكن لسوء الحظ فإن هذه التحويلات تؤدى إلى مشكلات من نوع آخر عند تفسير البيانات .

وفى الحقيقة أن طبيعة البحث ، ونوع المتغيرات موضع الدراسة ، وحجم العينة تعتبر جميعها من العوامل التى يجب أن يأخذها الباحث فى اعتباره قبل أن يقرر ما إذا كان لابد من حساب مقاييس الالتواء والتفرطح . وينصح ماكنمار Mcnemar بعدم استخدام هذه المقاييس إذا كان عدد الدرجات يقل عن ١٠٠ ، ويجب أن يدرك الباحث أن التوزيعات الاعتدالية والملتوية لكثير من المتغيرات النفسية تكون مصطنعة وذلك لأنه يندر أن تكون الوحدات المستخدمة فى بناء المقاييس النفسية متساوية

فوحدات القياس غالباً ما تكون اعتبارية أو ربما تكون عرضية . فكثير من المتغيرات النفسية والتربوية تقاس بعدد العبارات التى يعطى كل فرد رأيه فيها أو عدد الأسئلة التى يجيب عنها كل منهم إجابة صحيحة .

وهنا يتحدد شكل التوزيع الناتج بدرجة كبيرة بالنسبة المئوية للعبارات التى أجيب عنها أو بصعوبة الأسئلة . فإذا كانت الأسئلة متوسطة الصعوبة بالنسبة لمجموعة ما ، فإننا نتوقع أن ميزان القياس سوف يؤدى إلى توزيع متماثل لدرجات المجموعة . وإذا كانت الأسئلة سهلة فإن الدرجات سوف تتراكم عند النهاية العليا للتوزيع (أى ينتج عنها توزيع ملتو التواء سالبا) . وإذا كانت الأسئلة صعبة فإن الدرجات سوف تتراكم عند النهاية السفلى للتوزيع . وفى غياب وحدات قياس متساوية لأداة القياس لا يمكننا حقيقة القول بأن التوزيع متماثل أو ملتو ، ولكن يمكننا القول فقط أن شكل التوزيع يعتمد على وحدات القياس المستخدمة .

تمارين على الفصل الرابع

١ ـــ احسب مقاييس التشتت الآتية للدرجات
٢ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٩ :

(أ) المدى المطلق .

(ب) الانحراف المتوسط .

(جـ) التباين .

(د) الانحراف المعيارى .

٢ ـــ إذا كان تباين عينة مكونة من ١٠٠ درجة هو ١٥ . أوجد مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط الحسابى للدرجات .

٣ ـــ إذا كان التباين المتحيز المحسوب لعينة مكونة من ٥ درجات هو ١٠ ، أوجد تقدير التباين غير المتحيز المناظر للتباين المتحيز .

٤ ـــ إذا كان تباين عينة مكونة من ن من الدرجات هو ٢٠ ، أوجد التباين فى الحالتين الآتيتين :

(أ) إذا ضربنا كل درجة فى ثابت مقداره ٥ .

(ب) إذا قسمنا كل درجة على ثابت مقداره ٤ .

٥ ـــ احسب العزم الثانى والثالث والرابع للدرجات ٤ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٦ . ثم احسب الانحراف المعيارى ومقياسى الالتواء والتفرطح .

٦ ـــ فيما يلى درجات مجموعتين من الطلاب :

المجموعة أ	٢	٣	٥	١٠	٢٠
المجموعة ب	٢	٤	٨	١٢	١٤

احسب مقياس الالتواء لكل من المجموعتين ، وقارن بينهما .

٧ — احسب الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى مستخدما تصحيح شبرد مرة وبدون استخدامه مرة أخرى .

الفئات	التكرار
٢٠ — ٢٩	١
٣٠ — ٣٩	٤
٤٠ — ٤٩	١٠
٥٠ — ٥٩	١٥
٦٠ — ٦٩	٨
٧٠ — ٧٩	٢

وبين هل يجوز استخدام تصحيح شبرد فى هذا التوزيع ؟ ولماذا ؟

٨ — احسب نصف المدى الربيعى للدرجات :

١٠٠ ، ١١٠ ، ١١٠ ، ١١٩ ، ١٣٠ ، ١٣٥ ، ١٣٥ ،
١٤٠ ، ١٤٠ ، ١٤٥ ، ١٤٥ ، ١٥٠ ، ١٦٠ .

٩ — اختار باحث ١٠ أفراد بطريقة عشوائية فى تجربة سيكلوجيه وعين خمسة أفراد منهـــم للمعالجة التجريبية الأولى والخمسة الآخرين للمعالجة التجريبية الثانية ، وحصل الباحث بعد انتهاء التجربة على البيانات الآتية :

المعالجة الأولى	المعالجة الثانية
١٧	١٤
٤	٣
٧	٣
١١	١١
١١	٩

(أ) احسب المتوسط وتباين مجموعة المعالجة الأولى .

(ب) احسب المتوسط وتباين مجموعة المعالجة الثانية .

(ﺟ) ما هو أفضل تقدير لمتوسط المجتمع الأصل وانحرافه المعيارى .

(د) هل يمكنك استنتاج وتبرير أن متوسط المجتمع الأصل الذى سحبت منه مجموعة المعالجة الأولى أكبر من متوسط المجتمع الأصل الذى سحبت منه مجموعة المعالجة الثانية ؟ وأن الانحرافين المعياريين لهما متساويان؟ ولماذا ؟

١٠ — احسب نصف المدى الربيعى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى وقارن بينهما .

الفئات	التكرار
٢٥ — ٢٩	١
٣٠ — ٣٤	صفر
٣٥ — ٣٩	٣
٤٠ — ٤٤	٦
٤٥ — ٤٩	٦
٥٠ — ٥٤	٦
٥٥ — ٥٩	٧
٦٠ — ٦٤	٤
٦٥ — ٦٩	٤
٧٠ — ٧٤	١
٧٥ — ٧٩	١
٨٠ — ٨٤	١
ن =	٤٠

الفصل الخامس

الدرجات المحولة

المئينيات

الرتب المئينية

الإعشاريات

الدرجات المعيارية

الدرجات التائية

تحويلات خطية أخرى

مقدمة :

بالرغم من أن خصائص التوزيعات التكرارية التي عرضنا لها في الفصول السابقة تساعدنا على وصف تلك التوزيعات ، إلا أنها لا تساعدنا كثيراً في تفسير كل درجة على حدة في التوزيع .

فمثلا ، إذا افترضنا أن أحد الطلاب في فصل ما قد حصل على الدرجة ٨٨ في اختبار ما ، فمعرفة قيمة الدرجة فقط دون معرفة طبيعة أو شكل توزيع درجات الاختبار لا تمكننا من تفسير هذه الدرجة ، إذ ربما تكون الدرجة أعلى أو أقل درجة في الفصل . ولكي نحدد موقع الدرجة بالنسبة إلى غيرها من الدرجات فإننا نحتاج إلى مزيد من المعلومات . فإذا علمنا أن متوسط الدرجات في هذا الاختبار ٨١ ، فإن هذا لا يعني أكثر من أن الدرجة ٨٨ تقع أعلى من المتوسط ويظل تفسيرنا للدرجة غير محدد . ولذلك فإننا نحتاج إلى مقاييس تعبر عن المركز النسبي للدرجة في التوزيع الكلي للدرجات . وتعتمد هذه المقاييس على إجراء أنواع معينة من التحويلات للدرجة المطلوب تفسيرها . ومن بين هذه المقاييس المئينيات والإعشاريات والدرجات المعيارية بأنواعها ، وهو ما سنعرض له في هذا الفصل. وتعتمد جميع هذه المقاييس على فكرة تحويل الدرجة الأصلية (تسمى الدرجة الخام) إلى درجة أخرى يمكن عن طريقها مقارنة درجة طالب ما بالنسبة إلى غيره من طلاب فصله ، أي أنها تمدنا بإطار مرجعي يمكن أن نقارن في ضوئه الدرجة بغيرها من الدرجات .

المئينيات Percentiles :

سبق أن عرفنا الوسيط بأنه النقطة التي تقسم التوزيع إلى قسمين متساويين . كما سبق أن عرفنا الإرباعيات بأنها النقط الثلاث التي تقسم التوزيع إلى أربعة أقسام متساوية. وعلى نفس الأساس يمكن تقسيم التوزيع إلى مائة جزء متساو ،

وتسمى نقط التقسيم حينئذ بالمئينيات . فالمئينيات هي الدرجات التي تقــل عنها أو تقابلها نسبة مئوية معينة من الأفراد .

فدرجة الفرد التي تقابل المئيني الخامس بالنسبة لمجموعته تدل على أنه يفوق ٥ ٪ من أفراد المجموعة ويقل عن ٩٥ ٪ من هؤلاء الأفراد . ولذلك فإن المئينيات تحدد بطريقة مباشرة المركز النسبي للفرد في مجموعته .

الرتب المئينية Percentile Ranks :

الرتبة المئينية المناظرة لدرجة ما هي النسبة المئوية لعدد الدرجات التي تقل قيمتها عن قيمة هذه الدرجة بالنسبة إلى المجموع الكلي للدرجات . وفكرة هذه الرتب فكرة مفيدة لأنها تعبر بوضوح عن وضع أو مركز أو رتبة أي درجة على مقياس مئوي .

فإذا كانت الرتبة المئينية للدرجة ٨٨ هي ٩٢ ، فإن هذا يعني أن ٩٢٪ من طلاب الفصل تقل درجتهم عن الدرجة ٨٨ ، بينما تزيد درجة ٨٪ من طلاب الفصل عن هذه الدرجة . ويجب أن نراعي أنه لا يمكننا تفسير الرتبة المئينية تفسيراً صحيحاً دون أخذ المجموعة المرجعية في اعتبارنا . فمثلا إذا حصل طالب على درجة رتبتها المئينية ٩٠ في اختبار ما فإنه يمكن لأول وهلة اعتبار أداء الطالب مرتفعا لأن الدرجة التي حصل عليها تجعله يفوق ٩٠٪ من أقرانه . ولكن إذا كانت المجموعة المرجعية التي نقارنه بها تتكون من مجموعة من الطلاب المتخلفين عقليا مثلا ، فإنه في هذه الحالة نعتبر أداءه في الاختبار منخفضاً . وبالمثل إذا حصل طالب على درجة رتبتها المئينية ١٢ مثلا في اختبار ما فإنه ربما يبدو لأول وهلة أن أداء الطالب منخفض لأن أداءه يفوق أداء ١٢٪ فقط من مجموعته ، ولكن

إذا كان هذا الطالب فى الصف السابع مثلا وقارناه بطلاب الصف التاسع فإنه يمكن اعتبار أن هذه الدرجة تدل على أداء جيد بالنسبة لطلاب الصف السابع .

ولذلك يجب أن نحتاط عند مقارنة المثينيات بعضها ببعض إذا اختلفت المجموعة المرجعية . فإذا حصل فرد ما على درجة تناظر المثينى ٦٠ فى اختبار نصف العام فى مادة الإحصاء ، وحصل زميل له فى فصل آخر على درجة تناظر المثينى ٩٠ فى نفس الاختبار ، فذلك لا يدل بالضرورة على أن زميله فى مركز أفضل منه فى هذه المادة . إذ ربما يكون أداء طلاب فصل زميله ضعيفا فى مادة الإحصاء مما جعله فى مركز نسبى مرتفع بالنسبة لأقرانه فى الفصل .

ولذلك يجب أن نتذكر دائما أن المثينى يستخدم لمقارنة درجة فرد ما فى مجموعة معينة بمجموعته حتى لا نقع فى مثل هذه الأخطاء التى ذكرناها .

إيجاد الرتب المثينية باستخدام المنحنى المتجمع النسبى :

عرضنا فى الفصل الثانى كيفية تكوين جدول التوزيع التكرارى المتجمع وجدول التوزيع التكرارى المتجمع النسبى . ويمكن باستخدام منحنى التوزيع التكرارى المتجمع النسبى تحديد الرتب المثينية المناظرة لأى درجة فى التوزيع ، وبالعكس يمكن تحديد الدرجة المناظرة لأى رتبة مثينية .

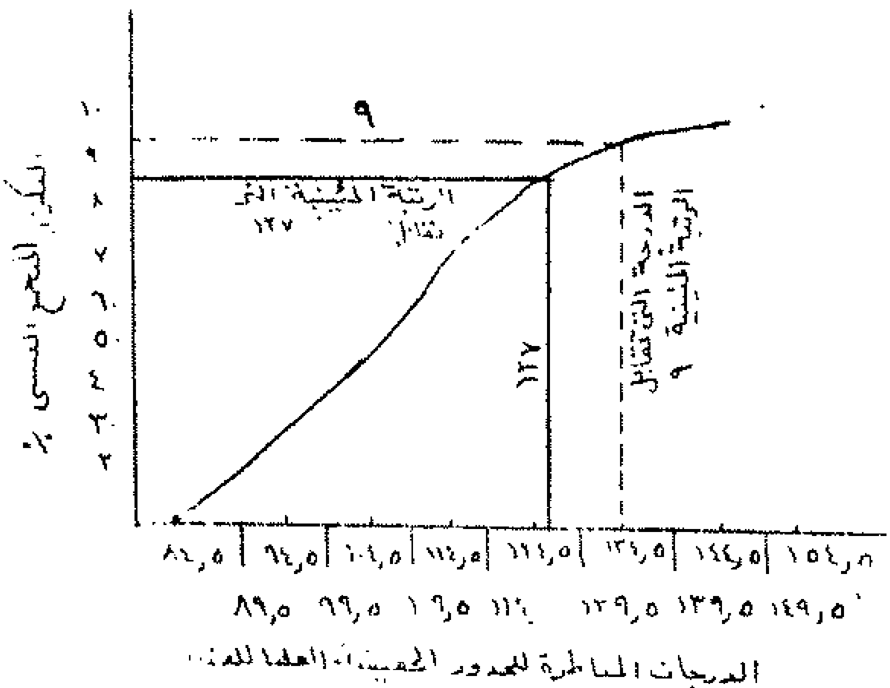
ولتوضيح ذلك افترض أن لدينا جدول التوزيع التكرارى المتجمع الآتى (جدول رقم ١٩) :

الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النسبي ٪
٨٠ — ٨٤	٣	٣	٣
٨٥ — ٨٩	٥	٨	٧
٩٠ — ٩٤	٥	١٣	١٢
٩٥ — ٩٩	٤	١٧	١٥
١٠٠ — ١٠٤	١٢	٢٩	٢٦
١٠٥ — ١٠٩	١٤	٤٣	٣٦
١١٠ — ١١٤	١٧	٦٠	٥٥
١١٥ — ١١٩	١٣	٧٣	٦٦
١٢٠ — ١٢٤	٩	٨٢	٧٥
١٢٥ — ١٢٩	٩	٩١	٨٣
١٣٠ — ١٣٤	٧	٩٨	٨٩
١٣٥ — ١٣٩	٥	١٠٣	٩٤
١٤٠ — ١١٤	٣	١٠٦	٩٦
١٤٥ — ١٤٩	٢	١٠٨	٩٨
١٥٠ — ١٥٤	٢	١١٠	١٠٠

جدول رقم (١٩)

توزيع تكرارى متجمع صاعد وتوزيع تكرارى متجمع نسبى لدرجات
١١٠ طالبا فى اختبار ما

ويمكن تمثيل هذا التوزيع التكرارى المتجمع النسى بيانيا بالطريقة التى سبق أن ذكرناها فى الفصل الثانى كما هو مبين بشكل رقم (٢٤) ٠



شكل رقم (٢٤)

التمثيل البيانى للتوزيع التكرارى المتجمع النسبى

فإذا أردنا تحديد الرتبة المئينية المناظرة للدرجة ١٢٧ مثلا ، فإننا نرسم خطا موازيا للمحور الرأسى عند النقطة ١٢٧ التى تقع على المحور الأفقى ونمده حتى يقطع المنحنى ، ثم نسقط من نقطة التقاطع عموداً على المحور الرأسى حيث يوجد التكرار المتجمع النسبى ٪ ونقرأ العدد الذى يحدث عنده التقابل فيكون هو الرتبة المئينية المناظرة للدرجة ١٢٧ . والرتبة المئينية فى هذه الحالة هى ٧٩ .

أما إذا أردنا إيجاد الدرجة المناظرة لرتبة مئينية معينة فإننا يمكن أن نسير بطريقة عكسية . فمثلا إذا أردنا إيجاد الدرجة التى تناظر الرتبة المئينية ٩٠ مثلا ، فإننا نعين النقطة المناظرة للعدد ٩٠ على محور التكرار المتجمع النسبى ٪ ونرسم منها مستقيما موازيا للمحور الأفقى ونمده حتى يقطع المنحنى . ثم نسقط من نقطة التقاطع عموداً على المحور الأفقى حيث توجد الدرجات ونقرأ العدد الذى

يحدث عنده التقابل فيكون هو الدرجة المناظرة للرتبة المئينية ٩٠ . والدرجة فى هذه الحالة هى ١٣٥ تقريبا .

وبهذه الطريقة التقريبية المباشرة يمكن الحصول على الرتب المئينية المناظرة للدرجات ، والدرجات المناظرة للرتب المئينية .

إيجاد الرتب المئينية من الدرجات مباشرة :

نحتاج أحيانا إلى إيجاد الرتب المئينية للدرجات دون اللجوء إلى التمثيل البيانى للتوزيع التكرارى المتجمع النسبى ، حتى نضمن قدرا أكبر من الدقة . وهــذا يتطلب بالضرورة عملية استكمال Interpolation للعمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد لتحديد التكرار المتجمع المناظر لدرجة معينة بدقة .

فإذا أردنا تحديد الرتبة المئينية التى تقابل الدرجة ١٢٧ من جدول رقم (١٩) والتى حددناها بالتقريب من الشكل البيانى فإننا يجب أن نلاحظ أن الدرجة ١٢٧ تقع فى الفئة ١٢٥ ـــ ١٢٩ . والتكرار المتجمع الصاعد للفئات التى تقع دون هذه الفئة هو ٨٢ .

ونظراً لأن الرتبة المئينية التى تقابل درجة ما يمكن التعبير عنها رياضيا كالآتى :

$$\text{الرتبة المئينية} = \frac{\text{التكرار المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار الكلى}} \times ١٠٠ \quad \ldots \quad (١)$$

لذلك يكون من الضرورى تحديد التكرار المتجمع الذى يقابل الدرجة ١٢٧ بدقة . ومن الواضح أن التكرار المتجمع الذى يقابل الدرجة ١٢٧ يقع بين التكرارين المتجمعين ٨٢ ، ٩١ وهما التكراران المتجمعين للحديان الأدنى والأعلى للفئة .

وهنا يجب أن نستكمل Interpolate داخل الفئة ١٢٤,٥ — ١٢٩,٥ لكى نوجد التكرار المتجمع للدرجة ١٢٧ بدقة . أى أننا نحاول فى الواقع أن نحدد المسافة التى يجب أن نتحرك بها داخل هذه الفئة لنحصل على عدد الأفراد الذين تضمهم هذه المسافة والذين حصلوا على درجات تصل إلى الدرجة ١٢٧ .

فإذا رجعنا إلى جدول رقم (١٩) نجد أن الدرجة ١٢٧ تفوق الحد الأدنى الحقيقى للفئة ١٢٥ — ١٢٩ بقدر ٢,٥ درجة (أى ١٢٧ — ١٢٤,٥ = ٢,٥) .

وحيث إن هذه الفئة طولها ٥ ، فإن الدرجة ١٢٧ تتطلب أن تتحرك داخل الفئة مسافة قدرها $\frac{٢,٥}{٥}$. وهنا نكون قد افترضنا فرضا أساسيا وهو أن عدد الحالات أو تكرار فئة ما موزع توزيعا متكافئا على طول الفئة .

ونظراً لأن هناك ٩ حالات داخل هذه الفئة ، فإنه يمكننا أن نحسب عدد الحالات التى تحتويها المسافة $\frac{٢,٥}{٥}$ بأن نضرب هذه النسبة فى ٩ .

أى أن عدد الحالات الذين تضمهم هذه المسافة والذين حصلوا على درجات تصل إلى ١٢٧ = $\frac{٢,٥}{٥}$ × ٩ = ٤,٥ حالة .

وقد وجدنا أن ٨٢ حالة تقع دون الحد الأدنى الحقيقى لهذه الفئة . فإذا جمعنا عدد الحالات معا نجد أن التكرار المتجمع للفئة ١٢٧ هو :

٨٢ + ٤,٥ = ٨٦,٥

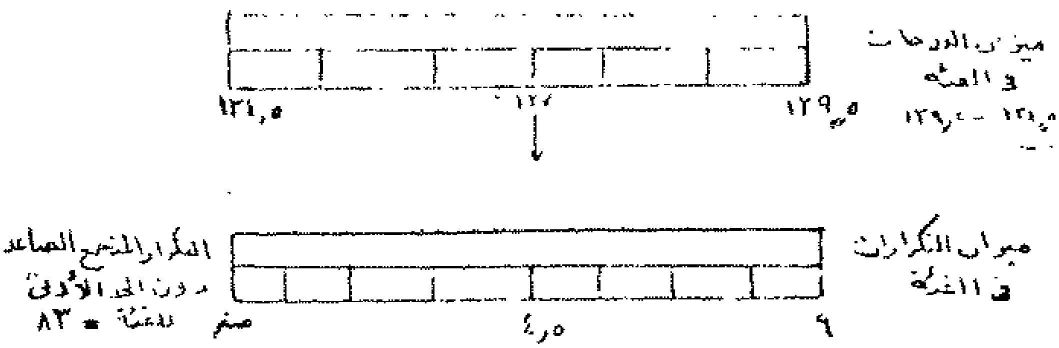
وبالتعويض فى الصورة السابقة رقم (١) :

نجد أن الرتبة المئينية = $\frac{٨٦,٥}{١١٠}$ × ١٠٠

= ٧٨,٦٤

وهذا يتفق تقريبا مع الرتبة المئينية التى حصلنا عليها من الرسم البيانى .

ويمكن تلخيص طريقة إيجاد التكرار المتجمع لدرجة معينة باستخدام الشكل التوضيحى الآتى :



شكل رقم (٢٥)

تلخيص طريقة ايجاد التكرار المتجمع لدرجة معينة

ومن هـــذا الشكل يتضح أننا قسمنا الفئة ١٢٤,٥ — ١٢٩,٥ إلى خمس وحدات متساوية تناظر الدرجات التي تضمها هذه الفئة . بينما قسمنا ميزان التكرارات داخل الفئة إلى تسع وحدات متساوية تناظر التكرارات التسعة للفئة، وهذا يعني أننا عندما نوجد التكرار الذي يناظر درجة معينة فإننا نكون بصدد إجراء نوع من التحويل الخطي من ميزان الدرجات إلى ميزان التكرارات ، وهذا يماثل عملية تحويل درجات الحرارة من ميزان فهرنهيتي إلى ميزان مئوي أو العكس .

والصورة الرياضية الآتية تعتبر صورة عامة تستخدم لإيجاد الرتبة المئينية المقابلة لدرجة معينة .

$$\text{الرتبة المئينية} = \frac{\text{التكرار المتجمع } ت_م + \left(\frac{س - س_م}{ف}\right) \times ت}{ن} \times ١٠٠$$

. . . . (٢)

حيث التكرار المتجمع $ت_م$ = التكرار المتجمع للحد الأدنى الحقيقي للفئة التي تحتوي الدرجة س .

، س = الدرجة المطلوبة إيجاد الرتبة المئينية المقابلة لها .

، سم = الدرجة المقابلة للحد الأدنى الحقيقى للفئة التى تحتوى الدرجة س .

، ف = طول الفئة .

، ت = عدد الحالات الواقعة فى الفئة التى تحتوى الدرجة س .

ويمكن أن نستخدم هذه الصورة الرياضية لإيجاد الرتبة المئينية المناظرة للدرجة ١٢٧ فى المثال السابق كالآتى :

$$\text{الرتبة المئينية} = \frac{٨٢ + \left(\frac{١٢٧ - ١٢٤,٥}{٥}\right) \times ٩}{١١٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٢ + \left(\frac{٢,٥}{٥} \times ٩\right)}{١١٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٢ + ٤,٥}{١١٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٦,٥}{١١} \times ١٠ = \frac{٨٦٥}{١١} = ٧٨,٦٤$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

إيجاد الدرجات التي تقابل رتبا مئينية معينة :

إذا افترضنا أن الرتبة المئينية المقابلة لدرجة معينة فى اختبار ما هى ٩٦ ، فما هى الدرجة ؟

لإجابة هذا السؤال يجب أن نتبع نفس الخطوات السابقة ولكن بطريقة عكسية . أى نبدأ بميزان التكرارات المتجمعة وننتقل إلى ميزان الدرجات .

ولذلك يجب أن نوجد التكرار المتجمع الذى يقابل المئينى ٩٦ باستخدام الصورة الرياضية الآتية :

$$\text{التكرار المتجمع} = \frac{\text{الرتبة المئينية} \times \text{التكرار الكلى}}{١٠٠} \quad . \quad . \quad (٣)$$

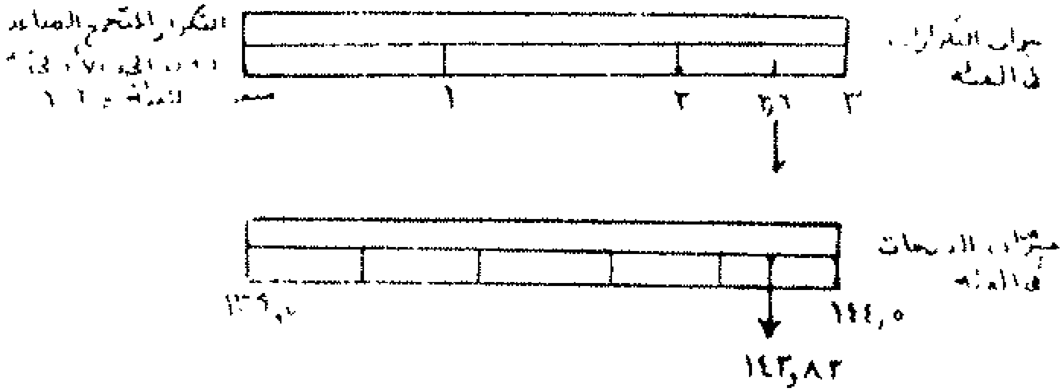
ونظراً لأننا نريد إيجاد الدرجة التى تقابل المئينى ٩٦ ، والتكرار الكلى ١١٠ فإن :

$$\text{التكرار المتجمع} = \frac{٩٦ \times ١١٠}{١٠٠} = ١٠٥{,}٦$$

فإذا رجعنا إلى الجدول رقم (١٩) نجد أن التكرار المتجمع ١٠٥,٦ يقع فى الفئة التى حدودها الحقيقية ١٣٩,٥ — ١٤٤,٥ . ونظراً لأن التكرار المتجمع عند الحد الأدنى الحقيقى لهذه الفئة هو ١٠٣ فإن فرق التكرارين هو ١٠٥,٦ — ١٠٣ = ٢,٦ . وتوجد ٣ حالات داخل هذه الفئة . وبذلك يكون التكرار ١٠٥,٦ عبارة عن $\frac{٢{,}٦}{٣}$ من الفئة التى حدها الأدنى الحقيقى ١٣٩,٥ وحدها الأعلى الحقيقى ١٤٤,٥ . أى أننا نكون أعلى من الحد الأدنى الحقيقى بقدر :

$$\frac{٢{,}٦}{٣} \times ٥ = ٤{,}٣٣ \text{ وحدة من الوحدات.}$$

فإذا جمعنا الدرجتين مما نحصل على الدرجة التى تقابل المئينى ٩٦ ، وهى
١٣٩,٥ + ٤,٣٣ = ١٤٣,٨٣ .



شكل رقم (٢٦)

تلخيص طريقة ايجاد الدرجة التى تقابل رتبة مئينية معينة

ومن هذا الشكل يتضح أن إيجاد الدرجة التى تقابل رتبة مئينية معينة هو بمثابة إجراء عملية تحويل لوحدات ميزان التكرارات إلى وحدات ميزان الدرجات .

والصورة الرياضيه الآتية هى صورة عامة يمكن استخدامها لتحديد الدرجات المقابلة لمئينيات معينة :

الدرجة المقابلة لمئينى معين =

$$\text{س}_{\text{م}} + \frac{\text{ف}\,(\text{التكرار المتجمع ت} - \text{التكرار المتجمع ت}_{\text{م}})}{\text{تكرار الفئة التى تحتوى التكرار المتجمع ت}} \quad (٤)$$

حيث $\text{س}_{\text{م}}$ = الدرجة المقابلة للحد الأدنى الحقيقى للفئة التى تحتوى على التكرار المتجمع .

ف = طول الفئة

التكرار المتجمع ت = التكرار المتجمع للدرجة .

التكرار المتجمع ت م = التكرار المتجمع للحد الأدنى الحقيقى للفئة التى تحتوى على التكرار المتجمع ت .

ويمكن توضيح كيفية تطبيق هذه الصورة لإيجاد الدرجة المقابلة للرتبة المئينية ٧٨,٦٤ فى المثال السابق مثلا كالآتى :

$$\text{التكرار المتجمع} = \frac{\text{الرتبة المئينية} \times \text{التكرار الكلى}}{١٠٠}$$

$$= \frac{١١٠ \times ٧٨,٦٤}{١٠٠} = ٨٦,٥٠$$

والدرجة التى تقابل الحد الأدنى الحقيقى للفئة التى تحتوى على التكرار ٨٦,٥٠ هى ١٢٤,٥ ، وطول الفئة = ٥ ، والتكرار المتجمع للحد الأدنى الحقيقى للفئة هو٨٢ ، وتكرار الفئة التى تحتوى التكرار المتجمع = ٩ .

وبالتعويض فى الصورة الرياضية السابقة نجد أن :

الدرجة المقابلة للمئينى ٧٨,٦٤ =

$$١٢٤,٥ + \frac{(٨٦,٥٠ - ٨٢)\,٥}{٩}$$

$$= ١٢٤,٥ + ٢,٥$$

$$= ١٢٧$$

ونلاحظ أن هذه الدرجة هى التى حصلنا منها فيما سبق على هذا المئينى .

ويمكن أيضاً استخدام هذه الطريقة للتحقق من صحة العمليات الحسابية .

بمعنى أنه إذا كان لدينا الرتبة المئينية ، فيمكن استخدامها لتحديد الدرجة المقابلة لها ، وهنا يجب أن نحصل على الدرجة الأصلية . وبالمثل إذا كان لدينا الدرجة التى تقابل رتبة مئينية معينة ، فيمكن استخدامها لتحديد الرتبة المئينية ، وهنا يجب أن نصل إلى نفس الرتبة المئينية الأصلية . فإذا لم يتحقق ذلك يكون هذا دليلا على أن هناك خطأ ما فى العمليات الحسابية .

حالات خاصة عند حساب المئينيات :

أحيانا يواجه الباحث عند حساب المئينيات من بعض التوزيعات التكرارية حالات خاصة لا تنطبق عليها القواعد السابقة ، ومن بين هذه الحالات .

١ — إذا وقعت المئينيات بين الفئات . ولتوضيح ذلك نفترض أننا نريد إيجاد الوسيط (وهو المئينى ٥٠) من البيانات الموضحة بجدول رقم (٢٠) الآتى :

الفئـــات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
١٠ — ١٤	٢	٢
١٥ — ١٩	٣	٥
٢٠ — ٢٤	صفر	٥
٢٥ — ٢٩	٥	١٠
٣٠ — ٣٤	٤	١٤
٣٥ — ٣٩	٣	١٧
٤٠ — ٤٤	٢	١٩
٤٥ — ٤٩	١	٢٠
المجموع	ن = ٢٠	

جدول رقم (٢٠)
توزيع تكرارى يوضح بعض الحـــالات الخاصة
عند حســـاب المئينيات

ومن هذا الجدول نجد أن ترتيب الوسيط هو ١٠ (٥٠٪ من التكرار الكلى وهو ٢٠) . فإذا نظرنا إلى التكرار المتجمع الصاعد نجد أننا لكى نصل إلى الحالات العشر بدءاً من أعلى يجب أن نأخذ جميع الحالات التى تقع فى الفئة ٢٥ — ٢٩ لأن هذه الحالات العشر هى التكرار المتجمع الصاعد لهذه الفئة . وبالعكس فإن الحالات العشر الأخرى يجب أن تشتمل على جميع الافراد فى الفئة ٣٠ — ٣٤ . وبذلك يكون المئينى ٥٠ (الوسيط) هو الحد الحقيقى للفئة ٢٥ — ٢٩ (أو الحد الأدنى الحقيقى للفئة ٣٠ — ٣٤) أى ٢٩,٥ ، أى أن ٥٠٪ من الحالات حصلت على درجة أقل من ٢٩,٥ ، و ٥٠٪ الأخرى حصلت على درجة أعلى من هذه الدرجة .

٢ — إذا وقع أحد المئينيات فى فئة تكرارها صفر . وهذه الحالة تشبه الحالة السابقة ولكنها أكثر تعقيداً . ولتوضيح ذلك نفترض أننا نريد إيجاد الإرباعى الأول أى المئينى ٢٥ من الجدول رقم (٢٠) السابق . أى أننا نريد معرفة الدرجة التى يقل عنها ٢٥٪ من الطلاب ويزيد عنها ٧٥٪ منهم . فإذا فحصنا التكرار المتجمع الصاعد المبين بالجدول نجد أنه نظراً لأن الفئة ٢٠ — ٢٤ تكرارها صفر توجد ٥ حالات بالضبط (٢٥٪) تقع دون الدرجة ١٩,٥ ، ١٥ حالة (٧٥٪) تقع أعلى الدرجة ٢٤,٥ .

ونظراً لأن المئينى هو نقطة ، أى قيمة أو درجة واحدة ، فإننا يجب أن نختار قيمة معينة للمئينى ٢٥ تنحصر بين الدرجتين ١٩,٥ ، ٢٤,٥ . ولحل هذه المشكلة نختار الدرجة التى فى المنتصف أى :

$$\frac{١٩,٥ + ٢٤,٥}{٢} = \frac{٤٤}{٢} = ٢٢$$

وهى فى الحقيقة منتصف الفئة ٢٠ — ٢٤ التى تكرارها صفر .

ويمكن أن تنطبق هذه الطريقة على أى توزيع تكرارى من هذا النوع .

وسوف نعرض فى الفصل السادس لمزايا وعيوب المئينيات عند مناقشتنا لخصائص المنحنى الاعتدالى ، وكذلك كيفية تحويل المئينيات إلى أنواع أخرى من الدرجات المحولة .

الإعشاريات :

رأينا مما سبق أن المئينيات هى النقط التى تقسم التوزيع إلى مائة جزء متساو . كذلك الإعشاريات تقسم التوزيع إلى عشرة أجـــزاء متساوية . ويمكن للباحث أن يتبع فى حسابها نفس طريقة حساب الوسيط أو الإرباعيات أو المئينيات .

وفيما يلى ملخصاً للعلاقة بين المئينيات والإعشاريات والإرباعيات والوسيط .

المئينى	الإعشارى	الإرباعى	
٩٠	٩		
٨٠	٨		
٧٥		٣	
٧٠	٧		
٦٠	٦		
٥٠	٥	٢	الوسيط
٤٠	٤		
٣٠	٣		
٢٥		١	
٢٠	٢		
١٠	١		

الدرجات المعيارية Standard Scores :

رأينا فيما سبق أن قيمة الدرجة التى يحصل عليها طالب فى اختبار ما هى قيمة اختيارية ، أى لا يكون لها معنى إلا فى إطار مجموعة الدرجات التى حصل عليها أقران هذا الطالب فى الفصل مثلا . ولذلك فإنه من المرغوب فيه فى معظم الأحيان أن نحول هذه الدرجة الخام إلى نوع آخر من الدرجات (مثل الرتب المئينية) حتى يمكننا مقارنتها بغيرها من الدرجات التى حصلت عليها المجموعة المرجعية .

وقد أوضحنا فى الفصلين الثالث والرابع أن المتوسط والانحراف المعيارى يمكن أن نفيد منهما فى تيسير مقارنة درجة معينة فى اختبار ما بدرجات مجموعة مرجعية فى نفس الاختبار ، ويفضل فى أغلب الأحيان أن نجرى عملية تحويل الدرجة الخام بحيث تأخذ فى اعتبارها متوسط درجات المجموعة المرجعية وانحرافها المعيارى . أى تحول الدرجة الخام إلى انحرافات معيارية أعلى أو أدنى من المتوسط كوحدة قياس، وحينئذ تسمى الدرجات المحولة بالدرجات المعيارية .

فمثلا إذا حصل طالب على الدرجات الخام الثلاث الآتية فى اختبارات نصف العام :

لغة إنجليزية	٨٠
مواد اجتماعية	٦٥
علم نفس	٧٥

فربما يبدو لأول وهلة أن الطالب متفوق فى اللغة الإنجليزية وضعيف فى المواد الاجتماعية ، إلا أن هذا الاستنتاج السريع غير صحيح وذلك لأن .

هناك أسبابا متعـــددة تجعل الدرجات الخام غير صالحة للمقارنة بطريقة مباشرة .

إذ ربما كان اختبار اللغة الانجليزية سهلا مما أدى إلى ارتفاع درجات الطلاب بينما كان اختبار المواد الاجتماعية صعبا . أو ربما كانت النهاية العظمى لدرجات اختبار اللغة الانجليزية ١٠٠ ، واختبار المواد الاجتماعية ٨٠ .

فالدرجات الخام تمدنا بمعلومات عن عدد النقاط التى حصل عليها الطالب فى اختبار ما ، ولكنها لاتقدم لنا أى أدلة عن مدى تفوق أو ضعف الطالب فى الأداء فى الاختبار ، وكذلك لاتسمح لنا بمقارنة أدائه بأداء غيره من الطلاب .

ولكن نفترض أننا حصلنا إلى جانب الدرجات الخام على المتوسط والانحراف المعيارى لكل اختبار كما يلى :

الاختبار	اللغة الانجليزية	المواد الاجتماعية	علم النفس
الدرجة الخام	٨٠	٦٥	٧٥
المتوسط	٨٥	٥٥	٦٠
الانحراف المعيارى	١٠	٥	١٥

فما لاشك فيه أن هذه المعلومات الإضافية تلقى مزيداً من الضوء على درجة هذا الطالب .

فإذا نظرنا إلى المتوسطات نجد أن درجته فى اللغة الانجليزية بالرغم من أنها مرتفعة إلا أنها تقل عن متوسط درجات أقرانه فى الفصل ، ولكن درجته فى كل من المواد الاجتماعية وعلم النفس أعلى من المتوسط ، ولذلك فإن درجته فى اللغة الانجليزية تعتبر أقل الدرجات الثلاث بالنسبة لأقرانه .

وهنا ربما يتسرع الباحث ، يستنتج أن درجة الطالب فى علم النفس تعتبر أعلى الدرجات الثلاث . لأنها أعلى من المتوسط بقدر ١٥ درجة بينما درجة

المواد الاجتماعيه أعلى من المتوسط بقدر ١٠ درجات ، ولكننا قد أشرنا فى الفصل الرابع إلى أننا يجب أن نأخذ تشتت الدرجات فى الاعتبار عند تفسيرنا للمركز النسبى لدرجة معينة .

فإذا نظرنا إلى الانحرافات المعيارية لدرجات الاختبارات الثلاث نجد أن الانحراف المعيارى يبين أن متوسط تشتت درجات اختبار علم النفس عن المتوسط هو ١٥ نقطة ، وهذا يعنى أن بعض الدرجات تزيد أو تقل عن المتوسط بأكثر من أو أقل من ١٥ نقطة .

ولذلك فإن درجة الطالب فى علم النفس وهى ٧٥ وتزيد عن المتوسط بقدر ١٥ وحدة أى انحراف معيارى واحد يسبقها عدد قليل من الدرجات الأعلى ، ويعتمد هذا العدد على شكل توزيع الدرجات .

أما متوسط تشتت اختبار المواد الاجتماعية عن المتوسط فهو ٥ نقط ، لذلك فإن درجة الطالب فى المواد الاجتماعية وهى ٦٥ وتقع أعلى المتوسط بقدر ١٠ نقط أو انحرافين معياريين من المحتمل أن تكون أعلى الدرجات لأنها أعلى من المتوسط بكثير .

من هذا يتضح أن الدرجات الخام تعطى صورة مضللة لمثل هذا الموقف ، فإذا ما قارنا درجات الطالب بأقرانه فى الفصل على أساس المناقشة السابقة نجد أن أفضل الدرجات هى درجة المواد الاجتماعية يليها درجة علم النفس وأقلها هى درجة اللغة الانجليزية .

والدرجات الخام ٨٠ ، ٦٥ ، ٧٥ إذن لايمكن مقارنتها بطريقة مباشرة لأن التوزيع التكرارى لدرجات كل اختبار منها يختلف عن الآخر من حيث المتوسط والانحراف المعيارى ، وبذلك تختلف وحدات قياس كل منها .

وللتغلب على هذه المشكلة نلجأ إلى تحويل الدرجات الخام فى كل اختبار إلى ميزان مشترك متفق فى المتوسط والانحراف المعيارى ، وبذلك نستطيع إجراء

عملية المقارنة وهذا التحويل هو من نوع التحويل الخطى ، أى أن عملية التحويل لاتغير من شكل التوزيع التكرارى للدرجات الخام .

ويجب أن نؤكد على هذا لأن كثيراً من الباحثين المبتدئين يعتقدون خطأ أن الدرجات المعيارية تتوزع توزيعاً اعتداليا . فلكى تتوزع الدرجات المعيارية توزيعا اعتداليا يجب أن يكون توزيع الدرجات الأصلية (أى قبل تحويلها إلى درجات معيارية) اعتدالى ، أو يمكن استخدام تحويل غير خطى لهذه الدرجات ليصبح التوزيع اعتداليا إن لم يكن كذلك ، وهو ماسنعرض له فى الفصل السادس .

وعلى عكس الرتب المئينية يمكن تعريف الدرجات المعيارية تعريفا رياضيا . فالرتب المئينية ميزانها رتبى ، ويمكن اشتقاقها من الدرجات الخام سواء كان ميزانها رتبى أو فترى أو نسبى .

ولكن الدرجات المعيارية التى تنتج من عملية تحويل خطى يجب أن يكون ميزانها فترى ، ويمكن اشتقاقها من الدرجات الخام التى تكون على ميزان فترى أو نسبى .

قواعد تغيير المتوسطات والانحرافات المعيارية :

مما سبق يتضح أنه من الممكن تحويل الدرجات الخام إلى درجات أخرى تختلف فى المتوسط والانحراف المعيارى عن المتوسط والانحراف المعيارى للدرجات الأصلية .

ومن الطبيعى أن نلجأ إلى اختيار المتوسط والانحراف المعيارى الجديدين بحيث ييسران عملية المقارنة بين الدرجات .

فى المثال السابق إذا أردنا مقارنة درجة الطالب فى اللغة الإنجليزية بدرجته فى المواد الاجتماعية ، ربما يبدو من المعقول أن نحول درجات اللغة الإنجليزية إلى درجات متوسطها الجديد ٥٥ وانحرافها المعيارى الجديد ٥ لأن هاتين القيمتين

تناظران قيمتى المتوسط والانحراف المعيارى للمواد الاجتماعية والتى نريد المقارنة بها ويتم هذا التحويل كالآتى :

الخطـــوات	المتوسط الجديد	الانحراف المعيارى الجديد
١) اقسم كل درجة من درجات اللغة الإنجليزية على ٢	$\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٢,٥	$\frac{١٠}{٢}$ = ٥ الانحراف المعيارى الجديد يكون نصف الانحراف المعيارى الأصلى .
٢) أضيف ١٢,٥ إلى كل درجة حصلنا عليها فى (١)	٤٢,٥ + ١٢,٥ = ٥٥	٥ لا يتغير الانحراف المعيارى

ونلاحظ أن الخطوة الأولى هى أن نغير الانحراف المعيـارى إلى القيمـة المطلوبة بضرب أو قسمة الانحراف المعيارى فى أو على مقدار ثابت معين . فنى مثالنا هذا اخترنا الانحراف المعيارى ٥ ولذا قسمنا الانحراف المعيارى الأصلى على ٢ . وهنا تتأثر قيمة كل من المتوسط والانحراف المعيارى بهذه العملية (يمكن الرجوع فى ذلك إلى الفصل الرابع) .

ويمكن الحصول على المتوسط المطلوب بإضافة أو طرح مقدار ثابت معين وهذا لا يؤثر فى قيمة الانحراف المعيارى .

ويمكن أن يتم تحويل درجة الطالب فى اللغة الإنجليزية وهى ٨٠ باستخدام المتوسط والانحراف المعيارى الجديدين كالآتى :

$$\frac{٨٠}{٢} + ١٢,٥ = ٥٢,٥$$

وواضح أنها أقل من درجته فى المواد الاجتماعية ، كما أن درجة الطالب فى اللغة

الإنجليزية قبل وبعد تحويلها تقل عن متوسطى التوزيعين المناظرين لدرجات هذه المادة بقدر نصف انحراف معيارى .

الدرجات المعيارية التى متوسطها صفر وانحرافها المعيارى الواحد الصحيح :

من التحويلات الخطية الأكثر أهمية واستخداما هى تلك التى تعتمد على جعل متوسط التوزيع صفراً ، وانحرافه المعيارى الواحد الصحيح ، وهذه تسمى الدرجات المعيارية ويرمز لها فى اللغة الإنجليزية بالرمز Z ولكننا سنرمز لها فى هذا الكتاب بالرمز د . ويعبر عن الدرجة التى تنتج عن هذا الميزان بعدد الانحرافات المعيارية التى تنحرف بها الدرجة الخام عن المتوسط .

ولهذه الدرجات المعيارية ميزتان هما :

١ — نظراً لأن متوسط هذه الدرجات صفر فإنه يمكننا بمجرد النظر معرفة ما إذا كانت درجة معيارية معينة أعلى أو أقل من المتوسط . فالدرجة المعيارية الموجبة تكون أعلى من المتوسط ، والدرجة المعيارية السالبة تكون أقل من المتوسط .

٢ — نظراً لأن الانحراف المعيارى لهذه الدرجات هو الواحد الصحيح . فإن مقدار الدرجة المعيارية يدل على عدد الانحرافات المعيارية التى تبعد بهما الدرجة عن المتوسط إما إلى اليمين أو إلى اليسار . وقد رأينا فيما سبق أن هذه المعلومات يمكن استخدامها كمؤشر للدلالة على ارتفاع أو انخفاض مستوى أداء طالب فى اختبار ما .

ولتحويل مجموعة من الدرجات الخام إلى درجات معيارية ينبغى أن نطرح المتوسط الأصلى من كل درجة خام ، ثم نقسم ناتج كل منهما على الانحراف المعيارى للدرجات الخام .

والصورة الرياضية المناظرة لهاتين الخطوتين هى :

$$د = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$\text{أى أن الدرجة المعيارية} = \frac{\text{الدرجة الخام - المتوسط}}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

وإذا عدنا إلى المثال السابق الذى حصل فيه الطالب على ثلاث درجات فى مواد اللغة الإنجليزية ، المواد الاجتماعية ، وعلم النفس وهى :

	اللغة الإنجليزية	المواد الاجتماعية	علم النفس
الدرجة	٨٠	٦٥	٧٥
المتوسط	٨٥	٥٥	٦٠
الانحراف المعيارى	١٠	٥	١٥

الدرجات المعيارية :

$$\text{اللغة الإنجليزية} = \frac{٨٠ - ٨٥}{١٠} = -٠٫٥$$

$$\text{المواد الاجتماعية} = \frac{٧٥ - ٥٥}{٥} = +٢$$

$$\text{علم النفس} = \frac{٧٥ - ٦٠}{١٥} = +١$$

ومن هذا يتضح أن درجات الطالب كانت أقل من المتوسط بقدر نصف انحراف معيارى فى اللغة الإنجليزية ، وأعلى من المتوسط بمقدار انحرافين

معياريين فى المواد الاجتماعية ، وأعلى من المتوسط بقدر انحراف معيارى واحد فى علم النفس .

وينبغى أن نعيد التأكيد مرة أخرى أن تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية (د) متوسطها صفر ، وانحرافها المعيارى الواحد الصحيح ، لايغير من شكل التوزيع . فهنا فقط نكون قد غيرنا النقطة التى تبدأ منها القياس (الصفر بدلا من المتوسط) بوحدة قياس جديدة (الانحراف المعيارى بدلا من الوحدات الخام) .

ويمكن زيادة توضيح ذلك باستخدام البيانات الافتراضية الخاصة بأطوال ٣٠ رجلا مقدرة بالبوصات والمبينة بجدول رقم (٢١) وقد رتبنا الدرجات ترتيبا تنازلياً بغرض التوضيح .

الشخص	(الطول) الدرجات الخام بالبوصات	(الطول) الدرجات المعيارية	الطول (الدرجات الخام بالسنتيمتر مقاسة من أعلى منضدة على ارتفاع ٣٦ بوصة من سطح الأرض)
١	٧٢	+ ٢,٣٦	٩١,٤٤
٢	٧٠	+ ١,٢٤	٨٦,٣٦
٣	٧٠	+ ١,٢٤	٨٦,٣٦
٤	٧٥	+ ١,٢٢	٨٦,٣٦
٥	٦٩	+ ,٦٧	٨٣,٨٢
٦	٦٩	+ ,٦٧	٨٣,٨٢
٧	٦٨	+ ,١١	٨١,٢٨
٨	٦٨	+ ,١١	٨١,٢٨
٩	٦٨	+ ,١١	٨١,٢٨
١٠	٦٨	+ ,١١	٨١,٢٨
١١	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٢	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٣	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٤	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٥	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٦	٦٧	— ,٤٥	٧٨,٧٤
١٧	٦٦	— ١,٠١	٧٦,٢٠
١٨	٦٦	— ١,٠١	٧٦,٢٠
١٩	٦٦	— ١,٠١	٧٦,٢٠
٢٠	٦٤	— ٢,١٤	٧١,١٢
المتوسط	٦٧,٨٠	صفر	٨٠,٧٧
الانحراف المعيارى	١,٧٨	١,٠٠	٤,٢٥

جدول رقم (٣١)

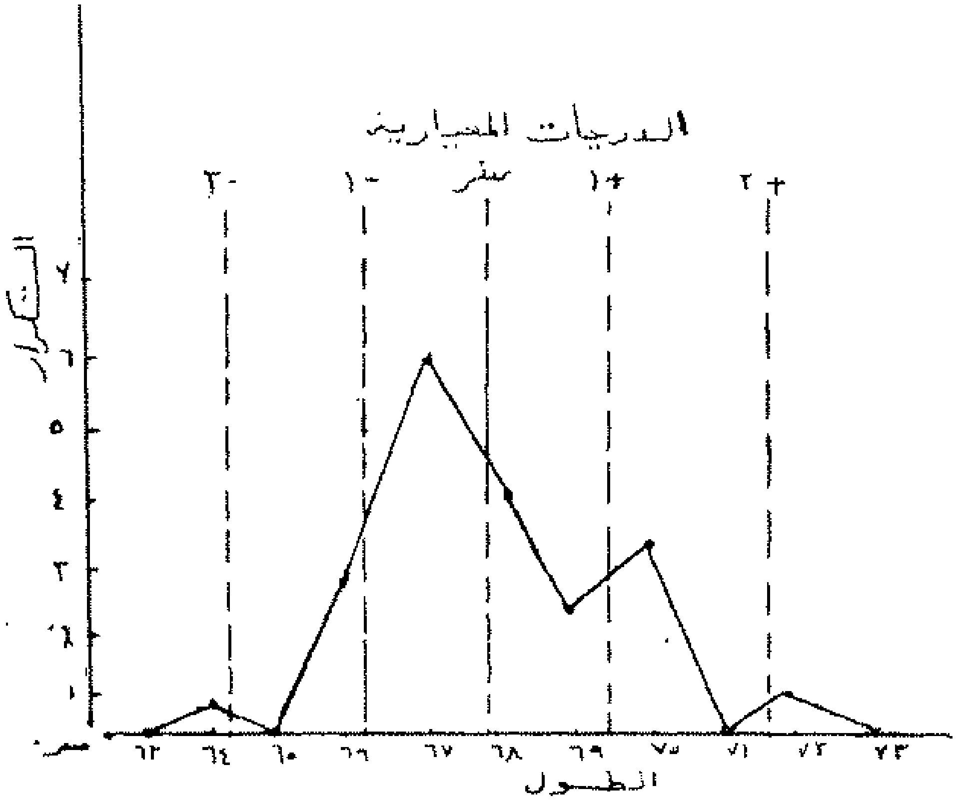
بيانات افتراضية تعبر عن اطوال ٢٠ رجلا ممثلة بدرجات خام بالبوصات ، ودرجات معيارية ودرجات خام بالسنتيمتر مقاسة من أعلى المنضدة

ومن هذا الجدول يتضح أن متوسط الدرجات الخام للطول هو ٦٧,٨٠ والانحراف المعيارى هو ١,٧٨ بوصة . وقد حولنا هذه الدرجات إلى درجات معيارية باستخدام القانون $\frac{س - \bar{س}}{ع}$. فمثلا الدرجة المعيارية المقابلة للدرجة الخام ٧٢ هى

$$\frac{٧٢ - ٦٧,٨٠}{١,٧٨} = + ٢,٣٦$$

وكما ذكرنا فإن متوسط الدرجات المعيارية صفر وانحرافها المعيارى الواحد الصحيح .

وهذه البيانات ممثلة بيانياً فى شكل رقم (٣٧) . ويجب أن نلاحظ أننا مثلنا الدرجات الخام والدرجات المعيارية فى شكل واحد لأن شكل التوزيع لا يتغير بالنسبة لكل من مجموعتى الدرجات . ولذلك فإن العلاقة بين نوعى الدرجات لا تتغير نتيجة لتحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية . ولكن الذى يتغير هو موقع الدرجات Location وميزان القياس Scaling .



شكل رقم (٢٧)
التوزيع التكرارى للدرجات الخام والدرجات المعيارية
المبينة بجدول رقم (٢١)

وبالرغم من أننا قد حصلنا على الدرجات الخام عن طريق قياس الطول من سطح الأرض ، إلا أنه يتضح من العمود الرابع فى الجدول رقم (٢١) أن الدرجات المعيارية لم تتغير إذا تم قياس الأشخاص من على سطح منضدة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار ٣٦ بوصة . وحتى تغيير وحدة القياس من بوصات إلى سنتيمترات لم يؤثر فى قيم الدرجات المعيارية .

فمثلا :

(٧٠ − ٦٧,٨٠) ÷ ١,٧٨ = + ١٢،٤ = (٨٦,٣٦ − ٨٠,٧٧) ÷ ٤,٠٢

بالبوصات عن سطح الأرض — درجة معيارية — بالسنتيمترات من أعلى منضدة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار ٣٦ بوصة

وهذا يدل على أن الدرجات المعيارية تعطى صورة دقيقة عن موضع كل درجة بالنسبة إلى المجموعة المرجعية بصرف النظر عن الموضع الذى تم منه القياس الأصلى أو ميزان القياس المستخدم .

وفى الحقيقة أن الدرجات المعيارية تستخدم بكثرة فى البحوث النفسية والتربوية . كما أنها ترتبط بمقاييس إحصائية متقدمة تلعب دوراً هاماً فى الأساليب الاستدلالية فى تحليل بيانات هذه البحوث كما سنرى فى الجزء الثانى من الكتاب .

خواص الدرجات المعيارية :

لكى تتضح الفائدة من تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية ينبغى الإشارة إلى بعض خواص هذه الدرجات .

١ — مجموع الدرجات المعيارية = صفراً .

أى أن : مجـ د = صفرا .

٢ — متوسط توزيع الدرجات المعيارية = صفراً .

أى أن : $\bar{د} = \frac{\text{مجـ د}}{ن} =$ صفرا .

وبالطبع ينطبق هذا أيضاً على انحرافات الدرجات عن المتوسط .

٣ — الدرجات الخام التى تقل عن المتوسط تقابلها درجات معيارية سالبة ، والدرجات الخام التى تزيد عن المتوسط تقابلها درجات معيارية موجبة . وتنطبق هذه الخاصية أيضا على انحرافات الدرجات عن المتوسط .

٤ — مجموع مربعات الدرجات المعيارية = العدد الكلى للدرجات

أى أن : مجـ $د^٢$ = ن

وهذه الخاصية تكون صحيحة فقط إذا حسبنا الانحراف المعيارى باستخدام ن فى المقام بدلا من ن — ١ .

ويمكن البرهنة على ذلك رياضياً كالآتى :

$$\text{مجـ } د^{2} = \frac{\text{مجـ } (س - \overline{س})^{2}}{ع^{2}}$$

$$= \frac{1}{ع^{2}} \text{ مجـ } (س - \overline{س})^{2}$$

$$= \frac{ن}{\text{مجـ } (س - \overline{س})^{2}} \times \text{ مجـ } (س - \overline{س})^{2}$$

$$= ن$$

٥ ـــ الانحراف المعيارى وتباين توزيع الدرجات المعيارية يساوى الواحد الصحيح

أى أن $ع_{د} = ع^{2}_{د} = 1$

ويمكن أيضاً البرهنة على ذلك رياضياً كالآتى :

$$ع^{2}_{د} = \frac{\text{مجـ } (د - \overline{د})^{2}}{ن}$$

ولكن $\overline{د} =$ صفر (خاصية رقم ٢)

$$\text{إذن } ع^{2}_{د} = \frac{\text{مجـ } د^{2}}{ن}$$

ولكن مجـ $د^{2} = ن$ (خاصية رقم ٤)

$$\text{إذن } ع^{2}_{د} = \frac{ن}{ن} = 1$$

٦ - إذا حسبنا الدرجات المعيارية من عينات نجد أنه فإن مدى هذه الدرجات يكون دالة لحجم العينة فعادة تتراوح الدرجات المعيارية للعينات الكبيرة بين - ٣ ، + ٣ بينما يقل هذا المدى للعينات الصغيرة .

ضم الدرجات المعيارية :

تسجل عادة الدرجات التي يحصل عليها فرد ما في اختبارات مختلفة على هيئة عدد الأسئلة التي أجاب عنها إجابة صحيحة أو عدد المصطلحات التي تذكرها ، أو عدد المسائل التي نجح في حلها . وهنا نتوقع أن تختلف الاختبارات في سهولتها أو صعوبتها ، بالإضافة إلى اختلاف وحدات درجاتها .

فلهذه الأسباب وغيرها لا يمكن - كما ذكرنا - أن نقارن هذه الدرجات بعضها بالبعض الآخر . كذلك لا نستطيع ضم هذه الدرجات معا .

وتحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية لنفس مجموعة الطلاب يمكننا من مقارنة هذه الدرجات لأن الدرجات المعيارية هي أعداد مجردة ليس لها وحدة خاصة . وكذلك يمكننا ضم الدرجات المعيارية معا للحصول على درجة معيارية مركبة .

وربما يفضل الباحث أو المعلم أن يعين أوزانا مختلفة للدرجات المختلفة قبل أن يحسب الدرجة المركبة .

إذ ربما يطبق الباحث أو المعلم ثلاثة اختبارات أثناء سير عملية التعليم وامتحان واحد في آخر العام . وربما يود أن يسهم أحد الاختبارات الثلاثة بربع ما يسهم به الاختباران الآخران عند تقريره للدرجة النهائية لكل طالب ، وأن يسهم اختبار آخر العام بقدر مرة ونصف في هذا التقدير .

فحينئذ تكون الدرجة المركبة كالآتي :

$$\text{الدرجة المركبة} = ٠,٢٥\,د_١ + د_٢ + د_٣ + ١,٥\,د_٤$$

الدرجات التائية T — Scores :

من بين العيوب الرئيسية للدرجات المعيارية (د) أنه يصعب على الشخص غير المتمرس فى الإحصاء تفسيرها . ولكى ندرك هذه الصعوبة نفترض أن معلماً أراد أن يقرر نتائج اختبار ما لطلابه فى صورة درجات معيارية . فإذا كان طلابه لم يعتادوا على هذا النوع من الدرجات ربما يصدم أحدهم عندما يسمع أنه قد حصل على درجة معيارية صفر لأنه لا يعرف أن الدرجة المعيارية صفر لا تعنى أنه أخفق تماماً فى الاختبار بل إن درجته تمثل الأداء المتوسط بالنسبة لأقرانه فى الفصل . فما بالنا بالطالب الذى يسمع أنه قد حصل على درجة معيارية سالبة والتى ربما يفهم منها أنه أصبح مدينا للمعلم بعدد من الدرجات .

ونظراً لأن الباحث النفسى والتربوى يقرر نتائج الاختبارات التى يستخدمها لأناس غير متخصصين فى الإحصاء ، لذلك نجد أن هناك بدائل مختلفة لهذا النوع من الدرجات المعيارية (د) . وقد تم اختيار المتوسطات والانحرافات المعيارية لهذه البدائل على أساس أن تجعل جميع الدرجات المحولة موجبة ، وبحيث يسهل تذكر هذه المتوسطات والانحرافات المعيارية .

وأحد هذه البدائل يسمى الدرجات التائية (ت) T — Scores نسبة إلى العالم ثورنديك Thorndike . ويمكن تعريفها بأنها مجموعة من الدرجات التى يكون متوسطها ٥٠ ، وانحرافها المعيارى ١٠ .

ويمكن حساب الدرجات التائية باستخدام الصورة الآتية :

$$ت = ١٠ د + ٥٠$$

أى أنه إذا أراد الباحث تحويل الدرجات الخام إلى درجات تائية فما عليه إلا أن يحول أولا الدرجة الخام إلى درجة معيارية باستخدام القانون

$د = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ثم يضرب الدرجة الناتجة فى ١٠ ويضيف ٥٠ على الناتج

فمثلا إذا أردنا تحويل الدرجة الخام ١٣٢ فى اختبار للذكاء متوسطه ١٠٠ وانحرافه المعيارى ١٦ إلى درجة تائيه فإننا نتبع الخطوات الآتيه :

الخطوات	المتوسط الجديد	الانحراف المعيارى الجديد
١ — تحول الدرجة الخام إلى درجة معيارية	صفر	١
$د = \frac{س - \bar{س}}{ع}$		
$= \frac{١٣٢ - ١٠٠}{١٦} = \frac{٣٢}{١٦} = +٢$		
٢ — تضرب الدرجة المعيارية فى ١٠	١٠ × صفر	١٠ × ١ = ١٠
١٠د = ١٠ × ٢ = ٢٠	= صفر	
٣ — نضيف ٥٠ على الناتج	صفر + ٥٠	١٠
١٠د + ٥٠ = ٢٠ + ٥٠ = ٧٠	= ٥٠	(لم يحدث تغيير)

ونظراً لأن متوسط الدرجات التائية ٥٠ ، فيمكن أيضا بمجرد النظر معرفة ما إذا كانت الدرجة أعلى من المتوسط (أكبر من ٥٠) أو أقل من المتوسط (أقل من ٥٠) ، كما يمكن أن نحدد عدد الانحرافات المعيارية التى تقل أو تزيد بها الدرجة عن المتوسط .

فمثلا الدرجة ٤٠ تقل عن المتوسط بمقدار انحراف معيارى واحد (تناظر درجة معيارية د = - ١) لأن الانحراف المعيارى للدرجة التائية = ١٠ .

والدرجات التائية تتراوح بين ٢٠ ، ٨٠ ، وإذا أخذنا فى اعتبارنا الدرجات المتطرفة فإنها تتراوح بين صفر ، ١٠٠ .

ويمكن — من الناحية الرياضية النظرية - أن تكون الدرجات التائية سالبة ، ولكن يندر أن يحدث هذا فى الواقع ، لأن هذا يتطلب أن تنحرف الدرجة بقدر خمسة انحرافات معيارية سالبة عن المتوسط ، فى حين أننا لا يمكن من واقع بيانات البحوث الفعلية أن نحصل على درجات تنحرف أكثر من ثلاثة انحرافات معيارية موجبة أو سالبة عن المتوسط .

تحويلات خطية أخرى :

من بين التحويلات الخطية الأخرى الشائعة الاستخدام فى الولايات المتحدة الامريكية وتؤدى إلى توزيع درجات معيارية متوسطها ٥٠٠ وانحرافها المعيارى ١٠٠ ناتجة من اختبارات شائعة الاستخدام فى هذه الدولة وهى :

معيار اختبار الاستعداد الدراسى
Scholastic Aptitude Test (SAT)

ومعيار اختبار القبول فى الكليات
College Entrance Examination Board (CEEB)

ومعيار اختبار بيان أو سجل الدراسات العليا
Graduate Record Examination (GRE)

وتستخدم هذه الاختبارات فى الولايات المتحدة الأمريكية عند اختيار الطلاب للدراسة .

أى أن :

درجة SAT = ١٠٠د + ٥٠٠

درجة CEEB = ١٠٠د + ٥٠٠

درجة GRE = ١٠٠د + ٥٠٠

فلتحويل درجة خام إلى أى من هذه الدرجات المعيارية نضرب الدرجة فى

١٠٠ ونضيف ٥٠٠ إلى الناتج . وفى الحقيقة أن كلا من هذه الدرجات المحولة تساوى عشرة أمثال الدرجة التائية

ولذا لا يجب أن تندهش عندما نجد أن طالبا حصل على الدرجة المعيارية ٦٤٢ فى أحد هذه الاختبارات فى حين أن العدد الكلى لأسئلة الاختبار ربما لا يزيد عن ٣٠٠ أو ٤٠٠ سؤال . فالدرجة ٦٤٢ تعنى أن الطالب يفوق المتوسط بمقدار ١٤٢ نقطة أو ١,٤٢ انحراف معيارى (أى أن هـذا يناظر الدرجة المعيارية د = + ١,٤٢ أو الدرجة التائية ت = ٦٤,٢) ، واختبارات الذكاء الحديثة تستخدم هذه الفكرة ، أى فكرة تحويل الدرجات الخام إلى نوع ما من الدرجات المحولة تحويلا خطيا . فاختبار ويكسلر للذكاء يستخدم درجات محولة متوسطها ١٠٠ وانحرافها المعيارى ١٥ ، وهذا بالطبع أفضل من فكرة نسبة الذكاء .

وعلى وجه العموم فإنه يمكن تحويل أى درجة معيارية (د) إلى درجة معيارية أخرى تناسب الباحث عن طريق اختيار متوسط وانحراف معيارى جديدين وتطبيق الصورة الآتية :

الدرجة المعيارية المناسبة = المتوسط الجديد +
الدرجة المعيارية د × الانحراف المعيارى الجديد

وسوف نوضح العلاقة بين مختلف هذه الدرجات المحولة توضيحا بيانيا عند دراستنا لخواص المنحنى الاعتدالى فى الفصل السادس

تمارين على الفصل الخامس

١ ــ أوجد الرتبة المئينية المقابلة للدرجة الخام ٨٩ فى جدول التوزيع التكرارى الآتى ، وفسر معناها .

الدرجة	التكرار
٩٥	٢
٩٤	٥
٩٣	٧
٩٢	١٠
٩١	١٣
٩٠	١٥
٨٩	١٦
٨٨	٢٠
٨٧	٢٥
٨٦	٢٦
المجموع	١٤٠

٢ ــ أوجد الرتبة المئينية والدرجة المعيارية (د) المقابلة للدرجة الخام ٤٤ فى جدول التوزيع التكرارى الآتى :

الفئات	التكرار
صفر — ٤	٢
٥ — ٩	٥
١٠ — ١٤	١٠
١٥ — ١٩	١٦
٢٠ — ٢٤	٢٣
٢٥ — ٢٩	١٨
٣٠ — ٣٤	١٣
٣٥ — ٣٩	١٠
٤٠ — ٤٤	١٢
٤٥ — ٤٩	٢٥
٥٠ — ٥٤	١٦
المجموع	١٥٠

٣ — أوجد الدرجة الخام المقابلة للرتبة المئينية ٣٥ فى التوزيع التكرارى المبين بالمسألة رقم (٢) السابقة . قرب الدرجة الخام إلى أقرب رقم عشرى .

٤ — ما الفرق بين المئينيات والرتب المئينية والنسب المئوية ؟

٥ — أوجد الدرجات المعيارية (د) والدرجات التائية (ت) ، ودرجات (GRE) المناظرة للدرجات المبينة بالتوزيع التكرارى الآتى :

التكرار	الفئات
صفر	صفر — ٤
٢	٥ — ٩
١	١٠ — ١٤
٢٦	١٥ — ١٩
١٧	٢٠ — ٢٤
٨	٢٥ — ٢٩
٦	٣٠ — ٣٤
٣	٣٥ — ٣٩
٢	٤٠ — ٤٤
١	٤٥ — ٤٩
٦٦	المجموع

٦ — ما هى عيوب الميئنيات كمقاييس للوضــــع النسبى وكيف تغلبت الدرجات المعيارية على هذه العيوب ؟

٧ - احسب الدرجات المعيارية المقابلة لكل درجة من درجات التوزيع الآتى :

س = (٥ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٢)

ثم احسب المتوسط والانحراف المعيارى للدرجات المعيارية التى حصلت عليها . وهل النتائج متفقة مع توقعك لها ؟ ولماذا ؟

٨ — إذا كانت درجتك فى اختبار الإحصاء ٩٠ ، فبالنسبة لأى من الفصول الاربعة الآتية يكون مركزك النسبي أفضل فى هذه المادة ؟ ولماذا ؟

(أ) $\bar{س}$ = ٦٥ ، ع = ١٣

(ب) $\bar{س}$ = ٧٥ ، ع = ١٠

(ﺟ) $\bar{س}$ = ٨ ، ع = ٨

(د) $\bar{س}$ = ٨٥ ، ع = ٢

٩ — بين لكل مما يأتى ما إذا كان استخدام المئينيات أم الدرجات المعيارية أفضل ؟

(أ) إذا كان ميزان القياس من النوع الرتبي .

(ب) إذا كان توزيع البيانات ملتويا التواء شديداً .

(ﺟ) إذا كان عدد أفراد العينة قليلا .

(د) إذا كان الهدف هو إجراء تحويل خطى البيانات .

١٠ — كون جدول التوزيع التكرارى المتجمع النسبي للبيانات المبينة بالجدول المذكور بالمسألة رقم (٥) السابقة ومثل هذا التوزيع بيانيا ، ثم أوجد جبريا وبيانياً الرتب المئينية المناظرة للدرجات : ١٤,٥ ، ٢٢ ، ٣٤ وفسر معنى الرتب التى حصلت عليها .

١١ — إذا جاءك زميل لك وأخبرك أنه حصل على الدرجة ١٣٠ فى اختبار الإحصاء . ما هى المعلومات الأخرى التى يجب أن تحصل عليها حتى يمكنك تفسير هذه الدرجة ؟

١٢ — إذا علمت أن توزيعا اعتداليا متوسطه = ٣٠ ، وانحرافه المعيارى = ٦ .

(أ) أوجد الدرجات المعيارية (د) المقابلة للدرجات الخام الآتية :

٤٥ ، ٣٦ ، ٣٠ ، ٢٢ ، ١٨

(ب) حول الدرجات المعيارية التى حصلت عليها إلى توزيع آخر متوسطه = ٥٠ ، وانحرافه المعيارى = ١٠ .

١٣ — هل الدرجة المعيارية صفر تكافىء دائماً المئينى ٥٠ مهما اختلف شكل توزيع البيانات ؟ ولماذا ؟

١٤ — إذا أعطيت الدرجات الآتية :

١ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

(أ) احسب المتوسط والانحراف المعيارى .

(ب) احسب الدرجات المعيارية (د) المقابلة لكل درجة منها .

(ﺟ) حول الدرجات بحيث تكون توزيعا جديداً متوسطه ٥٠ وانحرافه المعيارى .

(د) حول الدرجات بحيث تكون توزيعا جديدا متوسطه ١٠٠ وانحرافه المعيارى ١٥ ، ١٠ .

١٥ — طبق اختبارين س ، ص فى مادة الجبر على تلاميذ نفس الفصل ، فإذا كان متوسط درجات الاختبار س يساوى ٣٥ وانحرافه المعيارى ٢٧ ، ومتوسط درجات الاختبار ص يساوى ٨٥ ، وانحرافه المعيارى ١٥ . حصل تلميذ فى الفصل على الدرجة ٣٢ فى الاختبار س ، ٨٠ فى الاختبار ص . بافتراض أن توزيعى الدرجات فى الاختبارين لهما تقريبا نفس الشكل . فأى عبارة من العبارات التالية تكون صحيحة ؟ ولماذا ؟

(أ) تحصيل التلميذ فى الاختبار س أفضل من تحصيله فى الاختبار ص .

(ب) تحصيل التلميذ فى الاختبار ص أفضل من تحصيله فى الاختبار س .

(ﺟ) تحصيل التلميذ فى كل من الاختبارين س ، ص متكافىء .

(د) المعلومات المعطاة ليست كافية لمقارنة تحصيل الطالب فى الاختبارين .

الفصل السادس

التوزيعات الاعتدالية

المنحنى الاعتدالى

خواص المنحنى الاعتدالى

المساحة تحت المنحنى الاعتدالى

استخدام خصائص المنحنى الاعتدالى

فى تحليل البيانات

إيجاد المئينيات باستخدام المنحنى الاعتدالى

تحويل التوزيعات المختلفة إلى الصورة الاعتدالية

مقدمة :

عرضنا فى الفصول السابقة الطرق المختلفة التى يمكن أن يستخدمها الباحث فى وصف توزيعات البيانات ذات المتغير الواحد مثل الوزن أو الطول أو نسبة الذكاء أو سمة من سمات الشخصية ، وما إلى ذلك . ومن بين هذه الطرق مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح كما عرضنا الطرق التى يمكن أن تستخدم فى الربط بين مجموعة الدرجات ككل وموقع كل درجة بالنسبة إلى غيرها من درجات مجموعة البيانات .

وقد رأينا أن هذه الأساليب الوصفية تعد وسيلة هامة لإبراز معنى ودلالة مجموعة البيانات . إلا أن هذه الأساليب لا تكون كافية فى أغلب الأحيان . فالباحث يحتاج عادة إلى معلومات عن توزيع البيانات أبعد مما تسمح به مثل هذه الأساليب وحدها . ولتوضيح ذلك نعرض المثال الآتى :

نفترض أنه فى إحدى الدراسات الخاصة بالمهارات المرتبطة بالألعاب الرياضية المختلفة ، قام باحث بقياس المدى الذى يستطيع به كل طالب رمى كرة اليد فى عينة بحثه التى يبلغ عددها ٢٠٣ طالبا فى إحدى الجامعات . وقد وجد أن المتوسط يساوى ١٦٤,١ قدما ، والانحراف المعيارى ٢٢,٨ قدما . فإذا أراد الباحث إجابة بعض الأسئلة التى تتعلق بالطالب المتوسط أو النموذجى Typical فإن هاتين المعلومتين تكفيان لهذا الغرض . ولكنه يحتاج إلى مزيد من المعلومات إذا أراد إجابة أسئلة مثل : ما هى أقرب أو أبعد مسافة يستطيع ١ ٪ من الطلاب أن يرمى الكرة إليها ؟ وما هى النسبة المئوية للطلاب الذين لا يستطيعون رمى الكرة أبعد من ١٣٠ قدما ؟ وما هو احتمال أن يرمى شخص اختير بطريقة عشوائية من العينة الكرة مسافة ١١٥ قدما أو أكثر ؟

فلكى يجيب الباحث على مثل هـذه الأسئلة يجب أن يعرف خصائص توزيع معين يسمى التوزيع الاعتدالى Normal Distribution الذى قدمنا له بإيجاز فى مستهل الفصل الثالث عند مناقشتنا لمفهوم النزعة المركزية . ونظرا لأهمية هذا النوع من التوزيعات واستخدامه فى كثير من المقاييس الإحصائية التى لا غنى عنها للباحث فى تحليله لبيانات بحثه . فإننا سنفرد هذا الفصل لدراسة التوزيعات الاعتدالية بصورة أكثر تفصيلا .

وربما يقول قائل أنه إذا كان توزيع البيانات المستمدة من كثير من الظواهر تأخذ شكل التوزيع الاعتدالى فما الحاجة إلى استخدام طرق إحصائية أخرى طالما أننا نستطيع إجابة الأسئلة السابقة وما يشبهها باستخدام خصائص التوزيعات الاعتدالية .

وفى الحقيقة هذا صحيح ، ولكن نفترض أن عينة الطلاب فى الدراسة التى أشرنا إليها والمكونة من ٢٠٣ طالبا كانت ممثلة لجميع طلاب الجامعة ، فإذا أراد الباحث إجابة أسئلة تتعلق بمجتمع طلاب الجامعة ككل وليس فقط بعينة بحثه ، أى يود أن يعمم النتائج على مجتمع طلاب الجامعة باستخدام عينة ممثلة من هذا المجتمع فإن هـذا يستدعى دراسة مقاييس إحصائية أخرى تعتمد على خواص المنحنى الاعتدالى .

ونظرا لأننا قسمنا الكتاب إلى جزأين أحدهما يختص بالأساليب الوصفية فى تحليل البيانات والآخر يختص بالأساليب الاستدلالية ، فإننا سنقتصر فى هذا الفصل على التعريف بالمنحنى الاعتدالى وخصائصه واستخداماته ، كما سنقتصر على دراسة طرق تحليل البيانات الخاصة بالعينات . ونرجىء عمليـة الاستدلال على خصائص المجتمع الأصل باستخدام البيانات المستمدة من العينات المشتقة من هذا المجتمع عندما نناقش الأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات والتى سنتعرض لها فى الجزء الثانى من الكتاب .

المنحنى الاعتدالى :

يطلق عادة على التوزيع الاعتدالى اسم المنحنى الاعتدالى وهو من المنحنيات المتصلة Continuous التى تعتبر من أهم المنحنيات المستخدمة فى البحوث النفسية والتربوية .

والمنحنى الاعتدالى هو منحنى نظرى يمكن تمثيله بمعادلة رياضية يمكن البرهنة عليها ، ولكن لا يمكن أن تتحقق تماما باستخدام البيانات التجريبية . ويرجع الفضل فى اكتشاف الأساس النظرى وبحث الخصائص الرياضية لهذا المنحنى إلى لابلاس Laplace (١٧٤٩ — ١٨٢٧) ، وديموافر Demoivre (١٦٦٨ — ١٧٤٥) ، وجاوس Gauss (١٧٧٧ — ١٨٥٥) ، والمنحنى — كما هو موضح بشكل رقم (٢٨) — يشبه الجرس ولذلك يمكن أن يسمى المنحنى الجرسى Bell—Shaped Curve أو منحنى الصدفة أو منحنى الخطأ .



شكل رقم (٢٨)
المنحنى الجرسى أو منحنى الصدفة او منحنى الخطأ

فكثيراً ما نفترض فى البحوث النفسية والتربوية أن بعض السمات تتوزع توزيعا اعتداليا على الرغم من أن البيانات التجريبية الخاصة بهذه السمات — كما ذكرنا — لا يحتمل أن تتفق تماما مع شكل هذا التوزيع .

فكثير من التوزيعات التكرارية تقترب إلى حد ما من شكل التوزيع

الاعتدالى ، ولذلك نفترض أنها تأخذ هذا الشكل ، كما نفترض أنه قد حدث خطأ فى دراسة السمات موضع البحث إذا اختلف شكل التوزيع الخاص بهذه السمات عن شكل التوزيع الاعتدالى .

ولا ترجع أهمية المنحنى الاعتدالى فقط إلى افتراض أن الدرجات تتوزع توزيعا اعتداليا ، ولكن لأن توزيعات المعاينات Sampling Distributions الخاصة بكثير من المقاييس الإحصائية تتوزع توزيعاً اعتداليا أو يفترض أنها كذلك .

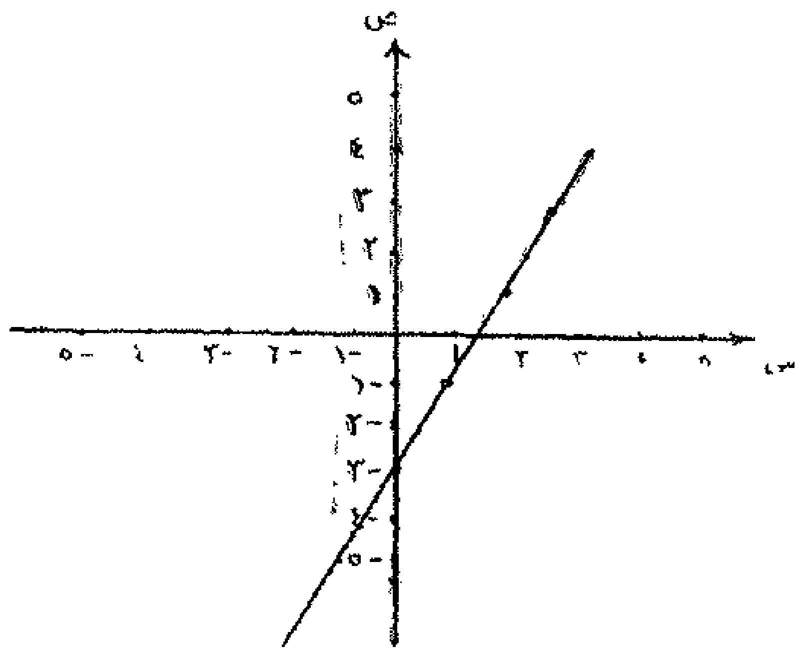
المعادلة الرياضية للمنحنى الاعتدالى :

إن دراسة العلاقات بين المتغيرات تعد من الأمور الأساسية فى البحث العلمى . وتعبر المعادلات الرياضية عن مثل هذه العلاقات . فإذا ارتبط متغيران بحيث إنه إذا علمنا قيمة أحدهما يمكن تحديد قيمة الآخر ، فإنه يقال أن أحدهما دالة Function للآخر . والمعادلة الرياضية هى تعبير عن مثل هذه العلاقة .

ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالمعادلة العامة ص = د (س) وتقرأ ص دالة فى س كما ، يمكن تمثيلها بيانيا ، حيث يمثل المتغير س على المحور الأفقى (السينى) ، والمتغير ص على المحور الرأسى (الصادى) ويمثل كل زوج مرتب من الدرجات بنقطة فى مستوى المحورين . وعن طريق توصيل هذه النقط نحصل على منحنى يمثل المعادلة الرياضية تمثيلا بيانيا .

فمثلا يمكن تمثيل المعادلة ص = ٢ س — ٣ بخط مستقيم مبين بالشكل الآتى :

س	١-	صفر	١	٢	٣	٤
ص	٥	٣	١ -	١	٣	٥



شكل رقم (٢٩)
تمثيل بياني لمعادلة خط مستقيم

ويمكن التعبير عن شكل المنحنى الاعتدالي بمعادلة رياضية أكثر تعقيداً ، وفي الحقيقة أن هذه المعادلة تمثل عددا لانهائياً من المنحنيات الاعتدالية التي تختلف في متوسطها وانحرافها المعياري ، وتتحدد معادلة أي منها إذا علمنا المتوسط والانحراف المعياري الخاص بها .

ومعادلة مجموعة المنحنيات الاعتدالية هي :

$$ص = \frac{1}{ع\sqrt{2ط}} \; e^{\frac{-(س - \overline{س})^{2}}{2ع^{2}}}$$

حيث ص = ارتفاع المنحنى الذى يناظر درجة معينة

س = الدرجة التى تناظر ارتفاعا معنا

س̄ = متوسط المتغير س

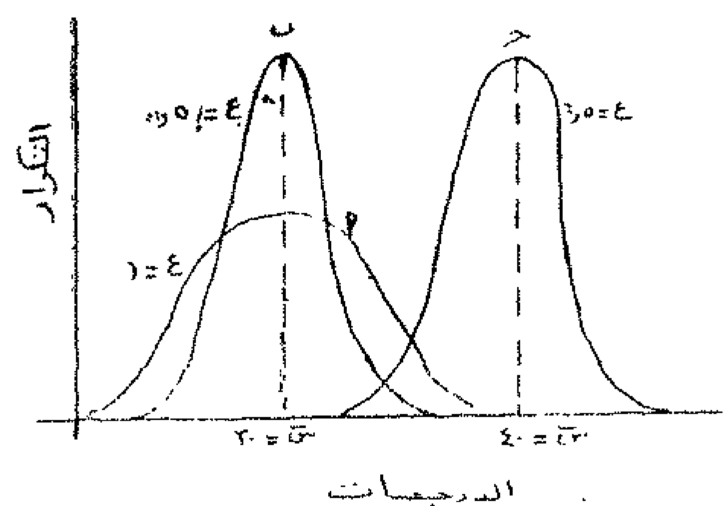
ع = الانحراف المعيارى للمتغير س

ط = ثابت يسمى النسبة التقريبية وهو يساوى ٣,١٤١٦ تقريبا

e = ثابت يسمى الأساس اللوغاريتمى الطبيعى وهو يساوى ٢,٧١٨٣ تقريبا .

ومن هذه المعادلة نلاحظ أهمية كل من المتوسط والانحراف المعيارى فى تحديد أحد أعضاء مجموعة المنحنيات الاعتدالية .

فإذا نظرنا إلى الشكل رقم (٣٠) نلاحظ أن المنحنيين أ ، ب لهما نفس المتوسط ولكنهما يختلفان فى الانحراف المعيارى . أما المنحنيان الاعتداليان ب ، جـ فلهما نفس الانحراف المعيارى ولكنهما يختلفان فى المتوسط .



شكل رقم (٣٠)
المتوسط والانحراف المعيارى لمجموعة من المنحنيات الاعتدالية

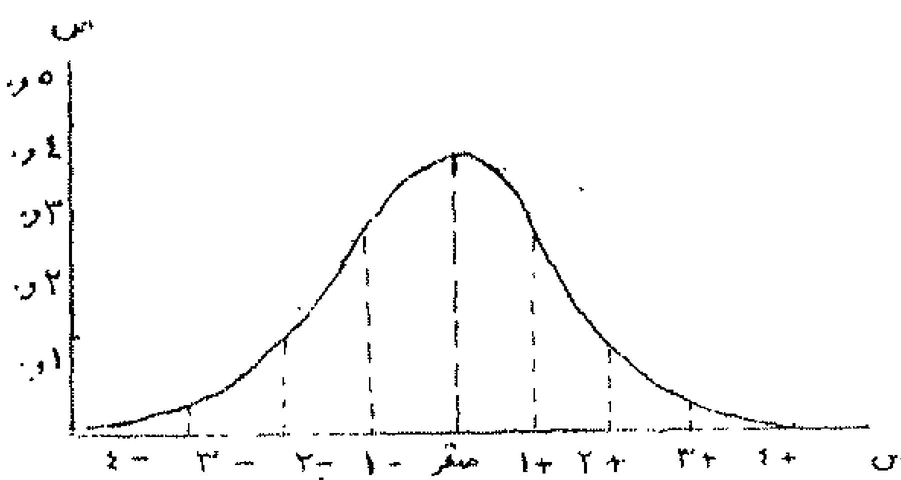
ويمكن تبسيط معادلة المنحنى الاعتدالى إلى حد ما بأن نجعل المتوسط = صفر والانحراف المعيارى = ١ فتصبح كالآتى :

$$ص = \frac{1}{\sqrt{٢ط}} هـ^{-\frac{1}{2} د^{2}}$$

حيث د هى الدرجة المعيارية وهى = $\frac{س - \bar{س}}{ع}$

أى أننا حولنا المعادلة إلى صورة معيارية ويسمى المنحنى حينئذ بالمنحنى الاعتدالى المعيارى Standard Normal Distribution .

وهذا المنحنى مبين بالشكل رقم (٣١) .



د	ص
٣,٠	٠,٠٠٤
−٢,٥	٠,٠١٨
−٢,٠	٠,٠٥٤
١,٥	٠,١٣٠
−١,٠	٠,٢٤٢
−٠,٥	٠,٣٥٢
صفر	٠,٣٩٩
+١,٠	٠,٢٤٢
+١,٥	٠,١٣٠
+٢,٠	٠,٠٥٤
+٢,٥	٠,٠١٨
+٣,٠	٠,٠٠٤

شكل رقم (٣١)
الاحداثيات الراسية (الصادية) المناظرة للدرجات المعيارية للمنحنى الاعتدالى المعيارى

والمنحنى الاعتدالى المعيارى له أهمية خاصة . فهو يمثل توزيعا نظريا يتميز بخصائص معينة تسمح بتحديد الرتب والنقط المئينية بسهولة .

ونظراً لأن التوزيع الاعتدالى يمكن تحويله إلى توزيع اعتدالى معيارى فإنه يمكن استخدام هذا التوزيع الأخير كتوزيع مرجعى عند المقارنه الإحصائية لمختلف أنواع الظواهر التى ربما كان يصعب مقارنتها بدون استخدامه . إذ يجب أن نلاحظ أنه عند تحويل مجموعة من التوزيعات الاعتدالية إلى توزيعات اعتدالية معيارية تشترك جميعها فى المتوسط ($\overline{س}$ = صفر) والانحراف المعيارى (ع = ١) ، فإنه يمكن مقارنة المئينيات المرتبطة بمقاييس معينة بالمئينيات المرتبطة بمقاييس أخرى بطريقة مباشرة ، بمعنى أنه إذا حددنا المئينيات باستخدام المنحنى الاعتدالى المعيارى فإن درجة طالب فى اختبار الرياضيات مثلا ربما تقابل المئينى ٨٧ ودرجته فى اختبار اللغة الإنجليزية ربما تقابل المئينى ٨٧ أيضا ، وهذا يدل على أن مركزه النسبى متساو فى توزيعى الاختبارين ، أى أننا لا يجب أن نهتم كثيرا باختلاف المتوسطين والانحرافين المعياريين لتوزيعى الدرجات الأصلية فى الاختبارين لأن التوزيعين المختلفين قد أصبحا توزيعاً واحداً هو التوزيع الاعتدالى المعيارى بعد إجراء التحويل المعيارى .

ومن المهم ملاحظة أنه يجب افتراض أن التوزيعات الأصلية للدرجات قبل تحويلها كانت تتخذ شكل المنحنى الاعتدالى . فتحويل درجات التوزيع غير الاعتدالى إلى درجات معيارية كما ذكرنا فى الفصل الخامس — لا يجعل التوزيع المعيارى اعتداليــا . فالتحويل إلى درجات معيارية يغير القيم العددية للمتوسط والانحراف المعيارى فقط ولكنه لا يغير من شكل التوزيع أو يحوله إلى توزيع اعتدالى . ولذلك يجب على الباحث أن يتأكد مما إذا كان التوزيع الأصلى يتخذ شكل المنحنى الاعتدالى قبل تحويله إلى توزيع اعتدالى معيارى .

خواص المنحنى الاعتدالى المعيارى :

١ — المنحنى الاعتدالى المعيارى هو منحنى متماثل حول المحور الرأسى

المار بمتوسط التوزيع والذى يمثل أقصى ارتفاع للمنحنى وهو يساوى ٣٩٩, كما يتضح من الجدول المصاحب لشكل رقم (٣١) .

ويمكن حساب ارتفاع المنحنى لجميع قيم الدرجات المعيارية (د) الممثلة على المحور الأفقى باستخدام معادلة المنحنى الاعتدالى المعيارى . إلا أنه ليس من الضرورى على الباحث أن يقوم بنفسه بحساب هذه الارتفاعات ، إذ يمكنه الرجوع إلى جدول (ب) المبين بالملحق الخاص بالجداول الإحصائية فى نهاية هذا الكتاب للحصول مباشرة على الارتفاعات ، والجدول يبين مختلف قيم ص (الارتفاع) التى تناظر مختلف قيم د (الدرجات المعيارية) .

٢ — المنحنى الاعتدالى هو منحنى متصل ، بمعنى أنه توجد لكل قيمة من قيم س قيمة مناظرة من قيم ص بما فى ذلك القيم الكسرية مهما صغرت .

ويفترض عند استخدام هذا المنحنى كنموذج للتوزيعات التكرارية أن المتغير س هو متغير متصل، وقد ناقشنا مفهوم المتغير المتصل بالتفصيل فى الفصل الأول .

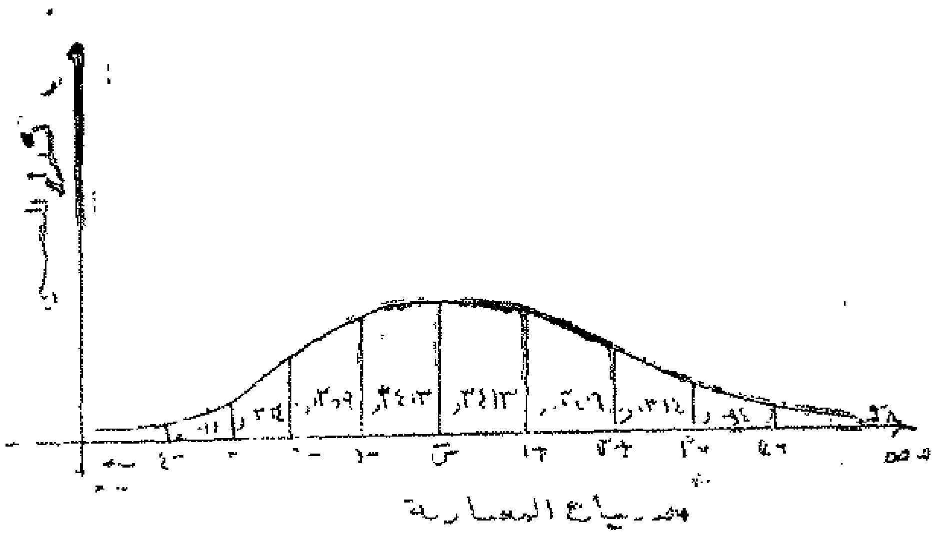
٣ — المنحنى الاعتدالى المعيارى يمتد من كلتا الجهتين إلى اللانهاية . أى أن المنحنى يقترب تدريجيا من المحور الأفقى ولكنه لا يمسه مهما مددناه من كلتا الجهتين ، ولا نحتاج عادة إلى مد طرفى المنحنى بعيداً إلى أقصى اليمين أو أقصى اليسار . فإذا نظرنا إلى الشكل رقم (٣١) نجد أن المساحة تحت الجزء الممتد إلى أربعة أو خمسة انحرافات معيارية على جانبى المتوسط تكون ضئيلة جداً بحيث يمكن إهمالها فى معظم الأغراض العملية .

٤ — نقط انقلاب المنحنى وهى النقط التى يتغير فيها اتجاه انحناء المنحنى تحدث عند الانحرافين المعياريين + ١ ، - ١ على جانبى المتوسط .

٥ — المساحة الكلية تحت المنحنى ، أى المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الأفقى تساوى الواحد الصحيح .

والمساحات المحصورة بين أجزاء من المنحنى الاعتدالى المعيارى والمحور الأفقى يمكن اعتبارها تكرارات نسبية، أى أننا إذا رسمنا من أى نقطتين على المحور الأفقى مستقيمين موازيين للمحور الرأسى ومددناهما حتى يقابلا المنحنى فإنه يمكننا تحديد المساحة المحصورة الناتجة بأجزاء من الواحد الصحيح . وفى الحقيقة أنه توجد علاقة ثابتة للمنحنى الواحد مهما اختلف شكله بين المسافة على المحور الأفقى مقاسه بوحدات انحرافات معيارية والمساحة تحت هذا المنحنى .

وتنطبق هذه القاعدة فى حالة المنحنى الاعتدالى، إذ أن الجزء من المساحة المحصورة بين المتوسط والخط الرأسى المرسوم من أى نقطة على محور الدرجات المعيارية (المحور الأفقى) لا يختلف مقداره باختلاف التوزيع الاعتدالى .



شكل رقم (٣٢)

المساحات تحت المنحنى الاعتدالى المحصورة بين المتوسط والدرجات المعيارية الصحيحة

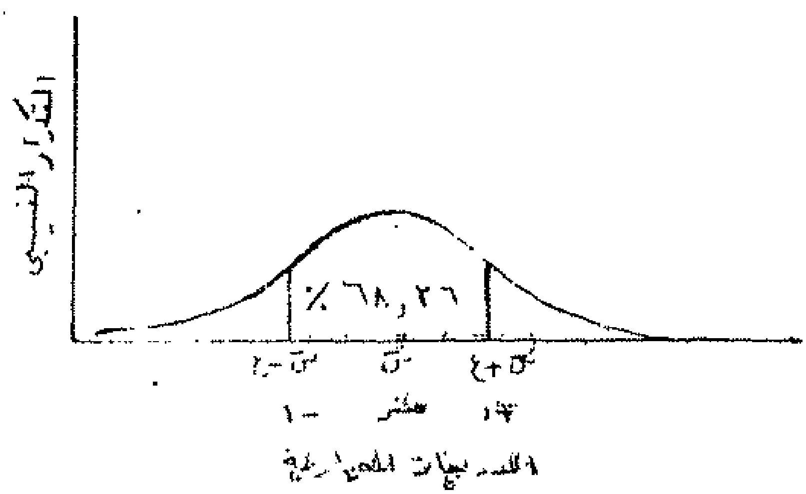
فاذا نظرنا إلى الشكل رقم (٣٢) : نجد أن ٣٤,١٣ ٪ من درجات التوزيع الاعتدالى تقع بين المتوسط والدرجة المعيارية + ١ ، ١٢,٥٩ ٪ من هذه الدرجات تقع بين الدرجتين المعياريتين + ١ ، + ٢ .

أى أن ٤٧,٧٢٪ (١٣,٥٩ + ٣٤,١٣) من الدرجات تقع بين المتوسط ، الدرجة المعيارية + ٢ .

ونجد أيضا أن ٢,١٤٪ من الدرجات تقع بين الدرجتين المعياريتين + ٢ ، + ٣ . أى أن ٤٩,٨٦٪ (٤٧,٧٢ + ٢,١٤) من الدرجات تقع بين المتوسط والدرجة المعيارية + ٣ .

ونظرا لتماثل المنحنى فإن نفس هذه النسب المئوية من الدرجات تقع بين المتوسط والدرجات المعيارية السالبة .

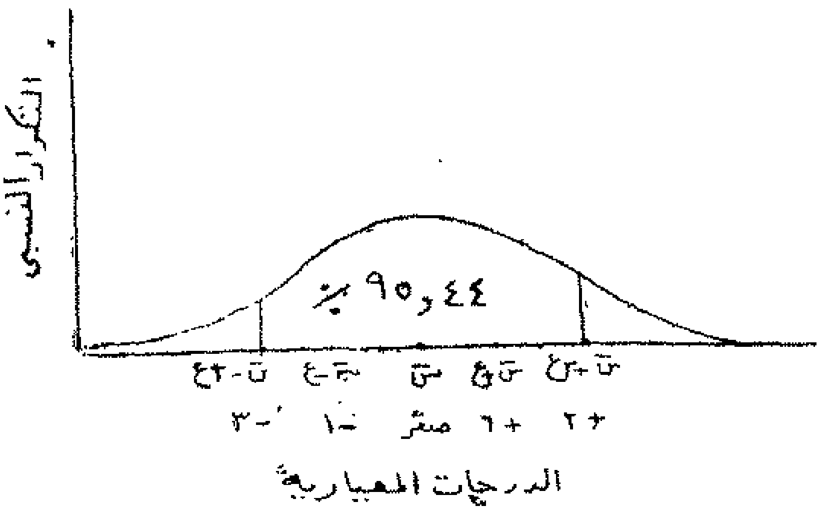
وكلما اتجهنا نحو طرفى التوزيع إلى أكثر من + ٣ أو — ٣ درجة معيارية تقل المساحة تحت المنحنى بدرجة ملحوظة بحيث يمكن إهمالها ، إذ أن ٩٩,٧٢٪ من المساحة الكلية تحت المنحنى تنحصر بين + ٣ ، — ٣ درجة معيارية ، ٠,٢٨٪ من المساحة الكلية تقع خارج هذا المدى ، وهى بالطبع نسبة ضئيلة جدا . والأشكال الثلاثة الآتية (أرقام ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥) توضح هذه المساحات :



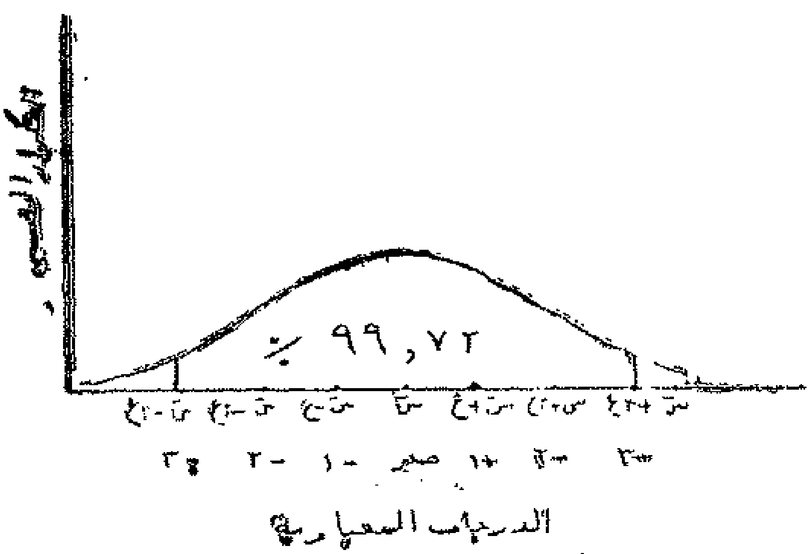
شكل رقم (٣٣)

المساحة تحت المنحنى الاعتدالي بين الدرجتين

المعياريتين — ١ ، + ١



شكل رقم (٣٤)
المساحة تحت المنحنى الاعتدالى بين الدرجتين
المعياريتين — ٢ ، + ٢



شكل رقم (٣٥)
المساحة تحت المنحنى الاعتدالى بين الدرجتين
المعياريتين — ٣ ، + ٣

ويمكن توضيح هذه المساحات بالمثالين الآتيين :

مثال (١) :

إذا كان توزيع أوزان عينة عشوائية تتكون من ١٠٠٠٠ رجل يأخذ شكل المنحنى الاعتدالى ، فإن ٣٤١٣ رجلا تقريباً (أى ٣٤,١٣٪ من العدد الكلى) سوف تقع أوزانهم بين متوسط الأوزان والوزن الذى يبعد بقدر انحراف معيارى واحد عن المتوسط ، ٤٧٧٢ رجلا تقريبا (أى ٤٧,٧٢٪ من العدد الكلى) سوف تقع أوزانهم بين متوسط الأوزان والوزن الذى يبعد بقدر انحرافين معياريين عن المتوسط ، وهكذا .

مثال (٢) :

إذا كان متوسط درجات عينة من الطلاب عددها ١٠٠٠ فى اختبار ما هو ١٢٠,٩ والانحراف المعيارى للدرجات ٢٠,٤ . فإذا افترضنا أن توزيع هذه الدرجات كان اعتدالياً ، فإن ٣٤,١٣٪ من هؤلاء الطلاب ، أى ٣٤١ طالبا تقريبا سوف تقع درجاتهم بين ١٢٠,٩ ، ١٢٠,٩ + ٢٠,٤ أى بين ١٢٠,٩ ، ١٤١,٣ . فإذا كانت لدينا درجات عينة الطلاب ، ربما نجد أن ٣٣٠ طالبا مثلا حصلوا فعلا على درجات تقع بين ١٢٠,٩ ، ١٤١,٣ ، فعندئذ يمكننا القول بأن هذا العدد قريب جداً من العدد الذى أمكن التنبؤ به باستخدام خواص المنحنى الاعتدالى .

تعيين أجزاء المساحة الواقعة تحت المنحنى الاعتدالى المعيارى بين المتوسط والدرجات المعيارية المختلفة :

اقتصرنا عند مناقشتنا لخواص المنحنى الاعتدالى المعيارى على توضيح المساحات تحت هذا المنحنى المحصورة بين المتوسط ودرجات معيارية معينة . إلا أنه يمكننا تحديد النسب المئوية للمساحات بين المتوسط وأى درجة معيارية

أخرى ، أو بين أى درجتين معياريتين باستخدام الجدول (ﺟ) المبين بالملحق فى آخر الكتاب .

والجدول يشتمل على المساحات المحصورة بين المتوسط والدرجات المعيارية المختلفة التى تراوح بين صفر ، ٤ بما فى ذلك الدرجات الكسرية ، وكذلك على المساحات الصغرى والمساحات الكبرى .

فمثلا إذا حصل طالب على الدرجة ٢٤,٦٥ فى متغير يتخذ شكل توزيع اعتدالى متوسطه = ١٦ ، وانحرافه المعيارى = ٥ ، فإن درجته المعيارية

$$= \frac{٢٤,٦٥ - ١٦}{٥} = ١,٧٣$$

وبالرجوع إلى العمود الأول فى الجدول نبحث عن الدرجة المعيارية ١,٧٣ ، ثم نوجد ما يقابلها فى العمود الثانى من مساحة تحت المنحنى الاعتدالى المعيارى محصورة بين المتوسط وهذه الدرجة ، فنجد أن هذه المساحة تساوى ٠,٤٥٨٢ أى ٤٥,٨٢٪ . ونظراً لأن ٥٠٪ من المساحة الكلية تقع دون المتوسط لأن التوزيع متماثل ، فيمكننا استنتاج أن ٩٥,٨٢٪ أى (٥٠ + ٤٥,٨٢) من المساحة الكلية تقل عن الدرجة ٢٤,٦٥ . ولذا يمكن اعتبار أن الرتبة المئينية المقابلة لهذه الدرجة هى ٩٥,٨٢ .

وإذا افترضنا أن طالبا آخر حصل على الدرجة ٧,٣٥ فى نفس المتغير السابق الذى يتخذ شكل التوزيع الاعتدالى ، فإن درجته المعيارية =

$$\frac{٧,٣٥ - ١٦}{٥} = - ١,٧٣ .$$

ونظراً لأن المنحنى الاعتدالى متماثل فإن العمود الأول بالجدول (ﺟ) يقتصر على الدرجات المعيارية الموجبة لأن أجزاء المساحات المقابلة للدرجات المعيارية السالبة هى نفسها المقابلة للدرجات المعيارية الموجبة . ولذلك فإن المساحة

المحصورة بين المتوسط والدرجة المعيارية — ١,٧٣ تساوى أيضا ٤٥,٨٢٪ . ولهذا يمكن الحصول على الرتبة المئينية المقابلة للدرجة ٧,٣٥ إما بطرح ٤٥,٨٢٪ من ٥٠٪ ، أو باستخدام العمود الرابع فى الجدول (جـ) مباشرة . والرتبة المئينية فى كلتا الحالتين هى ٤,١٨ .

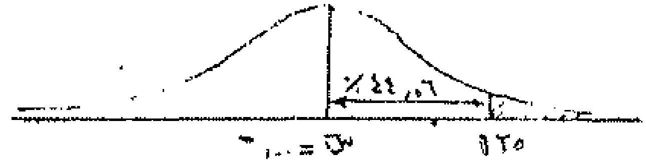
استخدام خصائص المنحنى الاعتدالى فى تحليل البيانات :

سبق أن ذكرنا فى مستهل هذا الفصل أنه يمكن للباحث استخدام خواص المنحنى الاعتدالى فى إجابة كثير من الأسئلة المتعلقة بمجموعة من البيانات . وسنعرض فيما يلى بعض هذه الأسئلة ونجيب عليها باستخدام مجموعة افتراضية من البيانات حتى يتسنى للباحث ملاحظة كيفية استخدام جدول المساحات (جدول جـ) فى إجابة هذه الأسئلة .

والبيانات خاصة بدرجات مجتمع أصل معين Population فى اختبار للذكاء تتوزع توزيعا اعتداليا متوسطه = ١٠٠ ، وانحرافه المعيارى = ١٦ .

١ — ماهى النسبة المئوية للحالات التى تقع بين المتوسط والدرجة ١٢٥ فى الاختبار ؟ وما هى الرتبة المئينية المقابلة لهذه الدرجة فى المجتمع الأصل ؟

فالخطوة الأولى التى يجدر على الباحث اتباعها أن يرسم شكلا توضيحيا يبين فيه المعلومات المذكورة فى السؤال كالآتى :



شكل رقم (٣٦)

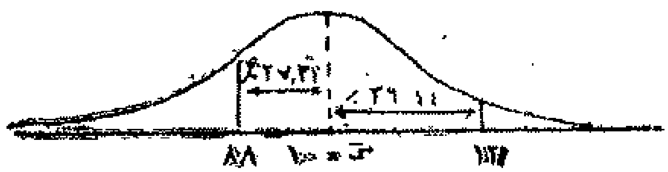
والخطوة الثانية تحول الدرجة الخام إلى درجة معيارية باستخدام القانون :

$$د = \frac{ص - \overline{س}}{ع}$$

$$\text{فى هذا المثال د} = \frac{١٢٥ - ١٠٠}{١٦} = ١,٥٦$$

والخطوة الثالثة : يرجع إلى الجدول (ح) المبين بالملحق ويبحث فى العمود الأول عن الدرجة المعيارية ١,٥٦ ، فيوجد المساحة المحصورة بين المتوسط وهذه الدرجة من العمود الثانى فيجدها ٤٤,٠٦٪ ، وبذلك تكون الرتبة المئينية المقابلة للدرجة ١٢٥ هى ٥٠ + ٤٤,٠٦ = ٩٤,٠٦ .

٢ — ماهى النسبة المئوية للحالات التى تقع بين الدرجتين ١٢٠ ، ٨٨ ؟



شكل رقم (٣٧)

للإجابة على هذا السؤال يجب على الباحث ألا يتسرع ويخطىء بأن يطرح الدرجة ٨٨ من الدرجة ١٢٠ ويقسم على الانحراف المعيارى ، فالمساحة تحت المنحنى الاعتدالى تعتمد على المتوسط كنقطة مرجعية ثابتة . ولذلك يجب على الباحث أن يوجد المساحة بين المتوسط والدرجتين ٨٨ ، ١٢٠ كل على حدة . ثم يجمع المساحتين ليحصل على إجابة السؤال . أى أنه يجب أن يتبع الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : يوجد الدرجة المعيارية المقابلة للدرجة س = ١٢

$$\text{د} = \frac{١٢٠ - ١٠٠}{١٦} = \frac{٢٠}{١٦} = ١,٢٥$$

الخطوة الثانية : يوجد الدرجة المعيارية المقابلة للدرجة س = ٨٨

$$\text{د} = \frac{٨٨ - ١٠٠}{١٦} = \frac{-١٢}{١٦} = -٠,٧٥$$

الخطوة الثالثة : يوجد المساحتين المناظرتين لكل من الدرجتين المعياريتين بالرجوع إلى العمود الثانى فى الجدول المبين بملحق الجداول .

المساحة بين المتوسط والدرجة المعيارية ١,٢٥ = ٣٩,٤٤ ٪

المساحة بين المتوسط والدرجة المعيارية — ٠,٧٥ = ٢٧,٣٤ ٪

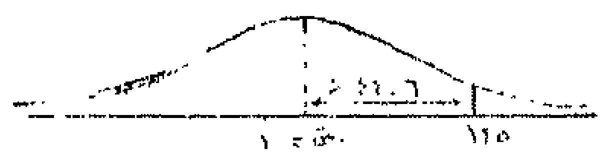
الخطوة الرابعة : يجمع المساحتين معا

أى أن المساحة المحصورة بين الدرجتين ٨٨ ، ١٢٠

= ٣٩,٤٤ + ٢٧,٣٤ = ٦٦,٧٨ ٪

(٣) ما هى النسبة المئوية للحالات التى نتوقع أن تحصل على درجة أعلى من ١٢٥ ؟

النسبة المئوية المطلوب إيجادها مبينة بالشكل الآتى :

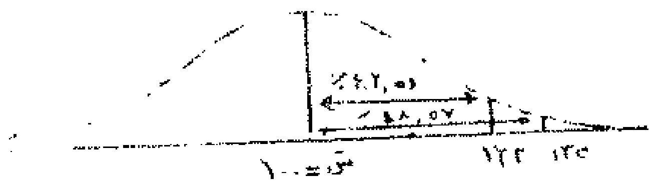


شكل رقم (٣٨)

وقد وجدنا عند إجابة السؤال الأول أن المساحة المحصورة بين المتوسط والدرجة ١٢٥ تساوى ٤٤,٠٦ من المساحة الكلية . ولكى يوجد الباحث النسبة المئوية للحالات التى نتوقع أن تحصل على درجة أعلى من ١٢٥ يجب أن يطرح هذه النسبة من ٥٠ (وهى المساحة تحت النصف الأيمن للتوزيع) .

أى أن النسبة المئوية المطلوبة = ٥٠ — ٤٤,٠٦ = ٥,٩٤ ٪ .

(٤) ما هى النسبة المئوية للحالات التى تقع بين الدرجتين ١٢٢ ، ١٣٥ ؟



شكل رقم (٣٩)

وهنا أيضاً لايستطيع الباحث التوصل إلى الإجابة مباشرة بل يجب أن يوجد المساحة المحصورة بين المتوسط وكل من الدرجتين ١٢٣ ، ١٣٥ ثم يطرح المساحتين بعضهما من بعض . ويكون الحل كالآتى :

الخطوة الأولى : يوجد الدرجة المعيارية المقابلة للدرجة ١٢٣

$$د = \frac{١٢٣ - ١٠٠}{١٦} = \frac{٢٣}{١٦} = ١,٤٤$$

الخطوة الثانية : يوجد الدرجة المعيارية المقابلة للدرجة ١٣٥

$$د = \frac{١٣٥ - ١٠٠}{١٦} = \frac{٣٥}{١٦} = ٢,١٩$$

الخطوة الثالثة : يوجد المساحتين المناظرتين لكل من الدرجتين المعياريتين بالرجوع إلى العمود الثانى فى الجدول (ﻫ) المبين بالملحق :

المساحة بين المتوسط والدرجة المعيارية ١,٤٤ = ٤٢,٥١ ٪

المساحة بين المتوسط والدرجة المعيارية ٢,١٩ = ٤٨,٥٧ ٪

الخطوة الرابعة : يطرح المساحتين بعضهما من بعض ليحصل على المساحة المحصورة بين الدرجتين ١٢٣ ، ١٣٥ .

أى أن المساحة = ٤٨,٥٧ — ٤٢,٥١ = ٦,٠٦ ٪ .

(٥) ما هو احتمال أن يحصل شخص اختير بطريقة عشوائية من المجتمع الأصل على درجة ٨٠ أو أكثر ؟



شكل رقم (٤٠)

ولإجابة هذا السؤال يجب أن يحول الباحث الدرجة ٨٠ إلى درجة معيارية .

$$د = \frac{٨٠ - ١٠٠}{١٦} = \frac{-٢٠}{١٦} = -١,٢٥$$

ثم يوجد المساحة المحصورة بين المتوسط والدرجة ١,٢٥ من العمود الثاني في الجدول (ح) فيجدها ٣٩,٤٤٪ . ولإيجاد النسبة المئوية للحالات التي تفوق الدرجة — ١,٢٥ يجب أن يضيف ٥٠٪ إلى المساحة السابقة .

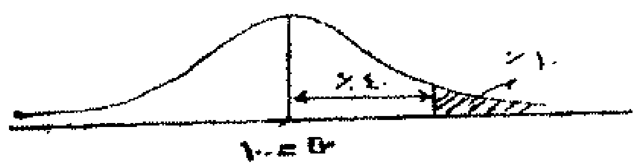
أى أن النسبة المئوية للمساحة المطلوبة = ٣٩,٤٤ + ٥٠ = ٨٩,٤٤٪ .

وللتعبير عن هذه المساحة باستخدام الاحتمالات يجب أن يحول هذه النسبة المئوية إلى كسر عشرى فتصبح ,٨٩٤٤ (أى حوالى ٠,٩٠) .

أى أن هناك احتمالا كبيرا أن يحصل شخص اختير بطريقة عشوائية من المجتمع الأصل على درجة ٨٠ أو أكثر .

(٦) أراد باحث أن يختـــار المجموعة المرتفعة الذكاء من هذا المجتمع الأصل وهم الذين يمثلون ١٠٪ العليا من الدرجات . ماهى الدرجة التي يجب أن يقبلها لتكون بمثابة حد فاصل يعتمد عليه فى اختيار هؤلاء الأشخاص .

هذه المسألة تعتبر عكس المسألة رقم (٥) السابقة. فى المسألة السابقة حصلنا على النسبة المئوية للمساحة باستخدام درجة معينة. أما فى هذه المسألة فإن النسبة المئوية معلومة لدينا ، والمطلوب تحديد الدرجة المقابلة لهذه النسبة . والمسألة موضحة بالشكل الآتى :



شكل رقم (٤١)

فالدرجة الخام المطلوبة تناظر الخط الذى يفصل النسبة ١٠ ٪ عن بقية التوزيع . وللحصول على هذه الدرجة يتبع الباحث عكس الخطوات الموضحة بالمسألة رقم (٥) .

الخطوة الأولى : إذا كان ١٠ ٪ أعلى من الخط الفاصل ، فإن ٤٠ ٪ (٥٠ ٪ — ١٠ ٪) تنحصر بين المتوسط وهذا الخط .

الخطوة الثانية : يرجع إلى العمود الثانى فى الجدول (ح) المبين بملحق الجداول ، ويوجد الدرجة المعيارية المقابلة للكسر ٠,٤٠٠٠ (٤٠ ٪) فنجد أن الدرجة د = ١,٢٩ تناظر الكسر ٠,٣٩٩٧ وهى أقرب ماتكون إلى ٠,٤٠٠٠ .

الخطوة الثالثة : يحدد إشارة الدرجة المعيارية . فى الشكل يتضح أن الخط الفاصل يقع على يمين المتوسط . ولذا فإن الدرجة المعيارية تكون موجبة وتساوى + ١,٢٨ .

الخطوة الرابعة : يحول الدرجة المعيارية السابقة إلى درجة خام باستخدام

القانون : $د = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

ويمكن كتابته على الصورة : $س = \bar{س} + دع$

وبالتعويض نحصل على : $س = \bar{س} + ١,٢٨ \times ١٦$

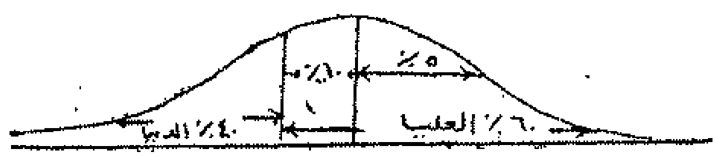
$= ١٠٠ + ٢٠,٤٨$

$= ١٢٠,٤٨$

أى أن الشخص الذى يحصل على درجة ١٢٠,٤٨ أو أكثر فى اختبار الذكاء يتم اختياره ضمن المجموعة المرتفعة الذكاء دون سواه .

٧ — ما هى الدرجة التى تفصل بين ٦٠٪ العليا ، ٤٠٪ الدنيا من أفراد المجتمع الأصل فى الذكاء .

المعلوم فى هذه المسألة هو النسبة المئوية والمطلوب إيجاد الدرجة . فهى تعتبر أيضا عكس المسألة رقم (٥) أى أننا نحتاج إلى إيجاد الدرجة الخام كما هو موضح بالشكل الآتى :



شكل (٤٢)

ونلاحظ هنا أن النسبة التى سنكشف عنها فى الجدول (جـ) ليست واضحة ، فاختيار أى من النسبتين ٤٠٪ أو ٦٠٪ دون معرفة أساس الاختيار يؤدى بالباحث إلى نتيجة خاطئة .

فالنسبة المئوية للمساحة المحصورة بين المتوسط والخط الفاصل هى ١٠٪ ، ولذلك يجب أن نكشف فى الجدول عن هذه النسبة .

فبالرجوع إلى العمود الثانى من الجدول والبحث عن الدرجة المعيارية المقابلة للكسر ٠,١٠٠٠ نجد أن الدرجة ٠,٢٥ تقابل الكسر ٠,٠٩٨٧ وهو أقرب ما يمكن إلى الكسر ٠,١٠٠٠ .

وبالنظر إلى الشكل التوضيحى نجد أن الدرجة الفاصلة المطلوبة تقع إلى يسار المتوسط ، أى أن هذه الدرجة المعيارية تكون سالبة وتساوى —٠,٢٥ ، ثم نحول هذه الدرجة المعيارية إلى درجة خام باستخدام القانون :

$$\text{س} = \overline{\text{س}} + \text{د ع}$$

$$= ١٠٠ + (—٠,٢٥) \times (١٦)$$

$$= ١٠٠ — ٤ = ٩٦$$

اى ان نتوقع أن الدرجة الخام التى تفصل بين ٦٠٪ العليا ، ٤٠٪ الدنيا من أفراد المجتمع الأصل فى الذكاء هى ٧٥ .

إيجاد المئينيات باستخدام المنحنى الاعتدالى :

أولا : إيجاد الرتبة المئينية المقابلة لدرجة خام معينة :

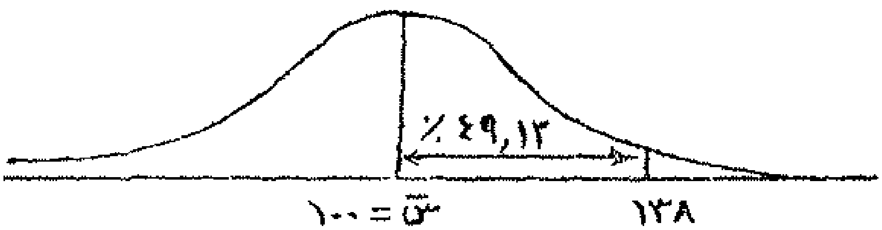
يمكن استخدام جدول مساحات المنحنى الاعتدالى (جدول جـ) فى تحديد الرتب المئينية المقابلة للدرجات الخام للبيانات التى تتوزع توزيعا اعتداليا . ويجب على الباحث أن يراعى أن الرتب المئينية التى يحصل عليها باستخدام هذا الجدول لا تكون دقيقة ما لم يكن توزيع الدرجات الخام اعتداليا أو قريبا منه .

وقد عرفنا فى الفصل الخامس الرتبة المئينية المقابلة لدرجة معينة بأنها النسبة المئوية للحالات (أو النسبة المئوية للتكرار) التى تقع دون هذه الدرجة .

فإذا أردنا تحديد الرتبة المئينية للدرجة الخام ١٣٨ فى البيانات السابقة الخاصة باختبار الذكاء ، يجب أن نحول هذه الدرجة الخام إلى درجة معيارية وهى :

$$د = \frac{١٣٨ - ١٠٠}{١٦} = \frac{٣٨}{١٦} = ٢,٣٨ \text{ تقريبا}$$

وبالرجوع إلى جدول (ج) نجد أن المساحة المحصورة بين المتوسط وهذه الدرجة = ٠,٤٩١٣ أى ٤٩,١٣ ٪ من مساحة النصف الأيمن للتوزيع الاعتدالى كما هو موضح بالشكل الآتى :



شكل (٤٣)

أى أن الدرجة ١٣٨ تفوق ٤٩,١٣٪ + ٥٠٪ أى تفوق ٩٩,١٣٪ من جميع الحالات فى المجتمع الأصل .

وعلى هذا فإن الرتبة المئينية المقابلة للدرجة ١٣٨ هى ٩٩ تقريبا .

ومن هذا نرى أننا قد حددنا الرتبة المئينية عن طريق إيجاد النسبة المئوية للتكرارات الواقعة دون هذه الدرجة .

ثانيا : إيجاد الدرجة الخام المقابلة لرتبة مئينية معينة :

إذا أردنا إيجاد الدرجة الخام المقابلة للرتبة المئينية ٣١ مثلا فى البيانات السابقة الخاصة باختبار الذكاء ، فإننا نبحث عن الدرجة التى تقع دونها ٣١٪ من الحالات . أى أن ١٩٪ من الحالات تقع بين الدرجة المطلوبة والمتوسط . وبالرجوع إلى الجدول (ج) نجد أن الكسر ٠,١٩٠٠ يناظر الدرجة المعيارية ٠,٥٠ تقريبا .

أى أن الدرجة المطلوبة تقل عن المتوسط بقدر نصف انحراف معيارى .

ويمكن تحويل الدرجة المعيارية −٠,٥ إلى درجة خام باستخدام القانون :

س = س̄ + د ع

أى أن س = ١٠٠ + (— ٠٫٥) × ١٦

= ١٠٠ — ٨ = ٩٢

وهى الدرجة الخام التى تقابل الرتبة المئينية ٣١ .

مزايا وعيوب الرتب المئينية والدرجات المعيارية :

يجدر بنا هنا أن نوضح للباحث بعض مزايا وعيوب الرتب المئينية والدرجات المعيارية . فالرتب المئينية أكثر سهولة فى تفسيرها من الدرجات المعيارية . فعندما نحدد للطالب أو الفرد العادى مركزه النسبى فى مجموعته فى أداء معين فإنه لن يحتاج إلى مزيد من التفسير لأدائه بالنسبة لأقرانه ، ولكن يعاب على الرتب المئينية أنها من المستوى الرتبى . وبذلك لا يمكن إجراء العمليات الحسابية الأربع عليها ، وهذا لا يعتبر عيبا يؤثر على تفسير الرتب المئينية ، وإنما يجعل هذه الرتب غير صالحة للتحليل الإحصائى المتقدم ، ولكن الدرجات المعيارية تسمح بهذا التحليل مثل ضم الدرجات المعيارية فى مقياس مركب ، كما أشرنا إلى ذلك فى الفصل الخامس لأنها من المستوى الفترى ، كذلك تسمح لنا بالاستفادة من خصائص المنحنى الاعتدالى (إذا كان توزيع الدرجات الأصلية اعتداليا) ، وبالتالى نستطيع إيجاد المئينيات المناظرة للدرجات المعيارية كما قدمنا ، وبذلك تجعل التفسير أكثر سهولة ، لأنه يصعب على الطالب أو الفرد العادى تفسير الدرجات المعيارية .

ويعاب أيضا على الرتب المئينية أنها تتوزع توزيعا مستطيلا فى حين أن توزيع درجات الاختبارات النفسية والتربوية التى يهتم فيها بإبراز الفروق الفردية يقترب عادة من شكل المنحنى الاعتدالى ، ويترتب على ذلك أن الفروق الضئيلة بين الدرجات الخام بالقرب من مركز التوزيع تناظر رتبا مئينية كبيرة بينما الفروق الكبيرة بين الدرجات الخام عند طرفى التوزيع تناظرها فروق

صغيرة فى هذه الرتب . ولذلك يجب على الباحث أن يدرك هذه العلاقات حتى يتيسر له التفسير الصحيح للرتب المئينية وبخاصة تلك التى تقترب من مركز التوزيع .

تحويل التوزيعات المختلفة إلى الصورة الاعتدالية :

أحيانا يود الباحث التأكد من أن توزيع البيانات التى حصل عليها يقترب من شكل التوزيع الاعتدالى حتى يستطيع الإفادة من خصائص هذا التوزيع كما رأينا فى هذا الفصل . أى أنه يود أن يعرف ما هو تكرار كل فئة من فئات المتغير — الذى يفترض أنه من المستوى الفترى — عندما يصبح توزيع المتغير قريبا بقدر الإمكان من شكل المنحنى الاعتدالى . ولكنه بالطبع لا يستطيع التأكد من ذلك بدقة من مجرد التمثيل البيانى لتوزيع المتغير . لذلك وجب عليه أن يستخدم طريقة أدق تمكنه من مقارنة تكرارات التوزيع الذى حصل عليه بالتكرارات الخاصة بالتوزيع الاعتدالى . إذ يمكن اعتبار أن المنحنى الاعتدالى لأى مجموعة من البيانات هو منحنى أفضل مطابقة لهذه البيانات . فمنحنى أفضل مطابقة يشتمل على نفس العدد من الحالات التى تشتمل عليها مجموعة البيانات الأصلية ، وتسمى هذه الطريقة « طريقة المساحة Area Method » .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث لإجراء مثل هذا التحويل باستخدام هذه الطريقة نعرض المثال الآتى :

نفترض أن الباحث حصل على البيانات الآتية الموضحة فى جدول رقم (٢٢) من عينة تتكون من ١٥٠ طالبا ، ومتوسط توزيع البيانات = ٦٣,٩ ، وانحرافه المعيارى = ١٢,٢ .

(١) الفئات	(٢) التكرارات الأصلية ت.	(٣) الحدود العليا للفئات	(٤) ح	(٥) د	(٦) المساحة التي تحدد فئة من أسفل	(٧) المساحة داخل الفئة	(٨) التكرارات المتوقعة تم	(٩) التكرارات المتوقعة مقربة
٩٠—٩٤	١	٩٤,٥	٣٠,٦	٢,٥١	٠,٩٩٤٠	٠,٠١١٩	١,٧٨٥	١,٨
٨٥—٨٩	٣	٨٩,٥	٢٥,٦	٢,١٠	٠,٩٨٢١	٠,٠٢٧٦	٤,١٤٠	٤,١
٨٠—٨٤	٨	/٤,٥	٢٠,٦	١,٦٩	٠,٩٥٤٥	٠,٠٥٤٨	٨,٢٢٠	٨,٢
٧٥—٧٩	١٢	٧٩,٥	١٥,٦	١,٢٨	٠,٨٩٩٧	٠,٩١٩	١٣,٨٧٥	١٣,٩
٧٠—٧٤	٢٨	٧٤,٥	١٠,٦	٠,٨٧	٠,٨٠٧٨	٠,١٣٠٦	١٩,٥٩٠	١٩,٦
٦٥—٦٩	٣٦	٦٩,٥	٥,٦	٠,٤٦	٠,٦٧٧٢	٠,١٥٧٣	٢٣,٥٩٥	٢٣,٦
٦٠—٦٤	١٢	٦٤,٥	٠,٦	٠,٠٥	٠,٥١٩٩	٠,١٦٠٥	٢٤,٠٧٥	٢٤,١
٥٥—٥٩	١٨	٥٩,٥	—٤,٤	—٠,٣٦	٠,٢٥٩٤	٠,١٣٨٨	٢٠,٨٢٠	٢٠,٨
٥٠—٥٤	١٠	٥٤,٥	—٩,٤	—٠,٧٧	٠,٢٢٠٦	٠,١٠١٦	١٥,٢٤٠	١٥,٢
٤٥—٤٩	٨	٤٩,٥	—١٤,٤	—١,١٨	٠,١١٩٠	٠,٠٦٣١	٩,٤٦٥	٩,٥
٤٠—٤٤	٨	٤٤,٥	—١٩,٤	١,٥٩٠	,٠٥٥٩	٠,٠٣٣١	٤,٩٦٥	٥,٠
٣٥—٣٩	٥	٣٩,٥	—٢٤,٤	—٢,٠٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠١٤٨	٢,٢٢٠	٢,٢
٣٠—٣٤	١	٣٤,٥	—٢٩,٤	—٢,٤١	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٠	١,٢٠٠	١,٢
ن = ١٥٠						٠,٩٩٤٠		١٤٩,١
س̄ = ٦٣,٩								
ع = ١٢,٢								

جدول رقم (٢٢)
خطوات تحويل التوزيعات التكرارية الى الصورة الاعتدالية

ونلاحظ من هذا الجدول أن العمود الأول يشتمل على الفئات ، والعمود الثاني يشتمل على التكرارات الملاحظة التي رمزنا لها بالرمز (ت.) . وبعد تحديد هذه الفئات والتكرارات الملاحظة يمكن للباحث أن يتبع الخطوات الآتية :

(أولا) يحدد الحدود الحقيقية العليا لكل فئة في العمود الثالث .

(ثانيا) يحدد قيم (ح) أي انحرافات قيم الحدود الحقيقية العليا للفئات عن متوسط التوزيع الأصلي وهو يساوي ٦٣,٩ . وتدون هذه الانحرافات في العمود الرابع .

ثالثاً : يحول قيم ح التى حصل عليها فى العمود الرابع إلى درجات معيارية (د) وذلك بقسمتها على الانحراف المعيارى ع وهو يساوى ١٢,٢ ، وتدون هذه الدرجات المعيارية فى العمود الخامس .

رابعاً : يرجع إلى جدول مساحات المنحنى الاعتدالى المبينة بالجدول (جـ) فى ملحق الكتاب لتحديد نسبة المساحة تحت المنحنى الاعتدالى التى تقع إلى يسار هذه الدرجة أى تحدها من أسفل . فمثلا المساحة التى تقع إلى يسار الدرجة المعيارية ٢,٥١ (الدرجة التى فى أعلى العمود الخامس) تساوى ٠,٩٩٤٠ من المساحة الكلية تحت المنحنى الاعتدالى . وتدون هذه المساحات فى العمود السادس .

خامسا : يحدد النسب المدونة فى العمود السابع كالآتى :

النسبة المدونة فى أسفل العمود السابع وهى ٠,٠٠٨٠ هى نفسها النسبة المدونة فى أسفل العمود السادس لأن كلا من المساحة التى تقع إلى يسار الفئة ٣٠ — ٣٤ والمساحة المحصورة بين حدى هذه الفئة تساوى المساحة التى تقع إلى يسار الحد الأعلى الحقيقى لهذه الفئة . ويمكن الحصول على المساحة المحصورة بين حدى الفئة ٣٥ — ٣٩ بطرح ٠,٠٠٨٠ (أى الجزء من المساحة المحصورة بين حدى الفئة ٣٠ — ٣٤) من ٠,٠٠٢٨ (أى الجزء من المساحة الذى يقع إلى يسار الحد الأعلى الحقيقى للفئة ٣٥ — ٣٩) فيكون الناتج ٠,٠١٤٨ . وبالمثل للفئة ٤٠ — ٤٤ نطرح ٠,٠٢٢٨ من ٠,٠٥٥٩ ، وهكذا فى بقية الفئات .

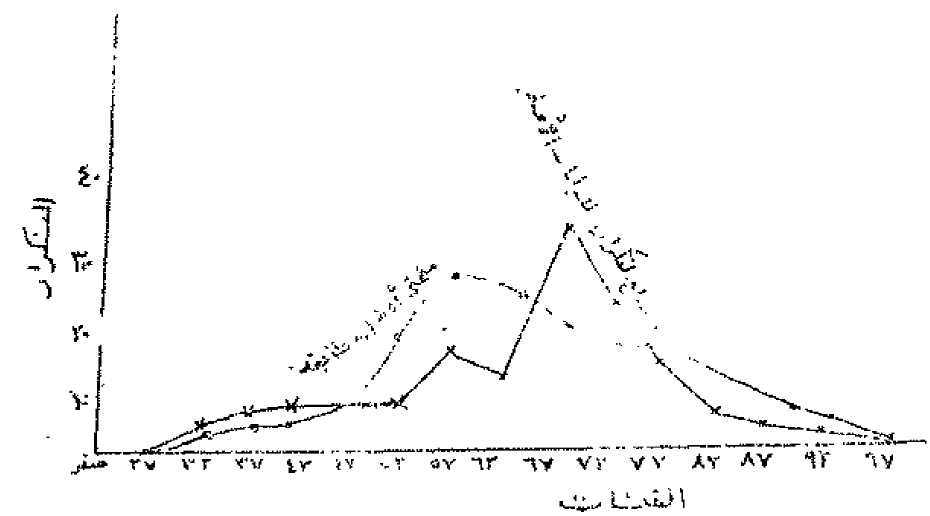
ومجموع قيم هذا العمود تساوى الواحد الصحيح تقريبا . إذ ربما يكون هذا المجموع أقل قليلا من الواحد الصحيح لأنه توجد دائما حالات تقع بالقرب من طرفى التوزيع الاعتدالى لا تؤخذ فى الاعتبار أثناء إجراء هذه الخطوة .

سادساً : يحصل على القيم المدونة فى العمود الثامن والتى رمزنا لها بالرمز (ت م) (أى التكرارات المتوقعة) بأن يضرب كل نسبة من نسب المساحات المدونة فى العمود السابع فى عدد الحالات أى ١٥٠ ، ويلاحظ أن مجموع هذا العمود ربما يقل قليلا عن ١٥٠ .

سابعاً : يقرب هذه التكرارات المتوقعة (ت م) إلى أقرب رقم عشرى

ثامناً : يرسم مضلعا تكرارياً للبيانات الأصلية ، وكذلك منحنيا تكراريا ممهداً للبيانات التى حصل عليها نتيجة لهذه الخطوات السبع بالطرق التى عرضنا لها فى الفصل الأول من هذا الكتاب . فيمثل الفئات على المحور الأفقى والتكرارات على المحور الرأسى ، ثم يعين النقط التى تناظر التكرارات الملاحظة لكل فئة ، ويصل بينها بخطوط مستقيمة ليحصل على المضلع التكرارى للبيانات الأصلية . ثم يعين النقط التى تناظر التكرارات المتوقعة لكل فئة ، والتى حصل عليها فى العمود التاسع ، ويصل بينها بخط منحن ممهد بقدر الإمكان فيحصل بذلك على المنحنى التكرارى للبيانات بعد إجراء عملية التحويل .

وفى الشكل رقم (٤٣) يكون منحنى أفضل مطابقة قد فرض على المضلع التكرارى للبيانات الأصلية .



شكل رقم (٤٣)

المضلع التكرارى والمنحنى التكرارى بعد تحوله

وسوف نعرض فى الجزء الثانى من الكتاب ، وهو الذى يختص بالأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات — مقياسا إحصائيا يسمى كا^2 Chi-Square ، وأحد استخداماته هو قياس حسن مطابقة التوزيع الذى يحصل عليه الباحث للتوزيع الاعتدالى ، ويعتمد حساب قيمة كا^2 على كل من التكرارات الأصلية والتكرارات التجريبية .

وهنا ربما يتساءل الباحث عن الفائدة المرجوة والمبرر الحقيقى لإجراء مثل هذا التحويل إلى الصورة الاعتدالية الذى يتطلب كثيراً من الجهد والوقت . وفى الحقيقة أنه ربما يجد الباحث أن التوزيع الاصلى لسمة أو لخاصية معينة الذى يحصل عليه من عينة ما لا يتخذ شكل المنحنى الاعتدالى ، بينما يكون توزيع هذه السمة أو الخاصية فى المجتمع الأصلى اعتداليا . فإذا استطاع الباحث التأكد من ذلك ، عندئذ ربما يجد أن من المفيد أن يحول توزيع البيانات التى استمدها من العينة إلى صورة التوزيع الاعتدالى ، وبذلك يحصل على توزيع أكثر تمهيداً من التوزيع الأصلى وتقل فيه أخطاء العينة . كما أن هذا التحويل يفيد فى تقنين الاختبارات النفسية والتربوية وفى تحليل الارتباط بين متغيرين .

كيف يختار الباحث التحويل المناسب لبيانات بحثه :

مما سبق يتضح أن المنحنى الاعتدالى يعتبر من المنحنيات الهامة التى يمكن أن يستعين بها الباحث فى حل كثير من المشكلات التى يقابلها عند تحليل البيانات التى يشتمل على توزيعات للدرجات أو النسب المئوية .

ولكننا نود أن نؤكد أنه بالرغم من تعدد هذه المشكلات التى عرضنا لبعضها فى هذا الفصل إلا أنه يمكن تيسير حلها إذا وضح فى ذهن الباحث أنها جميعا تعتمد على تحويل نوع معين من الوحدات إلى نوع آخر ، وعلى وجه التحديد فإن هذه الوحدات هى : الدرجة الخام ، الدرجة المعيارية ، النسبة المئوية للتكرار ، والتكرار الخام .

ويمكن توضيح ذلك بالشكل التخطيطى الآتى :

درجة خام   درجة معيارية   نسبة مئوية للتكرار   تكرار خام

س ⟷ د ⟷ ت ٪ ⟷ ت

$\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} = \text{د} \longrightarrow$ جدول (ج) بالملحق $\longrightarrow \frac{\text{ت} \% \times \text{ن}}{100}$

$\text{س} = \bar{\text{س}} + \text{د ع} \longleftarrow$ جدول (ج) بالملحق $\longleftarrow \text{ت} \% = \frac{\text{ت}}{\text{ن}} \times 100$

فالصف الأول فى هذا الشكل يلخص هذه المشكلات فى أن كل مشكلة منها تتطلب التحويل من وحدة إلى أخرى ، ونلاحظ أن الأسهم فى هذا الصف موجهة فى اتجاهين متقابلين مما يدل على أنه يمكن تحويل أى من الوحدات إلى الأخرى . ولكن فى جميع الأحوال يجب مراعاة اتباع الخطوات المبينة بالصف الثانى أو الثالث .

فلكى يحصل الباحث على النسبة المئوية للتكرار من الدرجة الخام يجب أن يحول الدرجة الخام إلى درجة معيارية ، ثم يحول الدرجة المعيارية إلى نسبة مئوية للتكرار . ولكى يحصل على الدرجة الخام من النسبة المئوية للتكرار يجب أن يحول النسبة المئوية للتكرار إلى درجة معيارية ثم يحول الدرجة المعيارية إلى درجة خام .

أما الصفان الثانى والثالث فى الشكل التخطيطى فهما يوضحان للباحث الخطوات التى يجب أن يتبعها عند إجراء هذه التحويلات .

فإذا كان المطلوب تحويل درجة خام إلى نسبة مئوية للتكرار (أو تكرار خام) تزيد أو تقل عن درجة معينة ، مثال ذلك : ما هى النسبة المئويه للحالات التى تزيد درجاتها عن ١٢٠ فى اختبار الذكاء ، فيجب أن ينتقل من اليمين إلى اليسار فى الصف الأول ، ويمر بالخطوات المبينة فى الصف الثانى .

أما إذا كان المطلوب تحويل النسبة المئوية لتكرار ما أو تكرار خام إلى درجة معيارية أو درجة خام ، مثال ذلك : ما هى الدرجة التى تحصل على أعلى منها النسبة ١٠ ٪ العليا من الطلاب فى توزيع درجات اختبار الذكاء ؟

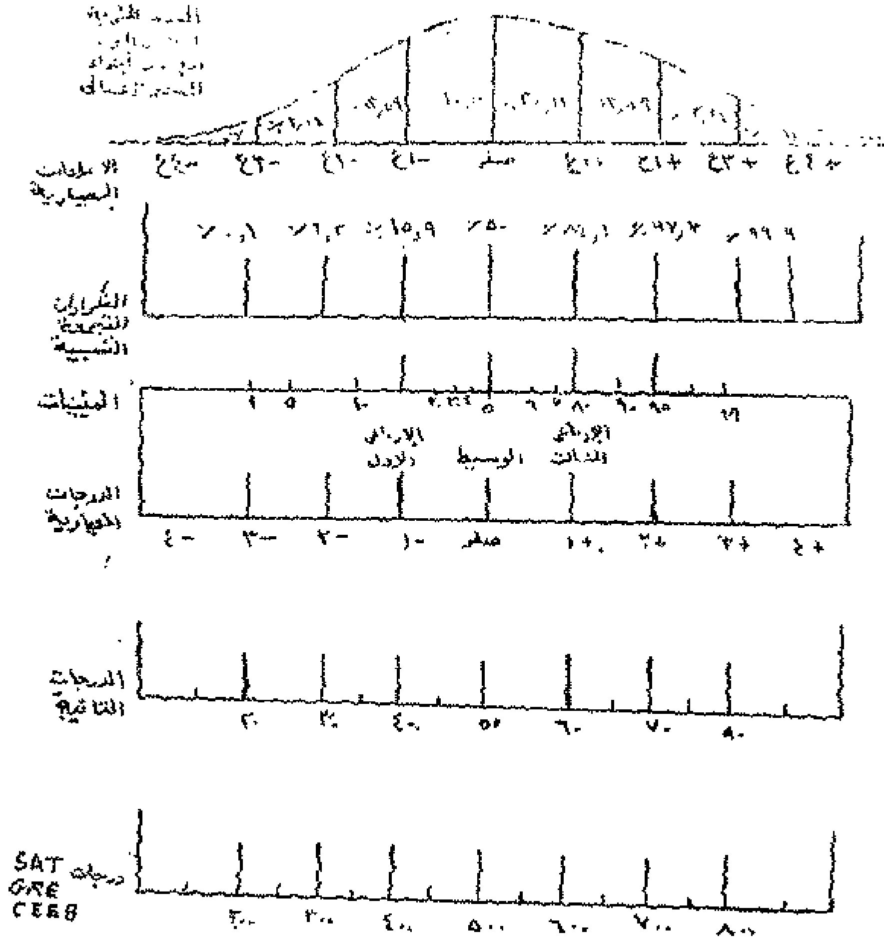
فيجب فى هذه الحالة أن ينتقل من اليسار إلى اليمين فى الصف الأول ، ويمر بالخطوات المبينة فى الصف الثالث .

وباختصار فإن الأسئلة التى يود الباحث الإجابة عليها باستخدام خواص المنحنى الاعتدالى وإن بدت متعددة ومختلفة إلا أنهـــا فى الحقيقة متشابهة . والسبب فى أنها تبدو متعددة ومختلفة أنه يمكن صياغتها بطرق مختلفة . ولذلك فإننا ننصح الباحث أن يوضح المعلومات المعطاة فى المشكلة أو السؤال الذى يود الإجابة عليه بالرسم — كما فعلنا فى الأمثلة السابقة — حتى يستطيع البدء فى حل المشكلة أو إجابة السؤال المطروح .

كما يجب على الباحث أن يلاحظ أن هذه العلاقات تنطبق فقط على الدرجات التى تتخذ شكل التوزيع الاعتدالى .

ونكرر القول بأن تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية لايغير مطلقا من شكل التوزيع الأصلى وإنما يجعل فقط قيمة المتوسط تساوى الصفر ، وقيمة والانحراف المعيارى الواحد الصحيح .

والشكل رقم (٤٤) يوضح العلاقات القائمة بين الانحرافات المعيارية ، والتكرارات المتجمعة النسبية ، والمئينيات ، والدرجات المعيارية ، والدرجات التائية ودرجات SAT ، GRE ، CEEB :



شكل رقم (٤٤)
العلاقات بين الانحرافات المعيارية
والتكرارات المتجمعة النسبية ، والمئينيات ، والدرجات
المعيارية (د) ، والدرجات التائية (ت) ، ودرجات
CEEB , GRE , SAT

تمارين على الفصل السادس

١ — أوجـــد المساحة تحت المنحنى الاعتدالى المحصورة بين المتوسط والدرجات المعيارية الآتية :

(أ) — ٢,٠٥
(ب) — ١,٩٠
(ﺟ) — ٠,٢٥
(د) + ٠,٤٠
(ﻫ) + ١,٦٥
(و) + ١,٩٦
(ز) + ٢,٣٣
(م) + ٢,٥٨
(ن) + ٣,٠٨

٢ — إذا كان توزيع اعتدالى متوسطه ٥٠ ، وانحرافه المعيارى ١٠ ، وعدد الحالات التى استمد منها هذا التوزيع ١٠٠٠ حالة . أوجد :

(أ) المساحة وعدد الحالات المحصورة بين المتوسط وكل من الدرجات الآتيـة :

٦٠ ، ٧٠ ، ٤٥ ، ٢٥ .

(ب) المساحة وعدد الحالات التى تفوق الدرجات الآتية :

٦٠ ، ٧٠ ، ٤٥ ، ٢٥ ، ٥٠ .

(ﺟ) المساحه وعدد الحالات المحصورة بين كل من الدرجتين الآتيتين :

٦٠ ، ٧٠ .

٢٥ ، ٦٠ .

٤٥ ، ٧٠ .

٢٥ ، ٤٥ .

٣ — إذا كان توزيع اعتدالى متوسطه ٨٠ وانحرافه المعيارى = ١٠٠ وعدد الحالات التى استمد منها هذا التوزيع = ٢٠٠ . أوجد ارتفاع المنحنى عند النقطة التى إحداثيها السينى :

٢٥ ، ٣٥ ، ٤٩ ، ٥٧ ، ٦٣ .

٤ — أوجد المساحه تحت المنحنى الاعتدالى :

(أ) المحصورة بين المتوسط والدرجة المعيارية د = ١,٤٩ .
(ب) المحصورة بين المتوسط والدرجة المعيارية د = ١,٢٦ .
(ج) إلى يمين الدرجة المعيارية د = ٠,٢٥ .
(د) إلى يسار الدرجة المعيارية د = —١,٢٦ .
(هـ) المحصورة بين د = + ٠,٥٠ ، د = — ٠,٥٠ .
(و) المحصورة بين د = ٠,٧٥ ، د = ١,٥٠ .
(ز) المحصورة بين د = ١,٠٠ ، د = ١,٩٦ .
(م) المحصورة بين د = ١,٠٠ ، د = ١,٠١ .

٥ — أوجد الدرجة المعيارية (د) بحيث تكون المساحة :

(أ) إلى يمين هذه الدرجة د = ٠,٢٥
(ب) إلى يسار هذه الدرجة د = ٠,٩٠
(ج) المحصورة بين المتوسط وهذه الدرجة د = ٠,٤٠
(د) المحصورة بين + د ، — د = ٠,٨٠

٦ — إذا افترضنا أن ظاهرة الذكاء تتوزع توزيعاً اعتدالياً فى المجتمع الأصل الذى متوسطه ١٠٠ وانحرافه المعيارى ١٥ . وجد النسبة المئوية لعدد الأفراد فى هذا المجتمع الذين :

(أ) يزيد ذكاؤهم عن ١٣٥ .

(ب) يزيد ذكاؤهم عن ١٢٠ .

(ح) يقل ذكاؤهم عن ٩٠ .

(د) ينحصر ذكاؤهم بين ٧٥ ، ١٢٥ .

٧ — إذا كانت درجات اختبار تحصيلى معين تتوزع توزيعاً اعتدالياً متوسطه = ٥٠، وانحرافه المعيارى = ١٠ وإذا استخدم فى تقرير نتائج هذا الاختبار نظام التقديرات ممتاز ، جيد جداً ، جيد ، مقبول ، راسب بحيث تكون نسب الطلاب الذين يحصلون على كل تقدير منها هى ٠,١٠ ، ٠,٢٠ ، ٠,٤٠ ، ٠,٢٠ ، ٠,١٠ على الترتيب . أوجد فئة درجة كل تقدير منها ، أى الحدود التى تنحصر بينها درجة كل تقدير .

٨ — البيانات الآتية تمثل درجات مجموعتين عمريتين مختلفتين فى اختبار ما :

مجموعة تبلغ أعمارها ١١ عاما		مجموعة تبلغ أعمارها ١٤ عاما
م (المتوسط)	٤٨	٥٠
ع (الانحراف المعيارى)	٨	١٢
ن (عدد الأفراد)	٤٠٠	٨٠٠

فالخطوة الأولى : يبوب درجات كل من المتغيرين فى جدول توزيع تكرارى مزدوج . وهذا يتطلب منه أن يقرر عدد فئات كل من المتغيرين . فإذا اختار الفئات الخمس الآتية لكل من المتغيرين :

٢٥ — ٢٩ ، ٣٠ — ٣٤ ، ٣٥ — ٣٩ ، ٤٠ — ٤٤ ، ٤٥ — ٤٩ فإنه سوف يحصل على الجدول التكرارى المزدوج الآتى (رقم ٢٨) :

س

ص	٢٥ — ٢٩	٣٠ — ٣٤	٣٥ — ٣٩	٤٠ — ٤٤	٤٥ — ٤٩
٢٥ — ٢٩					
٣٠ — ٣٤					
٣٥ — ٣٩					
٤٠ — ٤٤					
٤٥ — ٤٩					

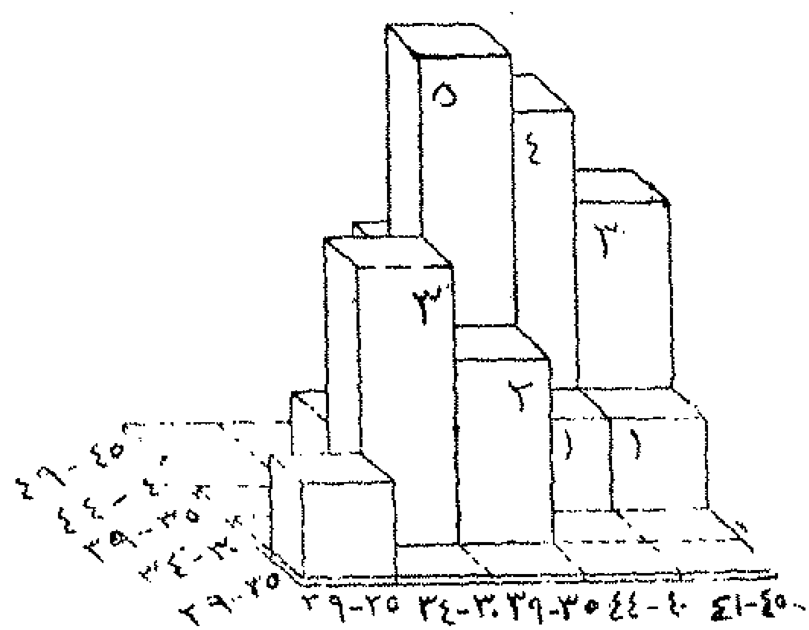
جدول رقم (٢٨)

والخطوة الثانية : يضع علامات تناظر تكرار كل من المتغيرين . فمثلا س = ٣٧ ، ص = ٤٢ تقع فى الخلية الناتجة من تقاطع الصف الرابع والعمود الثالث ، س = ٣٢ ، ص = ٣٤ تقع فى الخلية الناتجة من تقاطع الصف الثانى والعمود الثانى وهكذا . وبعد تعيين الخلية التى يقع فيها كل زوج مرتب (س،ص) يوجد عدد الحالات التى تقع فى كل خلية كالآتى :

ص \ س	٢٥ — ٢٩	٣٠ — ٣٤	٣٥ — ٣٩	٤٠ — ٤٤	٤٥ — ٤٩
٢٥ — ٢٩	١				
٣٠ — ٣٤		٣	٢		
٣٥ — ٣٩		١	٥	١	١
٤٠ — ٤٤			٢	٤	٣
٤٥ — ٤٩				١	١

جدول رقم (٢٩)
جدول توزيع تكرارى مزدوج

ويمكن تمثيل هذا الجدول المزدوج بيانياً بمدرج تكرارى ثلاثى البعد كما هو مبين بشكل رقم (٤٦) الآتى :



شكل رقم (٤٦)
مدرج تكرارى ثلاثى البعد يمثل جدول التوزيع التكرارى
المزدوج المبين بجدول رقم (٢٩)

فإذا افترضنا أن توزيع درجات كل من المجموعتين كان اعتداليا .

(أ) ما هو تقديرك لعدد أفراد المجموعة التى تبلغ من العمر ١١ عاماً الذين يفوق أداؤهم متوسط أداء أفراد المجموعة التى تبلغ من العمر ١٤ عاما .

(ب) ما هو تقديرك لعدد أفراد المجموعة التى تبلغ من العمر ١٤ عاما الذين يقل أداؤهم عن متوسط أداء أفراد المجموعة التى تبلغ من العمر ١١ عاما .

٩ — فيما يلى درجات طالب فى ثلاثة اختبارات ، والمتوسط والانحراف المعيارى لكل اختبار منها حيث طبق على عينة مكونة من ٣٠٠٠ طالب.

الاختبار	المتوسط	الانحراف المعيارى	درجة الطالب
الحساب	٤٧,٢	٤,٨	٥٣
فهم المقروء	٦٤,٦	٨,٣	٧١
الجغرافيا	٧٥,٤	١١,٧	٧٢

(أ) حول درجة الطالب فى كل اختبار منها إلى درجة معيارية .

(ب) فى أى اختبار من الاختبارات الثلاثة يعتبر أداء الطالب أفضل ؟ وفى أيها كان أداؤه أقل ؟

(ج) كم طالبا يقل أداؤهم عن أداء هـــذا الطالب فى كل اختبار من الاختبارات الثلاثة ؟

(د) ما هو الفرض الذى يجب توافره كى تتمكن من إجابة السؤال (ج) ؟

١٠ — فيما يلى المتوسط والانحراف المعيارى لدرجات اختبار فى الاستعداد الرياضى لعينة من الطلاب وأخرى من الطالبات .

طلبة	طالبات
س ٦٤	٦٠
ع ٨	١٠

(أ) ما هى الرتبة المئينية لطالب حصل على الدرجة ٦٢ فى الاختبار بالنسبة لكل من معايير الطلبة والطالبات .

(ب) ما هى الرتبة المئينية لطالبة حصلت على الدرجة ٧٣ فى الاختبار بالنسبة لمعايير الطالبات ؟ وما هى رتبتها المئينية بالنسبة لمعايير الطلبة ؟

١١ — فى توزيع اعتدالى متوسطه = ٧٢ وانحرافه المعيارى = ١٢ أوجد الدرجة التى تقابل :

(أ) المئينى ٣٠ .

(ب) الإرباعى الأول .

(جـ) الوسيط .

(د) المئينى ٧٥ .

(هـ) الإعشارى التاسع .

(و) المئينى ٩٠ .

١٢ — فى توزيع اعتدالى متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٠ أوجد :

(أ) النسبة المئوية للحالات التى تفوق الدرجة ٨٠ .

(ب) النسبة المئوية للحالات التى تقل عن الدرجة ٦٦ .

(جـ) الدرجتين اللتين تقع بينهما ٥٠٪ الوسطى من الحالات .

(د) الدرجتين اللتين تقع بينهما ٥٪ المتطرفة من الحالات .

(هـ) الدرجتين اللتين تقع بينهما ١٪ المتطرفة من الحالات .

١٣ — أجب على السؤالين رقمى ١١ ، ١٢ عندما يكون التوزيع الاعتدالى :

(أ) متوسطه = ٨٢ وانحرافه المعيارى = ٨ .

(ب) متوسطه = ٧٢ وانحرافه المعيارى = ٤ .

(جـ) متوسطه = ٧٢ وانحرافه المعيارى = ٢ .

١٤ — باستخدام البيانات الآتية بين ما إذا كان أداء الطالب (أ) فى الاختبار الأول أفضل من أدائه فى الاختبار الثانى أم أقل بالنسبة لمجموعة من الطلاب ؟ وفى أى من الاختبارين كان أداء الطالب ب أفضل ؟

الطالب	الاختبار الأول	الاختبار الثانى
أ	١٨	٣٠
ب	١٧	٢٢
جـ	١٧	٢٢
د	١٦	٢١
هـ	١٢	٣١

١٥ — هل جميع مجموعات الدرجات المعيارية (د) تتوزع توزيعا اعتداليا ؟ ولماذا ؟

١٦ — هل يوجد أكثر من توزيع اعتدالى واحد ؟ وضح بالرسم .

١٧ — إذا علمت أن الرتبة المئينية لطالب ما فى أحد الاختبارات هى ٩١٠ . أوجد الدرجة المعيارية المقابلة لهذه الرتبة إذا علمت أن درجات الاختبار تتوزع توزيعا اعتداليا .

١٨ — إذا افترضنا أن باحثا قد حصل على الدرجات المعيارية لكل طالب فى مجموعة معينة تتخذ شكل التوزيع الاعتدالى ، وأراد أن يختار أى طالب تقع درجته ضمن ٥ ٪ العليا للتوزيع . ما هى الدرجة المعيارية التى يتم على أساسها اختيار مثل هذا الطالب ؟

١٩ — إذا كان لديك عينة كبيرة . أى التوزيعات الآتية تتوقع أن يقترب من شكل التوزيع الاعتدالى :

(أ) أوزان جميع الرجال فى مصر بالكيلوجرامات .

(ب) دخول شباب مصر الذين يبلغون من العمر ٤٠ عاما .

(ﺟ) ارتفاعات الأشجار المعمرة فى إحدى الغابات .

(د) درجات اختبار فى الاستعداد الموسيقى .

(ﻫ) نسب الذكاء الطلاب المسجلين لدرجة الدكتوراه .

(و) متوسطات عدد لانهائى من العينات التى حجم كل منها ٢٠ فرداً اختيرت كل منها بطريقة عشوائية من عينة كبيرة جداً .

٢٠ — فيما يلى الدرجات التى حصل عليها أفراد عينة تتكون من ١٣٠ طالبا فى أحد الاختبارات :

٢٧ — ٢٩	٢
٣٠ — ٣٢	١٤
٣٣ — ٣٥	١٨
٣٦ — ٣٨	١٠
٣٩ — ٤١	١٤
٤٢ — ٤٤	١٤
٤٥ — ٤٧	١٦
٤٨ — ٥٠	١٨
٥١ — ٥٣	١٠
٥٤ — ٥٦	٨
٥٧ — ٥٩	٤
٦٠ — ٦٢	٢
	ن = ١٣٠

(أ) أوجد المتوسط والانحراف المعيارى لتوزيع هذه للدرجات .

(ب) إذا افترضنا أن توزيع الدرجات فى المجتمع الأصل كان اعتداليا ، ما هى نسبة عدد الطلاب الذين تتوقع أن تنحصر درجاتهم بين المتوسط والدرجات الآتية فى عينات مماثلة : ٦٠ ، ٣٨ ، ٢٨ ؟

(حـ) أوجد النسبة المئوية وعدد الطلاب الذين تتوقع أن تنحصر درجاتهم بين أزواج الدرجات :

٣٥ ، ٤٥ .

٥٠ ، ٥٥

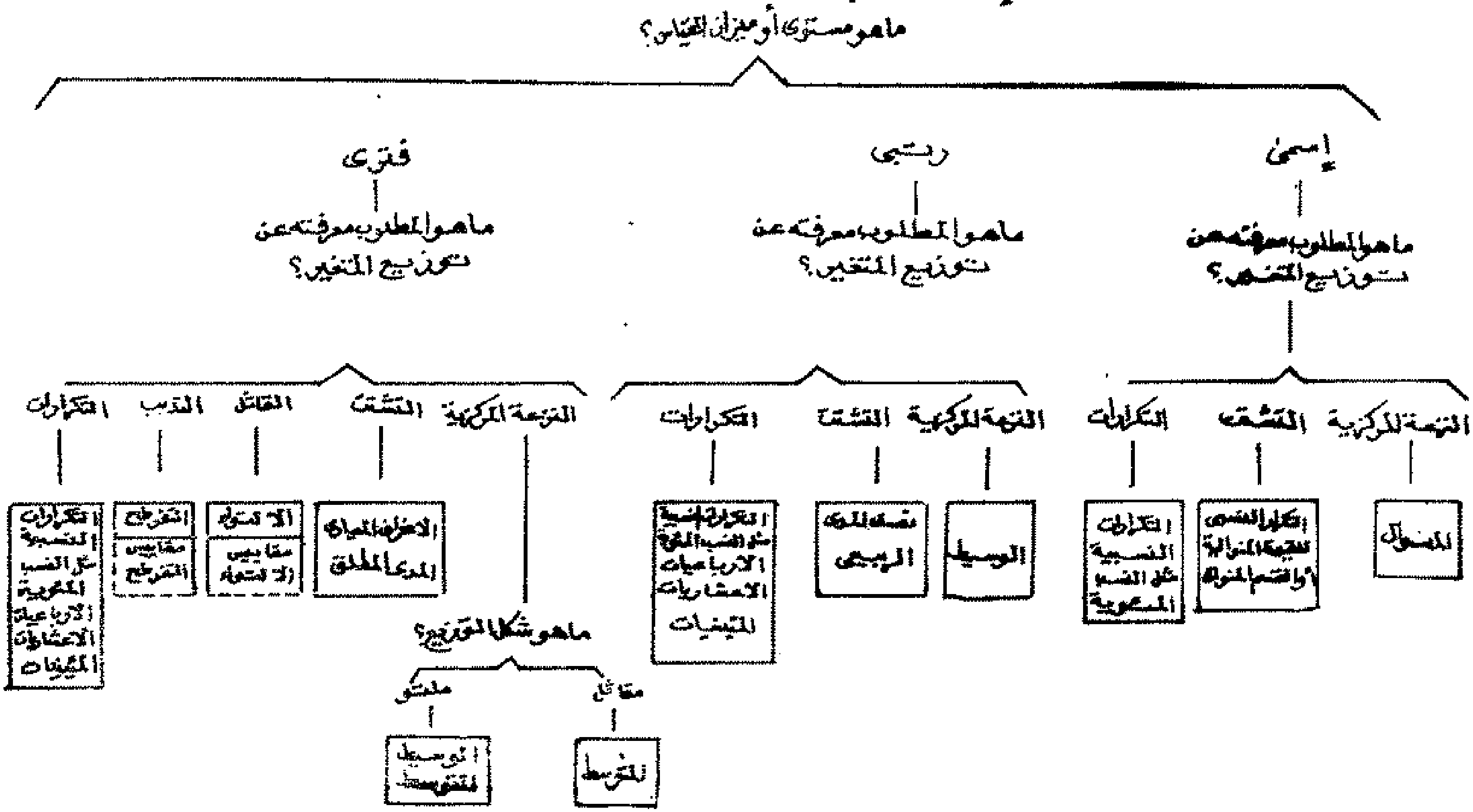
٥٦ ، ٦٠ .

(د) ما عدد الطلاب الذى تتوقع أن تفوق درجاتهم الدرجة ٥٠ ؟ وما عدد الطلاب الذين تتوقع أن تقل درجاتهم عن الدرجة ٣٥ ؟

٢١ — حول توزيع الدرجات المبـــين بالسؤال رقم ٢٠ إلى توزيع اعتدالى . وارسم منحنى أفضل مطابقة لهذه البيانات . ارسم أيضا فى نفس الشكل المضلع التكرارى لتوزيع الدرجات الأصلية .

شجرة قرارات تساعد الباحث على اختيار الأسلوب الإحصائي الذي يناسب بيانات بحثه

أولاً: إذا اشتمل البحث على متغير واحد



الباب الثاني

تحليل البيانات ذات المتغيرين

الفصل السابع

مقاييس العلاقة إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الفترى أو النسبي

مفهوم معامل الارتباط

معامل ارتباط بيرسون

فروض معامل ارتباط بيرسون

طرق حساب معامل ارتباط بيرسون

تصحيح معامل الارتباط من أخطاء تجميع البيانات

العوامل التى تؤثر فى معامل ارتباط بيرسون

تفسير معامل ارتباط بيرسون

العلاقة والعلية

مقدمة :

عرضنا فى الفصول الستة السابقة طرق تحليل البيانات ذات المتغير الواحد . وقد ناقشنا الخواص الأساسية للمتغير الواحد ، كما ناقشنا بعض الأساليب التى يمكن استخدامها لفحص توزيع المتغير موضع البحث بالنسبة لعينة ما .

ولكن الباحث النفسى والتربوى كثيراً ما يواجه مواقف بحثية تتطلب دراسة متغيرين معاً . فمثلا ربما يود الباحث دراسة العلاقة بين نسب ذكاء الطلاب ودرجات تحصيلهم فى المواد الدراسية المختلفة كما تقاس باختبارات تحصيلية معينة . أو ربما يود دراسة العلاقة بين عدد سنوات التعليم ومستوى الدخل لمجموعة من الذكور البالغين . ففى كل من المثالين يود الباحث تحديد ما إذا كانت هناك علاقة بين المتغيرين أم لا ، وما درجة هذه العلاقة للاستفادة بها فى التطبيقات التربوية .

وفى كل من الحالتين يحتاج الباحث إلى جمع ملاحظات (درجات) عن كل فرد فى عينة بحثه فى كل من المتغيرين ، أى أن البيانات التى تحتاج إلى معالجة فى هذه الحالة تشتمل على أزواج من قيم الملاحظات أو الدرجات أو القياسات ، بمعنى أنه يكون لدى الباحث زوج من الملاحظات أو القياسات لكل فرد فى المجموعة . وتسمى مثل هذه البيانات بيانات ذات متغيرين Bivariate Data . والخاصية المميزة لهذا النوع من البيانات هو أننا نزاوج بين قيمة ملاحظة أو درجة معينة بقيمة ملاحظة أو درجة معينة أخرى لكل فرد فى المجموعة ، وتكون وحدة التحليل هنا Unit of Analysis هى الفرد ، ولكن يمكن أن تتم المزاوجة على أساس أى وحدة تحليل أخرى .

فمثلا إذا أراد الباحث إيجاد العلاقة بين عدد تلاميذ المدارس المختلفة فى مدينة معينة وعدد المدرسين فى هذه المدارس، فإن المدرسة تكون هى وحدة التحليل .

وبالطبع يجب أن يحصل الباحث على أكثر من زوج واحد من الملاحظات

حتى يتمكن من دراسة العلاقة بين المتغيرين . وتحليل البيانات ذات المتغيرين أى التى تشتمل على أزواج الملاحظات أو القياسات له جانبان مرتبطان ارتباطا وثيقا هما الارتباط Correlation والتنبؤ Prediction . فإذا كان الباحث مهتما بمشكلة وصف درجة أو مقدار العلاقة بين المتغيرين أى مقدار التباين المتلازم أو المصاحب Concomittent Variation فإنه يكون بصدد دراسة الارتباط ، والمقياس الإحصائى الذى يصف درجة العلاقة بين متغيرين يسمى معامل الارتباط Coefficient of Correlation .

أما إذا كان مهتما بتقدير قيمة متغير أو التنبؤ بقيمته بمعلومية قيمة متغير آخر ، فإنه يكون بصدد دراسة التنبؤ .

فمثلا إذا كان المتغيران هما الطول والوزن ، فإن الأشخاص الأكثر طولا يميلون بوجه عام إلى أن يكونوا أكثر وزنا من الأشخاص الأقل طولا . وهنا ربما نهتم بمشكلة وصف مقدار العلاقة بين الطول والوزن ، أو بمشكلة التنبؤ بطول الشخص بمعلومية وزنه أو العكس .

وإذا كان المتغيران هما درجات اختبار استعداد دراسى طبق على الطلاب المتقدمين للالتحاق بالجامعات ، ومتوسط تقديراتهم فى نهساية السنة الأولى ، فإننا ربما نهتم فقط بوصف درجة العلاقة بين درجات اختبار الاستعداد ومتوسط التقديرات ، أو ربما نهتم بالتنبؤ بمتوسط التقديرات بمعلومية درجات اختبار الاستعداد . وهنا يكون الهدف هو استخدام درجات اختبار الاستعداد للطلاب المتقدمـــين للالتحاق بالجامعات لتقدير أدائهم (أى التنبؤ به) أثناء الدراسة الجامعية .

وأكثر أنواع معاملات الارتباط استخداما هو معامل ارتباط بيرسون (نسبة إلى العالم كارل بيرسون K. Pearson) ويسمى حاصل ضرب العزوم Pearson Product Moment Correlation Coefficient .

وهو مقياس إحصائى يستخدم إذا كان ميزان القياس من النوع الفترى

أو النسبي . وتوجد أنواع أخرى من معاملات الارتباط تستخدم إذا كان ميزان القياس إسميا أو رتبيا . كما توجد أنواع معينة من معاملات الارتباط تستخدم فى حالات خاصه . وبالرغم من أختلاف أنواع معاملات الارتباط إلا أن معظمها يعتبر حالات خاصة من معامل ارتباط بيرسون . ويتوقف اختيار الباحث لأى من هذه الأنواع على العوامل الآتية :

١ — نوع ميزان قياس كل متغير (اسمى - رتبي - فترى - نسبى) .

٢ — شكل توزيع البيانات (متصل أم منفصل) .

٣ — خصائص توزيع البيانات (خطى أم منحنى) .

وسوف نعرض فى هـــذا الفصل والفصول التالية لمختلف مقاييس العلاقة أو الاقتران بين متغيرين ، والفروض التى يجب أن تتحقق فى البيانات حتى يتمكن الباحث من اختيار النوع الذى يناسب بيانات بحثه ، وطريقة حساب كل منها وتفسير المعاملات الناتجة .

ونرجىء مناقشة التنبؤ وعلاقته بالارتباط إلى الفصلين الثالث عشر والرابع عشر . ولكن يجب على الباحث أن يعلم أن الارتباط والتنبؤ هما مفهومان بينهما علاقة وثيقة ، إذ لا يمكن تفسير معامل الارتباط تفسيراً مرضيا واستخدامه استخداما مناسبا دون اعتبار لمفهوم التنبؤ .

العلاقة بين أزواج الملاحظات :

إذا افترضنا أن لدينا عينة من الأفراد عددها ن ، ورمزنا لأفراد العينة بالرموز أ$_1$ ، أ$_2$ ، ... أ$_ن$ وحصلنا على قياسات لكل فرد فى متغيرين س ، ص فإنه يمكن تمثيل هذه البيانات فى جدول كالآتى :

الأفراد	القياسات	
	س	ص
$أ_1$	$س_1$	$ص_1$
$أ_2$	$س_2$	$ص_2$
$أ_3$	$س_3$	$ص_3$
....	....	....
$أ_ن$	$س_ن$	$ص_ن$

فإذا افترضنا أننا رتبنا قيم س ترتيبا تصاعديا، فإنه ربما توجد ترتيبات مختلفة لقيم ص . وأحد هذه الترتيبات أن تبدأ قيم ص بأقل قيمة وتنتهي بأكبر قيمة . ولهذا فإن الفرد الذي تكون درجته أكبر مما يمكن في س تكون درجته أكبر ما يمكن في ص ، والذي تقل درجته مباشرة عن الدرجة الأكبر في س تقل درجته مباشرة عن الدرجة الأكبر في ص ، وهكذا حتى نصل إلى الفرد الذي تكون درجته أقل ما يمكن في س تكون درجته أيضا أقل ما يمكن في ص . ففي مثل هذه الحالة يصل معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص إلى أقصى قيمة موجبة . والترتيب الثاني يمكن أن نحصل عليه بأن نعكس ترتيب قيم ص بحيث تكون قيمة $ص_1$ أقل ما يمكن ، قيمة $ص_ن$ أكبر ما يمكن . فالفرد الذي تكون درجته أكبر ما يمكن في س تكون درجته أقل ما يمكن في ص ، والذي تقل درجته مباشرة عن الدرجة الأكبر في ص تزيد درجته مباشرة عن الدرجة الأقل في س وهكذا . ففي هذه الحالة يصل معامل الارتباط إلى أقصى قيمة سالبة .

والترتيب الثالث يمكن أن نحصل عليه بأن نرتب قيم ص ترتيبا عشوائيا بالنسبة إلى س . أي أن قيم ص تكون مستقلة عن قيم س . وهنا ربما نقول أنه لا توجد علاقة بين المتغيرين س ، ص ، وبالطبع يمكن أن نحصل على قيم لمعامل الارتباط تنحصر بين أقصى قيمة موجبة وأقصى قيمة سالبة .

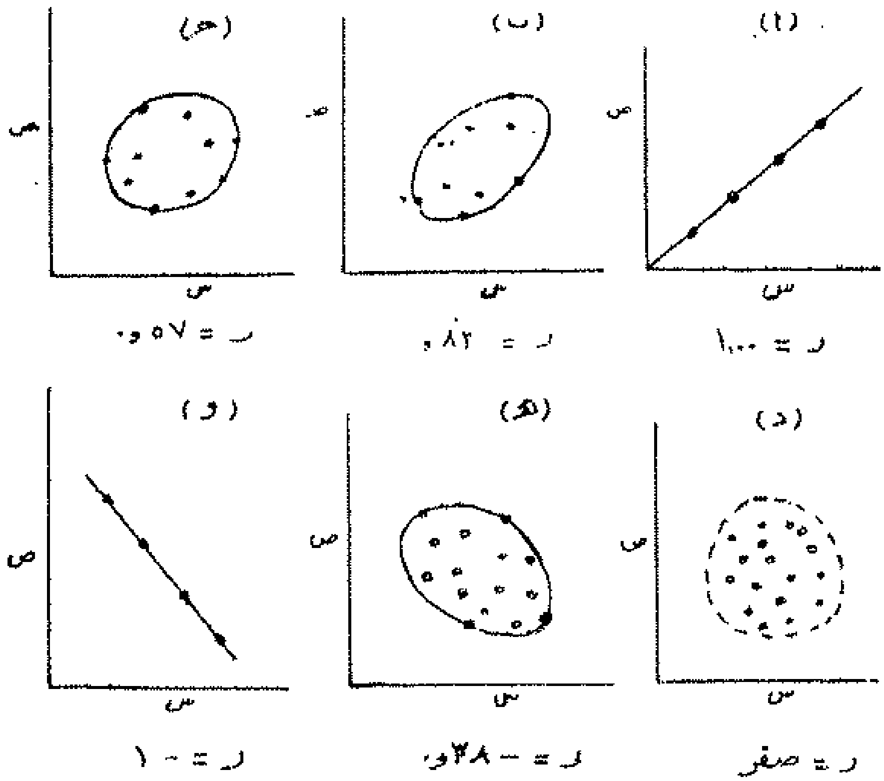
ولتوضيح ذلك نفترض أن قيم س للأفراد $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، $أ_4$ ، $أ_5$ هي ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ . فإذا كانت قيم ص هي نفس قيم س وبنفس الترتيب ٥ ، ٤ ،

٣ ، ٢ ، ١ فان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يكون +١ . وإذا رتبنا قيم ص كالآتى : ٤ ، ٥ ، ٣ ، ٢ ، ١ فإن قيمة معامل الارتباط تظل موجبة ومرتفعة ولكنها بالطبع تقل عن الواحد الصحيح .

أما إذا رتبنا قيم ص كالآتى : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فإن معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يصبح — ١ .

وإذا رتبنا قيم ص كالآتى : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٣ ، ٥ فإن قيمة معامل الارتباط تظل سالبة ومرتفعة ولكن لا تصل إلى — ١ .

ويمكن تمثيل هذه العلاقات المختلفة بالأشكال الانتشارية Scatter Diagrams الآتية (شكل رقم ٤٥) والتى تمثل كل نقطة فيها زوجا مرتبا من الملاحظات أو قيمة لكل من س ، ص على الترتيب .



شكل رقم (٤٥)
أشكال انتشارية توضح الدرجات المختلفة
للعلاقة بين المتغيرين

ومن هذا الشكل نلاحظ أن ارتفاعات متوازيات المستطيلات تمثل التكرارات فى خلايا الجدول التكرارى المزدوج كما فى حالة المدرج التكرارى المعتاد .

وبالطبع ليس من الضرورى أن يرسم الباحث هذا الشكل عندما يريد حساب معامل الارتباط للبيانات المجمعة ، فقد عرضناه هنا لمجرد التوضيح فقط .

ولحساب معامل الارتباط من جدول التوزيع التكرارى المزدوج يجب أن يفترض الباحث — كما هو الحال عند حساب المتوسط والانحراف المعيارى للبيانات المجمعة — أن تكرار كل فئة (خلية) معينة يقع فى مركز تلك الفئة . فمثلا يمكنه أن يفترض أن الخلية التى تقع عند التقاء الصف الثانى مع العمود الثالث والتى تكرارها = ٣ تأخذ قيمة س = ٣٢ ، ص = ٣٢ . وأن الخلية التى تقع عند التقاء الصف الرابع مع العمود الثالث والتى تكرارها = ٢ تأخذ قيمة س = ٣٧ ، ص = ٤٢ وهكذا .

والخطوة الثالثة : يختار فئة افتراضية لكل من المتغيرين س ، ص ، ويوجد انحراف كل فئة عنها . ونظراً لأن فئات كل من المتغيرين س ، ص متساوية فى هذا المثال فإنه يمكنه أن يختار الفئة ٣٥ — ٣٩ ويعتبرها الفئة الافتراضية . ولذلك يضع صفراً بدلا منها ثم يضع — ١ ، — ٢ بدلا من الفئات التى تقل عنها ، + ١ ، + ٢ بدلا من الفئات التى تزيد عنها . ولنرمز لانحراف كل من المتغيرين عن هذه الفئه بالرمزين $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ كما هو مبين بالجدول الآتى (رقم ٣٠) :

$\bar{ص}$ \ $\bar{س}$	٢ —	١ —	صفر	١ +	٢ +
٢ —	١				
١ —		٣	٢		
صفر		١	٥	١	١
١ +			٢	٤	٣
٢ +				١	١

جدول رقم (٣٠)

وربما يتذكر الباحث أننا قلنا أن معامل الارتباط لا يتأثر بإضافة مقدار ثابت موجب إلى جميع قيم س أو جميع قيم ص . وهذا يعنى أننا إذا حسبنا معامل الارتباط ر باستخدام الانحرافات سَ ، صَ بدلا من س ، ص فإننا سوف نحصل على نفس النتيجة . ولذلك فإننا يمكن أن نصل إلى الصورة التى يمكن أن يستخدمها الباحث لحساب معامل الارتباط فى هذه الحالة وذلك باستبدال س ، ص بالرمزين سَ ، صَ على الترتيب فى الصورة المستخدمة لإيجاد معامل الارتباط باستخدام الدرجات الخام وهى الصورة رقم (٦) كالآتى :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مج (سَ صَ ت)} - (\text{مج سَ } \text{ت}_{\text{سَ}})(\text{مج صَ } \text{ت}_{\text{صَ}})}{\sqrt{\text{ن (مج سَ}^{2}\text{ ت}_{\text{سَ}}) - (\text{مج سَ ت}_{\text{سَ}})^{2}}\ \sqrt{\text{ن (مج صَ}^{2}\text{ ت}_{\text{صَ}}) - (\text{مج صَ ت}_{\text{صَ}})^{2}}}$$

(٩) . . .

حيث ن = المجموع الكلى للتكرارات

، $\text{ت}_{\text{سَ}}$ = التكرار الكلى لكل فئة من فئات سَ

، $\text{ت}_{\text{صَ}}$ = التكرار الكلى لكل فئة من فئات صَ

، ت = تكرار كل خلية .

والخطوة الرابعة : يكون جدولا كالآتى يحسب منه قيم المقادير التى يتطلبها تطبيق الصورة رقم (٩) لحساب معامل الارتباط .

وبالنظر إلى هذه الأشكال الانتشارية يمكن أن نأخذ فكرة سريعة عن درجة العلاقة بين متغيرين (أى مقدارها) واتجاه هذه العلاقة (أى موجبة أو سالبة) .

فإذا نظرنا إلى الشكل (أ) نجد أن جميع النقط تقع على الخط المستقيم مما يدل على أن معامل الارتباط يساوى الواحد الصحيح أى معامل ارتباط تام .

أما الشكل (ب) فتتراكم فيه النقط حول الخط المستقيم ولكنها لا تنطبق عليه تماما ، ولذا فإن معامل الارتباط يقل عن الواحد الصحيح ولكنه يكون قريبا منه وهو هنا ٠,٨٢ .

أما الشكل (جـ) فلا تبدو فيه أى نزعة منتظمة لاقتران قيم س بقيم ص فهو يبين مجرد علاقة عشوائية بين المتغيرين ولذا فإن معامل الارتباط فى هذه الحالة = صفر .

والشكلان و ، هـ يوضحان علاقتان سالبتان إحداهما تامة والأخرى غير تامة .

ويوجد عدد لانهائى من قيم معاملات الارتباط بين متغيرين تنحصر بين القيمتين التامة الموجبة والتامة السالبة .

معامل ارتباط بيرسون :

رأينا مما سبق أن معاملات الارتباط تتراوح بين + ١ ، — ١ . فالقيمة — ١ تدل على أن معامل الارتباط تام سالب وتقع جميع النقط على الخط المستقيم ، وتقل قيم المتغير س بزيادة قيم المتغير ص . والقيمة + ١ تدل على أن معامل الارتباط تام موجب ، وتقع جميع النقط على الخط المستقيم ، وتزيد قيم المتغير س بزيادة قيم المتغير ص . والقيمة صفر تعنى أن المتغيرين س ، ص مستقلان بعضهما عن بعض أو أن العلاقة بينهما عشوائية .

وقد ذكرنا فى مستهل هذا الفصل أن معامل ارتباط بيرسون والذى يسمى

حاصل ضرب العزوم يعتبر أكثر أنواع معاملات الارتباط استخداما فى البحوث النفسية والتربوية . وكثير من أنواع معاملات الارتباط والاقتران الأخرى التى سنعرض لها بالتفصيل فى الفصول التالية تعد حالات خاصة من هذا المعامل .

ولكى يتضح للباحث معنى معامل ارتباط بيرسون ربما يكون من الافضل التعبير عن المتغيرات فى صورة درجات معيارية حتى يمكن الربط بين معامل الارتباط وغيره من المقاييس الإحصائية المختلفة .

فإذا افترضنا أن س ، ص تمثل أزواجا من الملاحظات انحرافاتها المعيارية $ع_س$ ، $ع_ص$ على الترتيب . فلتحويل الملاحظات س ، ص إلى درجات معيارية نستخدم الصورتين الآتيتين اللتين عرضنا لها فى الفصل الخامس :

$$د_س = \frac{س - \bar{س}}{ع_س}$$

$$، \quad د_ص = \frac{ص - \bar{ص}}{ع_ص}$$

وهذه الدرجات المعيارية متوسطها صفر ، وانحرافها المعيارى الواحد الصحيح .

ويمكن تعريف معامل ارتباط بيرسون والذى سيرمزله بالرمز (ر) بأنه متوسط مجموع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة للمتغيرين س ، ص . ويمكن التعبير عن هذا رياضياً بالصورة الآتية :

$$ر = \frac{مجـ (د_س \times د_ص)}{ن} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١)$$

ولذلك فإنه يمكن الحصول على معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين س ، ص بتحويل كل قيمة من قيم المتغيرين إلى درجات معيارية باستخدام الصورتين المبينتين أعلاه ، وجمع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة للمتغيرين ، وقسمة الناتج على عدد القيم .

ولتوضيح معنى الصورة الرياضية المستخدمة فى إيجاد معامل ارتباط بيرسون نفترض أن لدينا أزواجا من الملاحظات محولة إلى درجات معيارية . فمجموع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة مجـ $(د_س \times د_ص)$ يعتبر مقياساً لدرجة العلاقة بين المتغيرين . وتصل مجـ $(د_س \times د_ص)$ إلى قيمتها العظمى :

١ — إذا كانت قيم $د_س$ ، $د_ص$ لها نفس الترتيب .

٢ — وإذا ساوت كل قيمة من قيم $د_س$ القيمة المناظرة لها $د_ص$ ، أى إذا تساوت قيم مجموعتى الملاحظات .

فإذا رسمنا شكلا انتشاريا لمجموعتى الدرجات المعيارية $د_س$ ، $د_ص$ ، فإن جميع النقط تقع تماما على خط مستقيم ميله موجب . ونظراً لأن جميع أزواج الدرجات المعيارية متساوية أى أن $د_س = د_ص$:

$$\text{فإن } د_س \times د_ص = د_س^٢ = د_ص^٢$$

$$\text{وبما أن } ر = \frac{\text{مجـ}(د_س \times د_ص)}{ن}$$

$$\text{فى هذه الحالة } ر = \frac{\text{مجـ } د_س^٢}{ن}$$

ولكن من خواص الدرجات المعيارية أن مجموع مربعات الدرجات المعيارية لتوزيع ما = ن ، أى أن أقصى قيمة للمقدار مج ($د_س \times د_ص$ تساوى ن)

وبذلك تكون ر = $\frac{ن}{ن}$ = ١

وبالمثل تصل مج ($د_س \times د_ص$) إلى قيمتها الصغرى :

١ — إذا كان ترتيب قيم $د_س$ عكس ترتيب قيم $د_ص$

٢ — وإذا كانت القيمة العددية لكل درجة معيارية $د_س$ تساوى القيمة العددية للدرجة المعيارية المقابلة لها $د_ص$ ولكنها تختلف معها فى الإشارة .

ولذلك تكون أقل قيمة يصل إليها المقدار مج ($د_س \times د_ص$) = — ن . فإذا رسمنا شكلا انتشاريا لمجموعتى الدرجات المعيارية $د_س$ ، $د_ص$ فى هذه الحالة، فإن جميع النقط تقع تماما على خط مستقيم ميله سالب .

أما إذا لم توجد علاقة منتظمة بين $د_س$ ، $د_ص$ ، فإننا نتوقع أن يكون مج ($د_س \times د_ص$) = صفراً .

ولذا يمكن أن نعرف معامل الارتباط بأنه النسبة بين القيمة الملاحظة للمقدار مج ($د_س \times د_ص$) والقيمة العظمى الممكنة لهذا المقدار .

ونظراً لأن المقدار مج ($د_س \times د_ص$) تتراوح قيمه بين ن ، — ن فإن قيم معامل الارتباط تتراوح بين + ١ ، — ١ .

ويمكن توضيح المناقشة السابقة بالمثال الآتى ، حيث س ، ص هى الدرجات الخام للمتغيرين ، دس ، دص هى الدرجات المعيارية المناظرة للدرجات الخام .

س	ص	دس	دص	دس × دص
١	١١	— ١,٤٢	— ١,٤٢	٢,٠٠ تقريبا
٢	١٣	— ٠,٧١	— ٠,٧١	٠,٥٠ تقريبا
٣	١٥	صفر	صفر	صفر
٤	١٧	+ ٠,٧١	+ ٠,٧١	٠,٥٠ تقريبا
٥	١٩	+ ١,٤٢	+ ١,٤٢	٢,٠٠ تقريبا

مجـ (دس × دص) = مجـ دس^{٢} = مجـ دص^{٢} = ن = ٥

فإذا نظرنا إلى هذا الجدول نلاحظ أن المتغيرين س ، ص لهما نفس الترتيب ، وإذا مثلناهما فى شكل انتشارى سوف نجد أن النقط تقع على خط مستقيم .

وفى هذه الحالة تتساوى أزواج الدرجات المعيارية المتقابلة لكل من المتغيرين س ، ص ، وتكون قيمة مجـ (دس × دص) = ن = ٥، وقيمة ر = +١.

فإذا تأملنا القيم الموضحة فى الجدول نجد أن أقصى قيمة يصل إليها هذا المجموع هى ن ، إذ لا يمكن ترتيب قيم ص التى فى الجدول بالنسبة إلى س بحيث نحصل على قيمة أكبر من ن . وإذا عكسنا ترتيب قيم ص بالنسبة إلى قيم س فإن قيمة المقدار مجـ (دس × دص) = — ن = — ٥ وتكون قيمة ر فى هذه الحالة = —١ وهذه هى أقل قيمة للمقدار مجـ (دس × دص) .

وإذا اخترنا ترتيبات أخرى لقيم ص بالنسبة إلى س ربما تؤدى إلى قيم لمعاملات الارتباط تتراوح بين + ١ ، — ١ .

من هذا يتضح أن معامل ارتباط بيرسون ما هو إلا مجموع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة للمتغيرين مقسوما على أقصى قيمة لهذا المجموع .

<u>الفروض التي يجب أن يتحقق منها الباحث في البيانات إذا أراد استخدام معامل ارتباط بيرسون :</u>

يوجد عدد من الفروض التي يقوم على أساسها معامل ارتباط بيرسون يجب أن يتحقق منها الباحث في المتغيرات التي يرد دراسة العلاقة بينهما .

فمعامل ارتباط بيرسون هو مقياس للعلاقة الخطية بين متغيرين ، ويمكن للباحث التحقق مبدئيا من خطية العلاقة برسم الشكل الانتشارى لقيم المتغيرين وتأمل الشكل الناتج . فإذا اتضح له أن توزيع القيم يتخذ شكلا بيضاويا دون أى نزعة إلى الانحناء فإن هذا يمكن أن يكون دليلا على خطية العلاقة . وابتعاد العلاقة ابتعاداً طفيفا عن الخطيه لا يمنع الباحث من استخدام معامل ارتباط بيرسون كتقريب مبدئى لقيم معاملات الارتباط الأخرى التي يمكن أن يستخدمها في حالة العلاقة غير الخطية . أما إذا ابتعد شكل العلاقة عن الخطية وأصبح واضحا للباحث من تأمله للشكل الانتشارى أن العلاقة بين المتغيرين منحنية، فإنه يجب أن يستخدم ما يسمى بنسبة الارتباط Correlation Ratio أو أى طريقة أخرى تتفق وهذه العلاقة المنحنية ، وسوف نعرض لهذه الطرق في الفصلين الحادى عشر والخامس عشر .

والحقيقة أن كثيرا من المتغيرات النفسية ترتبط ارتباطا خطيا .

فمثلا نتوقع أن تكون العلاقة بين الاختبارات التي تقيس قدرات مرتبطة خطية طالمـا أن هذه الاختبارات تقيس جوانب مختلفة لمطلب سلوكى واحد مثل تذكر نوعين مختلفين من المثيرات .

ويستثنى من ذلك العلاقة بين العمر الزمنى وأنواع معينة من الأداء .

فإذا تضمنت عينة البحث مدى عمرى متسع ، تكون العلاقة القائمة بين الأداء والعمر منخفضة فى الأعمار الصغيرة جداً والأعمار المتقدمة جداً .

وتوجد بعض العوامل التى تودى إلى أشـكال انتشارية منحنية لأسباب اصطناعية . وربما يحدث هذا إذا كان أحد توزيعى المتغيرين أو كلاهما ملتويا ، وكان التواء نتيجة لخطأ فى ميزان القياس ، مما أدى إلى تغيير منتظم فى وحدة القياس .

فإذا تأكد الباحث من حدوث ذلك فإن أحد طرق معالجة هذا الموقف هو أن يحول التوزيع الملتوى إلى توزيع اعتدالى باستخدام الطريقة التى عرضنا لها فى نهاية الفصل السادس . فإجراء مثل هذا التعديل على أحد التوزيعين أو كليهما يمكن الباحث غالبا من التخلص من انحناء شكل العلاقة . فإذا لم يؤد هذا التعديل إلى جعل العلاقة خطية فيجب على الباحث ألا يستخدم معامل ارتباط بيرسون لإيجاد مقدار هذه العلاقة .

وليس من الضرورى استخدام معامل ارتباط بيرسون فقط فى حالات التوزيعات الاعتدالية . إذ ربما تختلف أشكال التوزيعات ، ولكن يجب أن تكون متماثلة إلى حد ما وأحادية المنوال . ولذلك فإن التوزيعات المستطيلة تنطبق عليها هاتان الخاصيتان . ولكن يجب الالتجاء إلى طرق أخرى لإيجاد معامل الارتباط إذا كانت التوزيعات غير متماثلة أو غير متصلة .

طرق حساب معامل ارتباط بيرسون للبيانات غير المجمعة :

أولا — باستخدام الدرجات المعيارية (د) :

معامل ارتباط بيرسون هو مقياس معيارى للعلاقة ، بمعنى أنه يدخل فى حسابه المتوسط والانحراف المعيارى لكل من مجموعتى الدرجات المراد إيجاد العلاقة بينهما .

وهذا يعنى أن أى تحويل خطى لإحدى مجموعتى الدرجات لا يؤثر فى قيمة معامل ارتباط بيرسون ، وبذلك لا يكون لوحدة القياس أهمية تذكر عند إيجاد معامل الارتباط .

فعلى سبيل المثال نفترض أننا أردنا إيجاد العلاقة بين الطول بالمتر والوزن بالكيلو جرام لمجموعة من أطفال الصف الخامس . فهنا يجب أن لا نظن أننا لا نستطيع إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين بسبب اختلاف وحدة قياس كل منهما . إذ يمكن أن نحصل على نفس قيمة معامل الارتباط إذا حولنا أطوال الأطفال من متر إلى سنتيمتر ولا نجرى أى تحويل على الطول . والسبب فى ذلك أننا نستخدم الدرجات المعيارية بدلا من الدرجات الخام فى حساب معامل الارتباط .

وقد سبق أن ذكرنا أنه يمكن إيجاد معامل ارتباط بيرسون باستخدام الصورة الآتية :

$$\text{ر} = \frac{\text{مج}(\text{د}_{\text{س}} \times \text{د}_{\text{ص}})}{\text{ن}}$$

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الصورة نعطى المثال الآتى :

أوجد معامل الارتباط بين مجموعتى الدرجات ؟

س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ }

، ص = { ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ }

فلإيجاد معامل الارتباط باستخدام الدرجات المعيارية يمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية :

١ — يوجد المتوسط والانحراف المعيارى لمجموعة الدرجات س .

٢ — يوجد المتوسط والانحراف المعيارى لمجموعة الدرجات ص .

٣ — يحول كل درجة من درجات س إلى درجة معيارية

٤ — يحول كل درجة من درجات ص إلى درجة معيارية .

٥ — يوجد حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة .

٦ — يجمع حواصل الضرب الناتجة .

٧ — يقسم ناتج حاصل الضرب على عدد الدرجات .

ويمكن استخدام هذه الخطوات فى المثال السابق وتلخيصها فى الجدول رقم (٢٣) الآتى :

س	س − $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	دس	ص	ص − $\bar{ص}$	$(ص - \bar{ص})^2$	دص	دس × دص
٠	− ٦	٣٦	− ١,٥	٤	− ٩	٨١	− ١,٥	٢,٢٥
٣	− ٤	١٦	− ١,٠	٧	− ٦	٣٦	− ١,٠	١,٠٠
٥	− ٢	٤	− ٠,٥	١	− ٣	٩	− ٠,٥	٠,٢٥
٧	صفر	صفر	صفر	١٣	صفر	صفر	صفر	صفر
٩	+ ٢	٤	+ ٠,٥	١٦	+ ٣	٩	+ ٠,٥	٠,٢٥
١١	+ ٤	١٦	+ ١,٠	١٩	+ ٦	٣٦	+ ١,٠	١,٠٠
١٣	+ ٦	٣٦	+ ١,٥	٢٢	+ ٩	٨١	+ ١,٥	٢,٢٥
مج س = ٤٩ ، مج $(س - \bar{س})^2$ = ١١٢				مج ص = ٩١ ، مج $(ص - \bar{ص})^2$ = ٢٥٢				٧,٠٠

$\bar{س} = \frac{٤٩}{٧} = ٧$ ، $ع_{س} = \sqrt{\frac{١١٢}{٧}} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\bar{ص} = \frac{٩١}{٧} = ١٣$ ، $ع_{ص} = \sqrt{\frac{٢٥٢}{٧}} = \sqrt{٣٦} = ٦$

جدول رقم (٢٣)

خطوات حساب معامل ارتباط بيرسون بطريقة الدرجات **المعيارية**

$$ر = \frac{\text{مج}(د_س \times د_ص)}{ن} = \frac{٧}{٧} = +١$$

ويمكن أن يغير الباحث ترتيب قيم كل من س ، ص بطرق مختلفة ويعيد حساب معامل ارتباط بيرسون فى كل حالة حتى يتمكن من استيعاب معنى معامل الارتباط .

ونظراً لأن هذه الطريقة فى حساب معامل الارتباط هى طريقة مطولة لأنها تتطلب تحويل كل درجة خام من المتغيرين إلى درجة معيارية ، فإنها تصبح شاقة إذا زاد عدد قيم أى من المتغيرين عن ٥٠ وهو ما يواجه عادة كثيرا من الباحثين فى العلوم النفسية والتربوية .

ولذلك يمكن التوصل إلى طرق أخرى أبسط لحساب معامل الارتبـــاط تعتمد على :

٢ — متوسط الانحرافات .

٣ — الدرجات الخام مباشرة .

٤ — الفروق بين الدرجات الخام .

ويمكن اشتقاق هـذه الطرق بعمليات جبرية بسيطة من طريقة الدرجات المعيارية .

ثانيا — باستخدام متوسط الانحرافات :

نظراً لأن $ر = \frac{\text{مج}(د_س \times د_ص)}{ن}$

فبالتعويض عن $\text{د}_{\text{س}} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{س}}}$

، $\text{د}_{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - \bar{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$

فإن $\text{ر} = \frac{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}}) (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{ن} \times \text{ع}_{\text{س}} \times \text{ع}_{\text{ص}}}$ . . . (٢)

ونظراً لأن $\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$

، $\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مج} (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{ن}}}$

وبالتعويض فى (٢) :

$$\text{فإن ر} = \frac{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}}) (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\text{ن} \times \sqrt{\frac{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{مج} (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{ن}^2}}}$$

$$= \frac{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}}) (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مج} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{مج} (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}} \quad \ldots\ldots (٣)$$

وإذا قسمنا البسط فى الصورة رقم (٣) على ن فإن المقدار الذى فى البسط يسمى حينئذ بالتغاير Covariance ، وإذا قسمنا كل من العاملين اللذين تحت

الجذر التربيعي في المقام على ن فإننا نحصل على حاصل ضرب الانحرافين المعياريين لكل من المتغيرين س ، ص . أي أن معامل ارتباط بيرسون يمكن اعتباره النسبة بين التغاير إلى المتوسط الهندسي لتباين المتغيرين .

واستخدام هذه الصورة يحتاج إلى جهد ووقت كبيرين إذا كانت ن كبيرة . ولذلك لا ننصح الباحث باستخدامها إلا إذا كان لديه آلة حاسبة أو كان عدد قيم ن قليلا ، والغرض من عرضها هنا هو أنها تلقى بعض الضوء على معنى معامل ارتباط بيرسون كما ذكرنا .

ولتوضيح كيفية تطبيق الصورة رقم (٣) فإننا نعطى المثال الآتي :
أوجد معامل الارتباط بين مجموعتي الدرجات :

س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ }

، ص = { ٧ ، ٤ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٠ ، ٢٢ ، ١٩ }

فلإيجاد معامل الارتباط باستخدام طريقة متوسط الانحرافات يمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية :

١ — يوجد متوسط قيم المتغير س .

٢ — يوجد متوسط قيم المتغير ص .

٣ — يوجد انحراف كل قيمة من قيم المتغير س عن المتوسط .

٤ — يوجد انحراف كل قيمة من قيم المتغير ص عن المتوسط .

٥ — يوجد مجموع مربعات انحرافات كل قيمة من قيم س عن المتوسط .

٦ — يوجد مجموع مربعات انحرافات كل قيمة من قيم ص عن المتوسط .

٧ — يوجد مجموع حواصل ضرب انحرافات قيم المتغير س عن المتوسط في انحرافات قيم المتغير ص عن المتوسط .

ويمكن استخدام هذه الخطوات في المثال السابق وتلخيصها في الجدول رقم (٢٤) الآتي :

س	س − س̄	(س − س̄)^2	ص	ص − ص̄	(ص − ص̄)^2	(س − س̄) (ص − ص̄)
١	− ٦	٣٦	٧	− ٦	٣٦	٣٦
٣	− ٤	١٦	٤	− ٩	٨١	٣٦
٥	− ٢	٤	١٣	صفر	صفر	صفر
٧	صفر	صفر	١٦	+ ٣	٩	صفر
٩	+ ٢	٤	١٠	− ٣	٩	− ٦
١١	+ ٤	١٦	٢٢	+ ٩	٨١	٣٦
١٣	+ ٦	٣٦	١٩	+ ٦	٣٦	٣٦

مجـ س = ٤٩   مجـ (س − س̄)^2 = ١١٢   مجـ ص = ٩١   مجـ (ص − ص̄)^2 = ٢٥٢

س̄ = $\frac{٤٩}{٧}$ = ٧   ص̄ = $\frac{٩١}{٧}$ = ١٣

مجـ (س − س̄) (ص − ص̄) = ١٢٨

جدول رقم (٢٤)

خطوات حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام متوسط الانحرافات

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})(\text{ص} - \overline{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢} \times \text{مجـ}(\text{ص} - \overline{\text{ص}})^{٢}}}$$

$$= \frac{١٣٨}{\sqrt{١١٢ \times ٢٥٢}} = \frac{١٣٨}{١٦٨} = ٠{,}٨٢$$

ثالثاً : <u>باستخدام الدرجات الخام مباشرة</u> :

يمكن التوصل إلى صورة جديدة لإيجاد معامل ارتباط بيرسون باستخدام الصورة رقم (٣) السابقة بعد إجراء بعض العمليات الجبرية .

فالمقدار $\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$ يمكن وضعه على الصورة :

$$\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢} = \text{مجـ س}^{٢} - ٢\ \text{مجـ س}\ \overline{\text{س}} + \text{مجـ}\ \overline{\text{س}}^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢\ \text{مجـ س} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} + \text{ن}\ \overline{\text{س}}^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - ٢\ \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} + \text{ن} \times \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - \frac{٢\ (\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}} + \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}$$

وبالمثل $\text{مجـ}(\text{ص} - \overline{\text{ص}})^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}$

و $\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})(\text{ص} - \overline{\text{ص}}) = \text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$

وبالتعويض فى الصورة رقم (٣) نجد أن :

$$\text{ر} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right]\left[\text{مجـ ص}^{2} - \frac{(\text{مجـ ص})^{2}}{\text{ن}}\right]}}$$

(٤) ....

$$= \frac{\text{مجـ س ص} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\sqrt{\left(\frac{\text{مجـ س}^{2}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{2}\right)\left(\frac{\text{مجـ ص}^{2}}{\text{ن}} - \bar{\text{ص}}^{2}\right)}}$$

(٥) ....

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}\right]\left[\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}\right]}}$$

(٦) ....

ويمكن أن يستخدام الباحث أى صورة من هذه الصور السابقة، إلا أن الصورة رقم (٦) هى الصورة العامة التى يمكن أن تستخدم فى حساب معامل الارتباط من الدرجات الخام مباشرة ولكنها تحتاج أيضاً إلى آلة حاسبة .

ويمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية عند تطبيق هذه الصورة :

١ — يوجد مجموع قيم المتغير س . ٢ — يوجد مجموع قيم المتغير ص .

٣ — يوجد حاصل ضرب مجموع قيم س فى مجموع قيم ص .

٤ — يوجد مجموع حواصل ضرب القيم المتقابلة لكل من س ، ص

٥ — يوجد مجموع مربعات قيم س .

٦ — يوجد مجموع مربعات قيم ص .

٧ — يوجد مربع مجموع قيم س .

٨ — يوجد مربع مجموع قيم ص .

ويمكن استخدام هذه الخطوات فى المثال السابق وتلخيصها فى الجدول رقم (٣٥) الآتى لإيجاد معامل الارتباط :

س	ص	س^{2}	ص^{2}	س ص
١	٧	١	٤٩	٧
٣	٤	٩	١٦	١٢
٥	١٣	٢٥	١٦٩	٦٥
٧	١٦	٤٩	٢٥٦	١١٢
٩	١٠	٨١	١٠٠	٩٠
١١	٢٢	٨١	٤٨٤	٢٤٢
١٣	١٩	١٦٩	٣٦١	٢٤٧
٤٩	٩١	٤٥٥	١٤٣٥	٧٧٥

جدول رقم (٣٥)

خطوات حساب معامل ارتباط بيرســون باستخدام الدرجات الخام مباشرة

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}\right]\left[\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}\right]}}$$

$$= \frac{\text{٧} \times \text{٧٧٥} - \text{٤٩} \times \text{٩١}}{\sqrt{\left[\text{٧} \times \text{٤٥٥} - (\text{٤٩})^{2}\right]\left[\text{٧} \times \text{١٤٣٥} - (\text{٩١})^{2}\right]}}$$

$$= \frac{\text{٥٤٢٥} - \text{٤٤٥٩}}{\sqrt{\text{٧٨٤} \times \text{١١٧٦٤}}}$$

$$= \frac{\text{٩٦٦}}{\text{٢٨} \times \text{٤٢}} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٢٨}} = \text{٠,٨٢}$$ وهو نفس الجواب السابق .

رابعاً : باستخدام الفروق بين الدرجات الخام :

يمكن الحصول على معامل ارتباط بيرسون باستخدام الفروق بين الدرجات الخام . ونحصل على هذه الفروق بطرح كل قيمة من قيم ص من قيمة س المناظرة لها أو العكس .

فإذا فرضنا أن ف تمثل الفرق س — ص ، فإن فَ = سَ — صَ
حيث سَ ترمز لانحراف قيم س عن متوسط هذه القيم ، صَ ترمز لانحراف قيم ص عن متوسط هذه القيم .

أى أن : $\text{مجـ فَ}^{2} = \text{مجـ} (\text{سَ} - \text{صَ})^{2}$

$$= \text{مجـ سَ}^{2} + \text{مجـ سَ}^{2} - 2\ \text{مجـ سَ صَ}$$

ولكن $\text{ر} = \dfrac{\text{مجـ سَ صَ}}{\text{ن ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}}$ (الصورة رقم ٣)

أى أن : $\text{مجـ سَ صَ} = \text{ن ر ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}$

بالتعويض عن مجـ سَ صَ فى الطرف الأيسر الذى يساوى مجـ فَ² نجد أن :

$$\text{مجـ فَ}^{2} = \text{مجـ سَ}^{2} + \text{مجـ صَ}^{2} - 2\ \text{ن ر ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}$$

وبالقسمة على ن فإن :

$$\frac{\text{مجـ فَ}^{2}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ سَ}^{2}}{\text{ن}} + \frac{\text{مجـ صَ}^{2}}{\text{ن}} - \frac{2\ \text{ن ر ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ن}}$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة الآتية :

$$\text{ع}^{2}_{\text{ف}} = \text{ع}^{2}_{\text{س}} + \text{ع}^{2}_{\text{ص}} - 2\ \text{ر ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}$$

وهذه الصورة تعنى أن تباين الفرق بين المتغيرين س ، ص = تباين المتغير الأول مضافا إليه تباين المتغير الثانى ومطروحا من هذا المجموع ضعف مقدار التباين المتلازم أو التغاير Covariance (وهما مصطلحان يطلق أى منهما على الحد الثالث فى هذه الصورة) .

ومن هذه المعادلة يمكن إيجاد قيمة ر وهى :

$$\text{ر} = \frac{\text{ع}^{2}_{\text{س}} + \text{ع}^{2}_{\text{ص}} - \text{ع}^{2}_{\text{ف}}}{2\ \text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}} \qquad \cdots\cdots (7)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن تباين مجموع المتغيرين س ، ص :

$$\text{أى ع}^{2}_{\text{س}+\text{ص}} = \text{ع}^{2}_{\text{س}} + \text{ع}^{2}_{\text{ص}} + 2\ \text{ر}\ \text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}$$

ويمكن من هذه المعادلة الحصول على ر كالآتى :

$$\text{ر} = \frac{\text{ع}^{2}_{\text{س}+\text{ص}} - \text{ع}^{2}_{\text{س}} - \text{ع}^{2}_{\text{ص}}}{2\ \text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}} \qquad \cdots\cdots (8)$$

ويمكن باستخدام أى من الصورتين رقم ٧ أو ٨ الحصول على قيمة ر .

ولتوضيح خطوات تطبيق الصورة رقم (٧) لإيجاد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص نعرض المثال المبين بالجدول (رقم ٢٦) الآتى :

(١) س	(٢) ص	(٣) س²	(٤) ص²	(٥) ف	(٦) ف²
٢٠	١٢	٤٠٠	١٤٤	٨	٦٤
١٨	١٦	٣٢٤	٢٥٦	٢	٤
١٦	١٠	٢٥٦	١٠٠	٦	٣٦
١٥	١٤	٢٢٥	١٩٦	١	١
١٤	١٢	١٩٦	١٤٤	٢	٤
١٢	١٠	١٤٤	١٠٠	٢	٤
١٢	٩	١٤٤	٨١	٣	٩
١٠	٨	١٠٠	٦٤	٢	٤
٨	٧	٦٤	٤٩	١	١
٥	٢	٢٥	٤	٣	٩
المجموع ١٣٠	١٠٠	١٨٧٨	١١٣٨	٣٠	١٢٦

جدول رقم (٢٦)
خطوات حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام
الفرق بين الدرجات الخام

فن الجدول رقم (٢٦) نستطيع إيجاد $ع^٢_{س}$ ، $ع^٢_{ص}$ ، $ع^٢_{ف}$ كالآتي :

الخطوة الأولى :

نوجد مجـ $سَ^٢$ ، $ع^٢_{س}$

$$مجـ\ سَ^٢ = مجـ\ س^٢ - \frac{(مجـ\ س)^٢}{ن}$$

$$= ١٨٧٨ - \frac{(١٣٠)^٢}{١٠٠}$$

$$= ١٨٧٨ - ١٦٩٠ = ١٨٨$$

$$ع^٢_{س} = \frac{مجـ\ سَ^٢}{ن} = \frac{١٨٨}{١٠} = ١٨,٨$$

الخطوة الثانية : توجد مج ص$'^{٢}$ ، ع^{٢}ص .

$$\text{مج ص}'^{٢} = \text{مج ص}^{٢} - \frac{(\text{مج ص})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ١١٣٨ - \frac{(١٠٠)^{٢}}{١٠}$$

$$= ١١٣٨ - ١٠٠٠ = ١٣٨$$

$$\therefore \text{ع}^{٢}\text{ص} = \frac{\text{مج ص}'^{٢}}{\text{ن}} = \frac{١٣٨}{١٠} = ١٣,٨$$

والخطوة الثالثة : توجد مج ف$'^{٢}$ ، ع^{٢}ف

$$\text{مج ف}'^{٢} = \text{مج ف}^{٢} - \frac{(\text{مج ف})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ١٣٦ - \frac{(٣٠)^{٢}}{١٠}$$

$$= ١٣٦ - ٩٠ = ٤٦$$

$$\therefore \text{ع}^{٢}\text{ف} = \frac{\text{مج ف}'^{٢}}{\text{ن}} = \frac{٤٦}{١٠} = ٤,٦$$

والخطوة الرابعة : نعوض عن قيم ع^{٢}س ، ع^{٢}ص ، ع^{٢}ف في الصورة رقم (٧) كالآتي :

$$\text{ر} = \frac{\text{ع}^{٢}\text{س} + \text{ع}^{٢}\text{ص} - \text{ع}^{٢}\text{ف}}{٢\ \text{ع}\text{س}\ \text{ع}\text{ص}}$$

$$= \frac{١٨,٨ + ١٣,٨ - ٤,٦}{\sqrt{١٣,٨} \times \sqrt{١٨,٨}}$$

$$= \frac{٢٨}{٢ \times ١٦,١} = \frac{٢٨}{٣٢,٢} = ٠,٨٧$$

حساب معامل ارتباط بيرسون للبيانات المجمعة :

إذا اشتملت البيانات على عدد كبير من أزواج القيم يمكن للباحث تبويب البيانات فى فئات وتجميعها فى جدول تكرارى مزدوج Two — Way Frequency Table ثم يوجد معامل ارتباط بيرسون لهذه البيانات المجمعة بطريقة تسمى طريقة الترميز Code Method ·

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث فى حساب معامل الارتباط بهذه الطريقة نعرض المثال الآتى :

نفترض أن الباحث أراد إيجاد معامل ارتباط بيرسون بين درجات الاختبارين س ، ص المبينة بالجدول الآتى :

س	ص	س	ص	س	ص
٣٧	٤٢	٣٠	٣٤	[illegible]	٤٤
٣٢	٣٤	٤٨	٤٦	[illegible]	٣٩
٤٥	٤٢	٣٥	٣٥	٤٠	٤٣
٢٧	٢٨	٤٤	٤٢	٣٨	٤١
٤٣	٤١	٤٥	٣٧	٣٣	٣٨
٣٧	٣٩	٣٢	٣١	٣٩	٣٦
٤٣	٤٨	٤٢	٤٢	٤٦	٤٠
٣٦	٣١	٣٨	٣٣		
٤٣	٣٧	٣٦	٣٧		

جدول رقم (٢٧)
درجات اختبارين س ، ص

	-٢	-١	صفر	١	٢	(١) سَ	(٢) تسَ	(٣) سَ تسَ	(٤) سَ٢ تسَ	(٥) سَ صَ ت
	١					-٢	١	-٢	٤	٤
		٣	٢			-١	٥	-١	٥	٣
		١	٥	١	١	صفر	٨	صفر	صفر	صفر
			٢	٤	٣	١	٩	٩	٩	١٠
				١	١	٢	٢	٤	٨	٦
(٦) صَ	-٢	-١	صفر	١	٢	صفر	٢٥	٦	٢٦	٢٣
(٧) تصَ	١	٤	٩	٦	٥	٢٥				
(٨) صَ تصَ	-٢	-٤	صفر	٦	١٠	١٠				
(٩) صَ٢ تصَ	٤	٤	صفر	٦	٢٠	٣٤				
(١٠) سَ صَ ت	٤	٣	صفر	٦	١٠	٢٣				

التحقق تأكد من التساوي

جدول رقم (٣١)
جدول الارتباط بين المتغيرين س ، ص

فإذا نظرنا إلى العمود رقم (٢) الذى يشتمل على التكرار تسَ فى الجدول رقم ٣١ نجد أننا حصلنا عليه بجمع تكرارات الصف المناظر له . والعمود رقم (٣) الذى يشتمل على حواصل الضرب سَ تسَ حصلنا عليه بضرب القيم المتناظرة فى العمودين رقمى (١) ، (٢) . والعمود رقم (٤) الذى يشتمل على حواصل الضرب سَ٢ تسَ يمكن الحصول عليه إما بتربيع كل قيمة من قيم العمود رقم (١) وضربها فى القيم المناظرة لها فى العمود رقم (٢) ، أو بضرب القيم المتناظرة فى العمودين رقمى (١) ، (٣) .

ويمكن الحصول على القيم المبينة بخلايا الصفوف رقم (٧) ، (٨) ، (٩) بنفس الطريقة . أما قيم ن ، مجـ سَ تسَ ، مجـ سَ٢ تسَ فيمكن الحصول عليهـا بجمع الأعمدة رقم (٢) ، (٣) ، (٤) ، وقيم مجـ صَ تصَ ، مجـ صَ٢ تصَ بجمع الصفين رقمى (٨) ، (٩) .

أما قيمة المقدار مجـ سَ صَ ت فيمكن الحصول عليها بجمع المقادير التى نحصل عليها من ضرب تكرار كل خلية فى قيمة كل من سَ ، صَ التى فى الصف والعمود اللذين تنتمى إليهما .

ويمكن إجراء هذه العملية على كل صف على حدة بأن نضرب أولا تكرار كل خلية فى قيمة سَ المناظرة لها ونجمع حواصل الضرب ، ثم نضرب الناتج فى قيمة صَ المناظرة لها .

فمثلا بالنسبة للصف الثانى نحصل على :

[٢ (— ١) + ٢ (صفر)] (— ١) = ٢

وبالنسبة للصف الرابع نحصل على :

[٢ (صفر) + ٤ (١) + ٣ (٢)] (١) = ١٠

وهذه القيم هى المبينة فى العمود رقم (٥) فى الجدول رقم ٣١ .

ويمكن إجراء هذه العملية على كل عمود على حدة بدلا من كل صف ، ونضرب تكرار كل خلية فى قيمة صَ المناظرة لها ونجمع حواصل الضرب ، ثم نضرب الناتج فى قيمة سَ المناظرة لها . وهذا يعطينا أيضاً نفس قيمة المقدار مجـ سَ صَ ت .

فمثلا بالنسبة للعمود الرابع نحصل على :

[١ (صفر) + ٤ (١) + ١ (٢)] (١) = ٦

وهذه هى القيمة المبينة فى الخلية المطلوبة فى الصف العاشر .

ويمكن للباحث مقارنة العمود الخامس بالصف العاشر للتأكد من صحة العمليات الحسابية ، إذ أنه يجب أن يجد القيم المتناظرة متساوية .

والخطوة الخامسة : يعوض عن مجموع القيم المطلوبة فى الصورة السابقة لحساب معامل الارتباط من المجاميع التى حصل عليها من الجدول السابق رقم (٣١) وهو يسمى عادة جدول الارتباط ليحصل على :

$$ر = \frac{(٢٥)(٢٣) - (١٠)(٦)}{\sqrt{(٢٣)(٣٤) - (١)^2}\ \sqrt{(٢٥)(٢٦) - (٦)^2}}$$

$$= ٠,٧٦$$

تصحيح معامل الارتباط من الأخطاء الناتجة عن تجميع البيانات :

إن الطريقة السابقة لحساب معامل الارتباط للبيانات المجمعة تعد طريقة تقريبية . والسبب فى ذلك يرجع إلى أننا اعتبرنا أن تكرار كل فئة يقع فى مركز تلك الفئة . وكلما زاد طول الفئة زاد بالطبع الخطأ الناتج عن هذا التقريب .

فإذا أراد الباحث أن يحصل على القيمة المضبوطة لمعامل الارتباط فعليه أن يستخدم الدرجات الخام مباشرة بدلا من استخدام طريقة الترميز السابقة .

أما إذا استخدم الباحث طريقة الترميز وكان عدد فئات أى من المتغيرين قليلا فإن تقدير قيمة معامل الارتباط تكون أقل مما لو استخدم طريقة الدرجات الخام . وفى الحالات المتطرفة التى يكون فيها عدد فئات أى من المتغيرين فئتين

فقط تقل قيمة معامل الارتباط الناتجة عن استخدام طريقة الترميز بقدر ثلثى قيمتها عما لو استخدم طريقة الدرجات الخام . وعندما يكون عدد فئات كل من المتغيرين ١٠ تقل قيمة معامل الارتباط بقدر ٣٪ .

ويمكن تصحيح الأخطاء الناتجة عن تجميع البيانات لأى عدد من فئات كل من المتغيرين بقسمة معامل الارتباط الناتج من استخدام طريقة الترميز على مقدار ثابت يساوى عدد هذه الفئات . وهذا التصحيح يعد ضروريا لأن هذه الأخطاء تؤدى إلى أخطاء أيضا عند حساب الانحراف المعيارى كما ذكرنا فى الفصل الرابع .

أما إذا استخدم الباحث تصحيح شبرد Sheppard Correction الذى أشرنا إليه فى الفصل الرابع لكل من الانحرافين المعياريين للمتغيرين س ، ص فإنه لا يكون هنا داع لإجراء تصحيح آخر لمعامل الارتباط .

وقد أعد كل من بيترز Peters وفان فورهيس Van Voorhis قائمة من الثوابت التى يمكن أن يستخدمها الباحث لإجراء تصحيح معامل الارتباط عندما تجمع البيانات فى فئات مختلفة السعة بالنسبة للمتغيرين س ، ص .

وهذه الثوابت مبينة بالجدول الآتى رقم (٣٢) :

(١) عدد الفئات	(٢) معامل التصحيح	(٣) مربع معامل التصحيح
٢	٠,٨١٦	٠,٦٦٧
٣	٠,٨٥٩	٠,٧٣٧
٤	٠,٩١٦	٠,٨٣٩
٥	٠,٩٤٣	٠,٨٩١
٦	٠,٩٦٠	٠,٩٢٣
٧	٠,٩٧٠	٠,٩٤١
٨	٠,٩٧٧	٠,٩٥٥
٩	٠,٩٨٢	٠,٩٦٤
١٠	٠,٩٨٥	٠,٩٧٠
١١	٠,٩٨٨	٠,٩٧٦
١٢	٠,٩٩٠	٠,٩٨٠
١٣	٠,٩٩١	٠,٩٨٣
١٤	٠,٩٩٢	٠,٩٨٥
١٥	٠,٩٩٤	٠,٩٨٧

جـــدول رقم (٣٢)
معاملات تصحيح معامل الارتباط من الأخطاء الناتجة
عن تجميع البيانات

فإذا افترضنا أننا حصلنا على معامل ارتباط = ٠,٦١ من بيانات مجمعة عدد فئات المتغير س فيها = ٨ ، وعدد فئات المتغير ص = ٩ فعندئذ يمكن الرجوع إلى جدول رقم (٣٢) لمعرفة قيمة كل من معاملى التصحيح فى الحالتين وهما : ٠,٩٧٧ ، ٠,٩٨٢ على الترتيب .

ولإجراء تصحيح معامل الارتباط الذى حصلنا عليه وهو ٠,٦١ تطبق الصورة الآتية :

$$ر_ح = \frac{ر}{ح_س \times ح_ص} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٠)$$

حيث $ر_ح$ = معامل الارتباط بعد تصحيحه .

، ر = معامل الارتباط قبل التصحيح .

، $ح_س$ ، $ح_ص$ = معاملى تصحيح المتغيرين س ، ص

ويمكن الحصول عليهما من الجدول رقم (٣٢) .

فإذا طبقنا هذه الصورة على قيمة معامل الارتباط ٠,٦١ نجد أن :

$$ر_ح = \frac{٠,٦١}{(٠,٩٧٧)\ (٠,٩٨٢)} = ٠,٦٢٦$$

أى أن معامل الارتباط بعد تصحيحه من الأخطاء الناتجة عن التجميع = ٠,٦٢٦ .

وبالطبع إذا تساوى عدد فئات كل من المتغيرين يتساوى معامل تصحيح كل منهما ، وتصبح صورة التصحيح السابقة كالآتى :

$$ر_ح = \frac{ر}{ح^٢} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١١)$$

وهذا يعنى أن المقام قد أصبح مساويا لمربع معامل التصحيح لأى من س أو ص .

ويمكن استخدام العمود الثالث فى الجدول رقم (٣٢) للتعويض عن قيمة $ح^٢$ المناسبة فى مثل هذه الحالة .

وننصح الباحث بتطبيق هذه الصورة عندما يكون عدد فئات كل من المتغيرين س ، ص أقل من ١٠ فئات وبخاصة إذا كان عدد الفئات ٨ أو أقل .

ويفيد تطبيق هذه الصورة فى الحصول على قيمة أكثر دقة لمعامل الارتباط عندما تكون قيمته كبيرة . أما إذا كانت قيمته صغيرة وبخاصة إذا كان حجم العينة المستخدمة صغيراً أيضاً فإنه ربما لا يفيد كثيراً تطبيق هذه الصورة .

ويجب أن يراعى الباحث أن معاملات التصحيح المبينة بالجدول رقم (٣٢) قد أعدت بحيث تستخدم بوجه خاص فى الحالات التى تكون فيها الفئات متساوية السعة ومنتصفات الفئات تمثل التكرارات ، وأن يكون توزيع كل من المتغيرين اعتدالياً .

العوامل التى تؤثر فى معامل ارتباط بيرسون :

١ — سبق أن ذكرنا فى الفصل الرابع كيف أن إضافة أو طرح مقدار ثابت إلى أو من كل قيمة من قيم المتغير ، وكذلك الضرب أو القسمة فى أو على مقدار ثابت تؤثر فى قيمة متوسط وتباين التوزيع .

وقد أوضحنا أن بعض هـــذه العمليات تغير من نقطة الأصل (نقطة بدء القياس) ، ووحدة ميزان القياس .

أما فى حالة الارتباط ، فإن إضافة أو طرح مقدار ثابت لا يساوى صفراً إلى أو من كل درجة من درجات أحد توزيعى المتغيرين أو كليهما ، وكذلك الضرب أو القسمة فى أو على مقدار ثابت لا يغير من قيمة معامل الارتباط . أى أن قيمته لا تتغير بتغير نقطة الأصل ووحدة ميزان القياس .

وفى الحقيقة أنه يمكن باستخدام هذه النتيجة تبسيط العمليات الحسابية بأن

نطرح مقدارا ثابتا مثلا من كل درجة من درجات أحد المتغيرين أو كليهما إذا كانت قيم الدرجات كبيرة دون أن تتغير قيمة معامل الارتباط .

كما أن هذه النتيجة تعنى أنه يمكن إيجاد معامل الارتباط بين متغيرين مهما اختلفت وحدات قياس كل منهما .

فقيمة معامل الارتباط بين العمر والطول لا تختلف سواء كانت وحدات العمر المستخدمة هى الأعوام أو الشهور ، ووحدات الطول هى الأقـــدام أو السنتيمترات .

وفى الحقيقة أن عدم تأثر معامل الارتباط بتغير وحدة القياس أو نقطة الأصل لأى من المتغيرين أو كليهما يجعل معامل الارتباط من المقاييس الإحصائية ذات الأهمية التطبيقية الكبيرة .

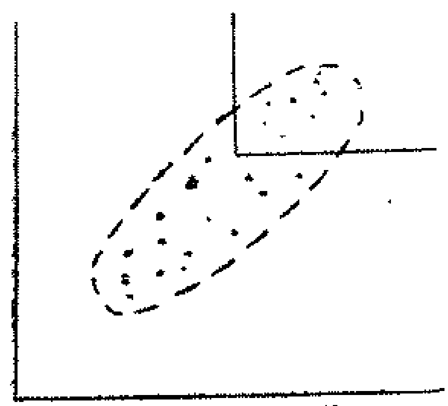
٢ — تتأثر قيمة معامل الارتباط بمدى تباين درجات كل من التوزيعين. فقيمة معامل الارتباط المحسوبة من مجموعة من الدرجات المتباينة إلى حد كبير تكون أكبر من قيمته إذا كانت مجموعة الدرجات متقاربة فى أحد المتغيرين أو كليهما .

فمثلا إذا حسبنا معامل الارتباط بين نسب ذكاء ودرجات تحصيل مجموعة من الطلاب الذين يختلفون اختلافا واضحا فى قدراتهم فإننا ربما نجد أن قيمة هذا المعامل مرتفعة عما لو كانت مجموعة الطلاب من المتفوقين عقلياً . فمعامل الارتباط فى هذه الحالة من المحتمل أن تكون قيمته منخفضة جداً بسبب تجانس المجموعة .

وهذا يوضح أن قيمة معامل الارتباط بين متغيرين يكون لها معنى فقط إذا حدد الباحث طبيعة وتكوين المجموعة موضع البحث .

وأحيانا يحصل الباحث على معامل ارتبـــاط منخفض زائف أو وهمى Spurious Correlation ناتج عن تضييق مدى قيم أحد المتغيرين . فمثلا إذا كان الباحث مهتما بإيجاد العلاقة بين عمر وطول مجموعة من الأطفال الذين

تتراوح أعمارهم بين ٣ أعوام ، ١٦ عاما . فإنه سيحصل بلا شك على معامل ارتباط مرتفع بين المتغيرين . أما إذا ضيق مدى أحد هذين المتغيرين بأن أوجد معامل الارتباط بين العمر والطول بالنسبة للأطفال الذين تتراوح أعمارهم بين ٩ ، ١٠ أعوام فقط ، فإنه سيجد أن معامل الارتباط قد انخفض إلى حد كبير ويمكن توضيح ذلك بالشكل الآتي رقم (٤٧) :



شكل رقم (٤٧)

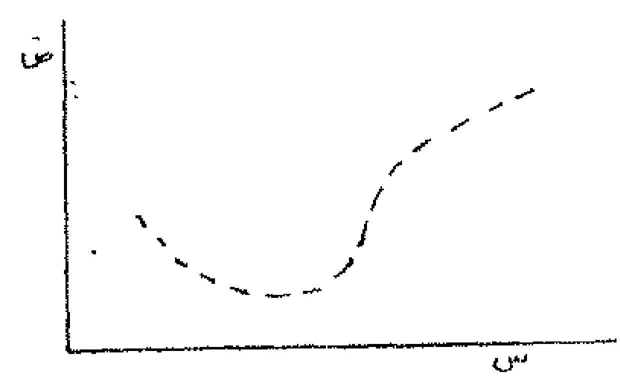
شكل انتشارى يوضح قيمة مرتفعة لمعامل الارتباط
بين العمر والطول على مدى متسع لكل منهما
ويوضح انخفاض قيمته عند تضييق مدى المتغيرين

فبالنظر إلى شكل رقم (٤٧) نجد أن قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين تكون كبيرة إذا أخذنا فى الحسبان المدى الكلى لها . إما إذا نظرنا إلى الجزء العلوى الأيمن من الشكل فسنجد أن هذه القيمة قد انخفضت بسبب تضييق هذا المدى.

وكثيراً ما يواجه الباحث النفسى والتربوى مثل هذه المشكلة وهى مشكلة تضييق أو بتر المدى الكلى لأحد المتغيرين أو كليهما ، حيث إن كثيراً من

الباحثين يجرون أبحاثهم على طلاب المدارس الثانوية والجامعات الذين يتم اختيارهم على أساس عدد من المتغيرات مثل الذكاء والتحصيل المرتفع . ولذلك فإن هؤلاء الطلاب وبخاصة فى الكليات المختلفة يكونون بمثابة مجموعة متجانسة بالنسبة لهذه المتغيرات، ويترتب على ذلك أن الباحث عندما يوجد العلاقة بين اختبارات الذكاء أو الاستعدادات وتقديرات الطلاب فى الدراسة الجامعية مثلا سيجد أن معامل الارتباط الناتج ربما يكون منخفضا بسبب تضييق المدى . كما أنه يجب أن يتوقع أن قيمة معامل الارتباط ستكون أكثر انخفاضا بالنسبة للكليات التى تنتقى طلابها ممن حصلوا على درجات عالية فى اختبارات الاستعدادات مثلا .

٣ — يفترض عند إيجاد معامل الارتباط أن العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية . فإذا نظرنا إلى الشكل الآتى رقم (٤٨) نجد أن هناك تناظرا تاما بين المتغيرين ، ولكن التناظر ليس خطيا ، وأن درجة العلاقة بين المتغيرين ستكون أقل مما هى عليه حقيقة إذا استخدم الباحث فى ذلك معامل ارتباط بيرسون . وسوف نناقش الارتباط المنحنى فى الفصل الحادى عشر .



شكل رقم (٤٨)
شكل انتشارى يوضح علاقة منحنية بين متغيرين

٤ — لكي تصل قيمة معامل ارتباط بيرسون إلى قيمتيها العظميين وهما + ١ ، — ١ يجب أن يكون توزيعا المتغيرين لها نفس الشكل . فمثلا إذا كان أحد المتغيرين متصلا والآخر من نوع المتغير الثنائي (أي الذي تكون قيمته إما واحداً صحيحاً أو صفراً مثلا) ، فإن معامل الارتباط سوف يكون دائماً أقل من الواحد الصحيح . وبالمثل إذا كان توزيع أحد المتغيرين ملتويا إلى اليسار بينما كان توزيع المتغير الآخر ملتويا إلى اليمين ، فإن معامل الارتباط سوف يكون أيضا أقل من الواحد الصحيح .

تفسير معامل ارتباط بيرسون .

يتضح مما سبق أن معامل الارتباط بين متغيرين هو قيمة مجردة تعبر عن العلاقة القائمة بين المتغيرين بحيث تنحصر بين + ١ ، — ١ . ويعبر عادة عن قيمة معامل الارتباط بكسر عشري .

وهنا يجب أن نحذر الباحث من الوقوع في خطأ تفسير معامل الارتباط على أنه قيمة مطلقة مثل القيمة المناظرة للطول أو الوزن مثلا ، أو على أنه نسبة مئوية . فمثلا معامل الارتباط ٠,٢٥ لا يعتبر نصف معامل الارتباط ٠,٥ ، ومعامل الارتباط ٠,٥٠ لا يعتبر نصف معامل الارتباط الذي قيمته واحد صحيح .

كما أن الفرق بين معاملي الارتباط ٠,٤٠ ، ٠,٦٠ لا يساوي الفرق بين معاملي الارتباط ٠,٧٠ ، ٠,٩٠ . فمعامل الارتباط هو مقدار مجرد ولا يقاس على ميزان خطي وحداته متساوية .

كما لا يجب تفسير معامل الارتباط على أساس وحدات الدرجات الأصلية حيث إن قيمة معامل الارتباط تكون مستقلة — كما سبق أن ذكرنا — عن الوحدات التي يقاس بها المتغيران والقيم التي يأخذها كل منهما .

وأحيانا يعتبر الباحث أن معامل الارتباط الذي تنحصر قيمته بين ٠,٣٠ ، ٠,٧٠ متوسط القيمة أي يعبر عن علاقة ارتباطية متوسطة ، بينما يعتبر أن معامل الارتباط الذي تقل قيمته عن ذلك منخفضاً .

أما إذا زادت قيمته عن ذلك فإنه يعتبره مرتفعا . ولكن هذه الاعتبارات خاطئة من وجهة نظر الأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات والتى سنعرض لها بالتفصيل فى الجزء الثانى من الكتاب ، فدلالة معامل الارتباط هى دالة لحجم العينة ، حيث إن قيمة معامل الارتباط المرتفعة التى يحصل عليها الباحث باستخدام عينات صغيرة ربما لا يكون لها أى معنى على الإطلاق من ناحية الاستدلال على الارتباط فى المجتمع الأصل الذى استمدت منه هذه العينات .

كما أن هذه الاعتبارات خاطئة أيضا من وجهة نظر الأساليب الوصفية فى تحليل البيانات، حيث إن طبيعة كل من العينة والمتغيرات موضع البحث، والغرض من استخدام معامل الارتباط، تعتبر من العوامل التى تحدد ما إذا كانت قيمة معامل الارتباط مرتفعة أم منخفضة. فمثلا معامل الارتباط بين اختبار استعداد طبق على مجموعة من تلاميذ الصف السابع ودرجاتهم فى اختبارات التحصيل عند التحاقهم بالكليات والذى قيمته ٠٫٧٠ ربما لا يكون له معنى . بينما معامل الارتباط بين صورتين متكافئتين من اختبار تحصيلى والذى تبلغ قيمته ٠٫٧٠ ربما يعتبر منخفضا مما يستدعى مراجعة أى من الاختبارين أو كليهما .

ويجب أن يلاحظ الباحث أيضا أن مقدار العلاقة بين متغيرين لا تعتمد على إشارة معامل الارتباط . فمعامل الارتباط — ٠٫٧٠ يعبر عن نفس مقدار العلاقة بين متغيرين معامل الارتباط بينهما + ٠٫٧٠ . فالفرق بينهما يكون فى اتجاه العلاقة .

وربما يواجه الباحث أيضا مشكلة أخرى عند تفسير معامل الارتباط تنتج من فكرة أن إضافة أو طرح مقدار ثابت إلى أو من كل قيمة من قيم أحد المتغيرين لا تغير من قيمة معامل الارتباط . فإذا افترضنا أن الباحث أراد تحديد العلاقة بين درجات اختبار طبق على نفس المجموعة فى مرتين مختلفتين . فإذا حصل على معامل ارتباط مرتفع ربما تكون درجات المجموعة فى المرة الثانية أعلى أو أقل من درجاتهم فى المرة الأولى . وبالمثل معامل الارتباط المرتفع بين درجات مجموعة من الأطفال فى اختبارى القدرة على القراءة ، واختبار فى القدرة العددية

ليس دليلا على أن نمو القدرتين عندهما متكافىء . فمعامل الارتباط هو قيمة تدل على التغاير أو التباين المتلازم Concomittant Variation بين المتغيرين ، ولا يشير إلى مقدار المتغيرين .

ومن الطرق المفيدة فى تفسير القيم المختلفة لمعامل الارتباط (ر) هو تربيع هذه القيم أى الحصول على قيمة (ر٢) . والمقدار (ر٢) هو النسبة بين التباين الكلى لأحد المتغيرين والجزء من هذا التباين الذى يمكن التنبؤ به باستخدام المتغير الثانى . أى أن ر٢ هى الجزء من التباين فى أحد المتغيرين الذى يمكن أن نتنبأ به باستخدام المتغير الثانى . فإذا كان معامل الارتباط بين متغيرين هو ٧٠٧, . مثلا ، فإن ر٢ = (٧٠٧, .)٢ = ٥٠, . تقريبا ، وعندما ر = ٥, . فان ر٢ = ٢٥, . ، ولذلك فإنه يمكن اعتبار أن معامل الارتباط ٧٠٧, . ضعف معامل الارتباط ٥, . حيث إن نسبة ر٢ فى الحالتين هى ٢ : ١ تقريباً .

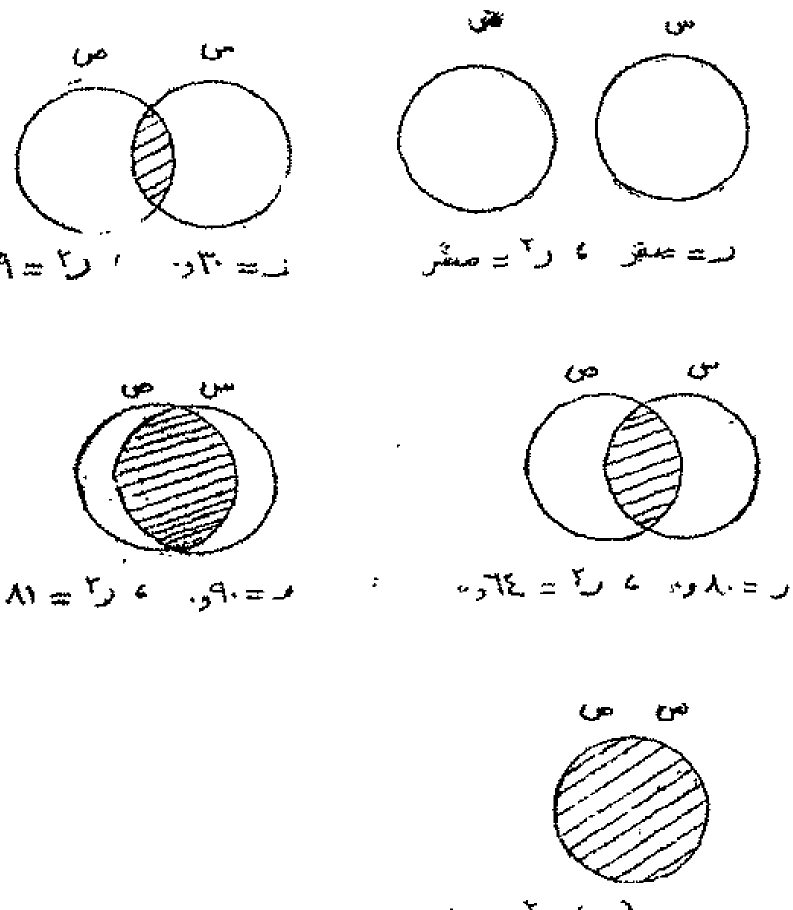
ولتوضيح ذلك نفترض أن اختباراً ما طبق على مجموعة من الطلاب قبل البدء فى برنامج تعليمى معين ، وطبق اختبار آخر بعد انتهاء فترة البرنامج . فإذا حسبنا معامل الارتباط بين درجات الاختبارين وربعنا المعامل الناتج فإنه يمكن تفسير ر٢ على أنها نسبة تباين درجات الاختبار الثانى التى ترجع إلى أو يمكن التنبؤ بها باستخدام درجات الاختبار الأول . وهذا الجزء من التباين فى درجات الاختبار الثانى لا يرجع إلى أثر البرنامج التعليمى وإنما كان هذا التباين موجوداً قبل بدء الطلاب فى تعلم الخبرة التعليمية التى يقدمها البرنامج

وإذا افترضنا أن معامل الارتباط بين درجات الطلاب فى اختبار للذكاء واختبار فى التحصيل هو ٥, . فهنا يمكن أن نستنتج أن (٥٠, .)٢ أى ٢٥, . من تباين درجات اختبار التحصيل إنما ترجع إلى اختلاف الطلاب فى الذكاء كما يقاس باختبار الذكاء . ويسمى أحيانا المقدار ر٢ معامل التحديد Coeffcient of Determination أو التباين المشترك بين المتغيرين . لان قيمته تعبر عن ذلك الجزء من التباين فى أحد المتغيرين الذى يمكن تحديده أو التنبؤ به باستخدام المتغير الآخر . فإذا كان معامل الارتباط ر = ٨٠, . فإن ر٢ = ٦٤, . وهذا يعنى أن هناك تباينا مشتركا بين المتغيرين نسبته ٦٤٪ .

وإذا كانت ر = −١ فإن ر^{٢} = +١ ويكون هناك تباين مشترك بين المتغيرين نسبته ١٠٠٪ ، وإذا كانت ر = صفر فإن ر^{٢} = صفر ولا يكون هناك تباين مشترك بين المتغيرين .

ويمكن توضيح فكرة التباين المشترك بالرسم بأن نمثل كلا من المتغيرين بدائرة ، ويمثل الجزء من المساحة المحصورة بين الدائرتين (جزء التقاطع) بالتباين المشترك بين المتغيرين .

والأشكال الآتية رقم (٤٩) توضح التباين المشترك بين متغيرين — وهو الجزء المظلل — عندما تكون ر = صفر ، ٠,٣٠ ، ٠,٨٠ ، ٠,٩٠ ، ١,٠٠ .



شكل رقم (٤٩)

ويسمى المقدار ١-ر٢ بمعامل الاغتراب أو عدم التحديد Coefficient of Nondetermination لأن قيمته تعبر عن الجزء من التباين فى أحد المتغيرين الذى لا نستطيع التنبؤ به أو تحديده باستخدام المتغير الآخر .

ونظراً لأن قيمة ر تختلف عن قيمة ر٢ ، فإنه يجب على الباحث أن يحتاط عند تفسير قيمة معامل الارتباط بين متغيرين .

فمثلا إذا نظرنا إلى الجدول الآتى رقم (٣٣) :

معامل الارتباط (ر)	الجزء من التباين المشترك (ر٢)
٠,١٠	٠,٠١
٠,٢٠	٠,٠٤
٠,٣٠	٠,٠٩
٠,٤٠	٠,١٦
٠,٥٠	٠,٢٥
٠,٦٠	٠,٣٦
٠,٧٠	٠,٤٩
٠,٨٠	٠,٦٤
٠,٩٠	٠,٨١
١,٠٠	١,٠٠

جدول رقم (٣٣)
قيم ر٢ المناظرة لقيم ر المختلفة

نلاحظ أن معاملات الارتباط التى تتراوح بين ٠,١٠ ، ٠,٣٠ تبين أن جزءاً صغيراً من التباين فى ص يقترن بتباين س (١٪ إلى ٩٪) وفى الحقيقة أن معامل الارتباط ٠,٥٠ الذى يعتبره كثير من الباحثين فى العلوم السلوكية والتربوية معاملا مرتفعا ، يعنى أن ٢٥٪ من التباين فى المتغير ص يقترن بالتباين فى المتغير س . وهذا يعنى أيضا أن ٧٥٪ من التباين فى ص يقترن بعوامل

أخرى تختلف عن المتغير س . ومن هذا يتبين أن الباحث يحتاج إلى معامل ارتباط مقداره ٧١, . لكى يعتبر أن نصف التباين فى المتغير ص يقترن بالتباين فى المتغير س كما يتضح من الجدول السابق .

وسوف نناقش فكرة التباين المشترك بالتفصيل فى فصل قادم عند مناقشتنا لمفهومى الانحدار والتنبؤ .

العلاقة والعلية : Correlation and Causation

من الأخطاء الشائعة التى يمكن أن يقع فيها الباحث عند تفسيره لمعامل الارتباط — اعتبار أن معامل الارتباط المرتفع دليل على علاقة سببية أو علية أو علاقة أثر ونتيجة .

فمثلا ربما يقوم باحث بدراسة عادات الاستذكار لدى طلاب الكليات ويجد أن هناك معامل ارتباط سالب بين مقدار الزمن الذى يستغرقه الطالب فى الاستذكار وتقديره العام فى امتحانات آخر العام . فهنا لا يستطيع تفسير هذه النتيجة بأن سبب حصول الطلاب على تقديرات مرتفعة هو قلة الزمن الذى يقضونه فى الاستذكار .

ولكن ربما يمكنه القول بأنه كلما كان الطالب أكثر ذكاء قل الزمن الذى يستغرقه فى الاستذكار عن الطالب الأقل ذكاء .

أو ربما يجد باحث آخر معامل ارتباط مرتفع بين ذاكرة الأشكال وذاكرة الكلمات ولكن ليس هذا دليلا على أن أحدهما يسبب الآخر . إذ يمكن فى الحقيقة اعتبار أن عامل التذكر ربما يكون أحد العوامل العامة المسئولة عن مثل هذا الأداء التذكرى مهما اختلف شكله .

أو ربما يجد باحث علاقة بين درجات اختبار فى الذكاء ومقياس للأداء الحركى عند مجموعة من الأطفال مداها العمرى متسع . مثل هذه العلاقة ربما تكون

راجعة إلى أن اختبار الذكاء والقدرة الحركية كلاهما يرتبط بالعمر . فإذا عزلنا أثر العمر ربما نجد أن هذه العلاقة تنعدم .

فمعرفة مقدار واتجاه العلاقة بين متغيرين ليست كافية لاقتراح نوع من العلية المباشرة على هذه العلاقة . إذ أن هذا يتطلب دراسات تجريبية على المتغيرات . ولكن توجد حالات يحاول فيها الباحث استخدام معامل الارتباط بين متغيرين لاقتراح أن هناك تأثيرا سببيا أو تأثيرا له اتجاه معين . والمثال الشائع هو العلاقة بين تدخين السجائر والإصابة بسرطان الرئة . فقد استنتج الباحثون — على أساس منطقي — أن التدخين يسبب سرطان الرئة بدلا من استنتاجهم أن احتمال الإصابة بسرطان الرئة يسبب زيادة التدخين . ولكن من الممكن أن يكون هناك عوامل أخرى مثل العوامل الوراثية مثلا هي التي تسبب كلا من التدخين وسرطان الرئة . ولكي يعزل العلماء أثر هذه العوامل حاولوا التأثير المعملي على مجموعة من الفئران بغرض تكوين خلايا سرطانية عندهم ، واستطاعوا بذلك أن يؤكدوا للمتشككين أن العلاقة بين التدخين وسرطان الرئة هي علاقة سببية ، وليست علاقة ناتجة عن عامل ثالث غير معلوم .

وغاية القول أنه إذا ارتبط متغيران أ ، ب فإنه يمكن أن توجد ثلاث علاقات علية هي أن :

أ تسبب ب

ب تسبب أ

جـ تسبب كلا من أ ، ب

وسوف نناقش مشكلة التوصل إلى علاقات علية باستخدام مفهوم الارتباط والانحدار في أحد فصول الباب الثالث عن تحليل المسارات Path Analysis.

تمارين على الفصل السابع

١ — فيما يلى مجموعة من أزواج الدرجات فى متغيرين س ، ص :

س	٥	١٠	٢	٣	١	٢	٤	٨	٦	٩
ص	٩	٨	٦	٧	٢	٣	٦	٤	٦	٨

(أ) ارسم شكلا انتشارياً لهذه البيانات .

(ب) احسب معامل ارتباط بيرسون باستخدام الدرجات المعيارية .

(ج) فسر قيمة المعامل الناتج باستخدام مفهوم التباين المشترك .

٢ — فيما يلى مجموعة من أزواج القيم فى متغيرين س ، ص :

س	١	٤	٤	٥	٥	٦	٧	٨
ص	٩	٧	٨	٦	١	٦	٢	١

(أ) ارسم شكلا انتشارياً لهذه البيانات

(ب) هل العلاقة بين س ، ص خطية ؟

(ج) احسب معامل ارتباط بيرسون باستخدام الدرجات المعيارية مرة وباستخدام الدرجات الخام مرة أخرى ، وقارن بين النتيجتين .

(د) فسر قيمة معامل الارتباط الناتج .

٣ — إذا أعطيت البيانات الآتية لدرجات متغيرين س ، ص ، وكذلك $د_س$ ، $د_ص$ ، أى الدرجات المعيارية المناظرة لكل قيمة من قيم س ، ص ، وكذلك س + ٢ ، أى قيم س بعد إضافة ٢ إلى كل منهما :

س	ص	دس	دص	س + ٢
٢	٢	١,٥ —	١,٥ —	٤
٤	٦	٠,٥ —	٠,٥ +	٦
٥	٥	صفر	صفر	٧
٦	٤	٠,٥ +	٠,٥ —	٨
٨	٨	١,٦ +	١,٥ +	١٠

احسب :

(أ) معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص

(ب) معامل ارتباط بيرسون بين دس ، دص .

(ج) معامل ارتباط بيرسون بين س ، س + ٢ .

(د) معامل ارتباط بيرسون بين ص ، ص + ٢

(ه) معامل ارتباط بيرسون بين دس ، ص

(و) معامل ارتباط بيرسون بين دص ، س

(ل) قارن بين قيم معاملات الارتباط الناتجة من (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) (ه) ، وعلل تساوى أو اختلاف هذه القيم .

٤ — ما قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص اللازمة لكى يعتمد ٧٥٪ من تباين س على تباين ص ؟

٥ — أوجد معامل الارتباط للبيانات الآتية باستخدام طريقة الانحرافات :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٢	١	٤	٥	٣

٦ — أوجد معامل الارتباط بين أزواج الدرجات الآتية :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٤	٣	٢	١	٣	٣	٤

هل ه يعد استخداماً مناسباً لمعامل الارتباط ؟

٧ — فيما يلي مجموعة من أزواج الدرجات :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٢	١	٣	٤	١١	٩

فإذا كان توزيع المتغير س متماثلا ، وتوزيع المتغير ص ملتويا . احسب معامل الارتباط بين س ، ص . ما هي أكبر قيمة يصل إليها معامل الارتباط بين س ، ص ؟ وما هي أقل قيمة ؟

٨ — طبق باحث اختباراً تحصيليا على مجموعة مكونة من ١٣ تلميذاً لقياس مهاراتهم في إجراء العمليات الحسابية البسيطة المرتبطة بالجمع . وقد قسم الاختبار إلى نصفين متكافئين تقريبا . وفيما يلي البيانات التي حصل عليها بالنسبة لنصفي الاختبار :

	النصف الأول	النصف الثاني
متوسط الدرجات	٥	٧
الانحراف المعياري	٢	٤

ومجموع حاصل ضرب انحرافات درجات كل تلميذ عن المتوسط في كل من نصفي الاختبار ٢٦ .

(أ) أوجد معامل الارتباط بين نصفي الاختبار .

(ب) فسر قيمة معامل الارتباط الناتجة .

٩ — فيما يلى الزمن بالدقائق الذى استغرقه طالب فى تعلم قائمتين من الكلمات الفرنسية إحداهما فى الصباح والأخرى فى المساء .

الصباح (س)	المساء (ص)	الصباح (س)	المساء (ص)	الصباح (س)	المساء (ص)
١٥	١٦	٢١	٢٠	١٨	٢٧
٢١	٢٨	١٧	١٥	٢٢	٢٨
١٧	٢٢	٢١	٢٩	٢٧	٢٥
٢٣	٢٣	٢٢	١٨	١٩	١٨
٢٣	١٧	١٨	٢١	٢٣	٢٢
١٢	١٧	٢٥	٢٣	١٤	٢٢
٢٨	٢٥	١٣	١٩	٢٦	٢٦
٢٣	٢٦	٢٠	٢٤	٢٤	٢١
١٦	٢٤	١٦	٢٦	١٩	٢٣
٢٥	٢٩	٢٤	٢٥		
٢٢	٢١				

(أ) كون جدولا تكراريا مزدوجا لهذه الدرجات مستخدما الفئات الآتية:

١٠ — ١٤ ، ١٥ — ١٩ ، ٢٠ — ٢٤ ، ٢٥ — ٢٩ لكل من س ، ص .

(ب) احسب قيمة معامل الارتباط بين س ، ص للبيانات المجمعة التى حصلت عليها فى (أ) .

(جـ) أوجد قيمة معامل الارتباط بعد تصحيحه من الخطأ الناتج عن التجميع ، وفسر القيمة الناتجة .

١٠ — احسب معامل الارتباط للبيانات المجمعة الآتية ، حيث س ، ص ترمزان للطول بالسنتيمتر والوزن بالكيلو جرام لمجموعة من الطلاب على الترتيب .

الطول بالسنتيمتر (س)

الوزن بالكيلو جرام (ص)	٦٠ — ٦٢	٦٣ — ٦٥	٦٦ — ٦٨	٦٩ — ٧١	٧٢ — ٧٤	٧٥ — ٧٧
١١٠ — ١٢٩	٢	٣	١			
١٣٠ — ١٤٩		١	٤	١		
١٥ — ١٦٩		١	٣	٥	١	
١٧٠ — ١٨٩			٢	٦	٣	١
١٩٠ — ٢٠٩			١	٥	٤	١
٢١٠ — ٢٢٩				١	٣	
٢٣٠ — ٢٤٩					١	١

١١ — فيما يلى توزيع تكرارى مزدوج لدرجات اختبارين س ، ص أحدهما فى اللغة الإنجليزية والآخر فى الإحصاء .

درجات الاختبار (س)

درجات الاختبار (ص)	١ — ٢٠	٢١ — ٤٠	٤١ — ٦٠	٦١ — ٨٠	٨١ — ١٠٠
١ — ٢٠	١	٢	١		
٢١ — ٤٠		٤	٣	١	
٤١ — ٦٠		١	٥	٦	١
٦١ — ٨٠			٢	٣	٣
٨١ — ١٠٠			١	٢	٤

(أ) أوجد معامل الارتباط بين س ، ص .

(ب) فسر معامل الارتباط الذى حصلت عليه .

(ح) هل من الضرورى تصحيح معامل الارتباط من الخطأ الناتج عن التجميع؟ ولماذا ؟

(د) ما عدد الطلاب الذين حصلوا على الدرجات ٤١ — ٦٠ فى اختبار اللغة الإنجليزية وفى نفس الوقت حصلوا على الدرجات ٦١ — ٨٠ فى اختبار الإحصاء ؟

(هـ) ما نسبة الطلاب الذين حصلوا على درجات تقل عن ٦٠ فى الاختبار (س) ؟

(و) ما عدد الطلاب الذين حصلوا على درجات أعلى من ٦٠ فى الاختبار (س) بينما تقل درجاتهم عن ٨٠ فى الاختبار (ص) ؟

الفصل الثامن

مقاييس العلاقة إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الاسمي

- معامل التنبؤ غير المتماثل لجتمان .
- معامل التنبؤ المتماثل لجتمان
- معامل الاقتران ليول
- معامل التجميع ليول
- معامل الاقتران لبيرسون
- معامل الاقتران لتشوبرو

مقدمة :

عرضنا فى الفصل السابع أحد المقاييس الإحصائية الهامة التى تستخدم فى إيجاد العلاقة بين متغيرين تم قياس كل منهما على ميزان فترى أو نسبى ، وهذا المقياس الإحصائى هو معامل ارتباط بيرسون .

وهنا يجدر بالباحث أن يتذكر التمييز الذى عرضناه فى الفصل الأول بين أنواع موازين أو مستويات القياس Scales of Measurement وهى الميزان الاسمى ، والميزان الرتبى ، والميزان الفترى ، والميزان النسبى فاختلاف موازين قياس المتغيرات يؤدى بالضرورة إلى اختلاف طرق إيجاد معاملات الارتباط ، وبعض هذه الطرق يمكن أن تشتق مباشرة من معامل ارتباط بيرسون ، والبعض الآخر يعتمد على طرق إحصائية أخرى . وهذه الطرق المختلفة لإيجاد معاملات الارتباط تستخدم فى الحالات الآتية :

١ — إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الاسمى .

٢ — إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الرتبى .

٣ — إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الاسمى ، والآخر من المستوى الرتبى .

٤ — إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الاسمى ، والآخر من المستوى الفترى أو النسبى .

٥ — إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الرتبى والآخر من المستوى الفترى .

٦ — إذا كان أحد المتغيرين أو كلاهما من النوع الثنائى Dichotomous .

وسوف نعرض لكل حالة من هذه الحالات بالتفصيل فى فصل مستقل من حيث الطرق المختلفة لإيجاد مقاييس العلاقة أو الاقتران ، وتفسير واستخدامات هذه المقاييس . لذلك سنقتصر فى هذا الفصل على مناقشة بعض طرق إيجاد معاملات الارتباط أو درجة الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الاسمى . وسنبدأ بمناقشة أهم هذه المعاملات ، وهو معامل التنبؤ الذى ينسب إلى جتمان Guttman's Coefficient of Predictibility.

وترجع أهمية هذا المعامل إلى أنه لا يضع قيوداً على عــدد الأقسام Categories التى يشتمل عليها الميزان الاسمى لكل من المتغيرين ، كما لا يتطلب فروضاً معينة عن توزيع كل من المتغيرين ، بالإضافة إلى أنه من السهل تفسيره تفسيراً مباشراً .

ومن الأمور المعروفة فى الإحصاء أن كل مقياس إحصائى له رمز اصطلح عليه ليشير إلى المقياس . ولكن معامل التنبؤ لجتمان ليس له رمز متفق عليه ، فأحيانا يرمز له بالحرف الإنجليزى G وأحيانا يكتب g ، ولكن كثير من مراجع الإحصاء الحديثة أصبحت ترمز له بالحرف اليونانى λ وتقرأ (لمبدا) . ولذلك سنلتزم بهذا الحرف فى هذا الكتاب تمشيا مع هذه المراجع .

معامل التنبؤ لجتمان :

(أولا) معامل التنبؤ غير المتماثل ($\lambda_{ع}$) :

يرى جتمان Guttman أنه يمكن اعتبار الاقتران بين متغيرين هو مشكلة تخمين . فإذا اقترن متغير بمتغير آخر فإن هذا يعنى أنه يمكن تخمين قيم أحد المتغيرين إذا علمنا قيم المتغير الآخر . وقيمة معامل الاقتران أو الارتباط تلخص الدرجة التى تسهم بها معرفتنا لقيم أحد المتغيرين فى تخمين قيم المتغير الآخر . فإذا أدت هذه المعرفة إلى التخمين بدرجة تامة من الثقة فإن قيمة هذا المعامل تساوى

الواحد الصحيح . أما إذا لم يكن لهذه المعرفة أي فائدة على الإطلاق في مثل هذا التخمين فإن قيمة هذا المعامل تساوي الصفر . أي أن زيادة قيمة معامل الاقتران أو الارتباط بين متغيرين يعني زيادة قدرتنا على التخمين الدقيق لقيم أحد المتغيرين على أساس معرفتنا لقيم المتغير الآخر .

ومعامل التنبؤ لجتمان (λ) يتفق وهذا الشرط . فهو معامل يدل على درجة الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الاسمي (التصنيفي) .

ولكي نوضح للباحث الأساس المنطقي الذي بني عليه هذا المعامل يعرض عرضها في المثال الآتي :

نفترض أننا طلبنا من ٥٠ طالبا في إحدى الكليات أن يجيبوا على سؤال يتضمن مشكلة من مشكلات مادة المنطق ، وبعد تقدير درجة كل منهم على السؤال حصلنا على النتائج الآتية :

عدد الإجابات الصحيحة	=	٣٠
عدد الإجابات الخاطئة	=	٢٠
المجموع الكلي	=	٥٠

ونفترض أنه قد طلب منا أن نخمن أفضل تخمين عن أداء أو إجابة هذه المجموعة من الطلاب ككل ، أي تخمين ما إذا كانت الإجابة الشائعة صحيحة أم خطأ . فنظراً لأن هذه البيانات من المستوى الاسمي ، فإن المنوال يمثل أفضل تخمين في هذه الحالة . ويمكن أن يتضح ذلك إذا قارنا بين كل من التخمينين المحتملين .

فإذا نحن أخذنا أن كل طالب في المجموعة أجاب إجابة صحيحة على السؤال (على أساس أن هؤلاء الطلاب يمثلون المجموعة المنوالية) فإن ذلك يعني أنه يوجد عدد قدره ٢٠ من التخمينات غير الصحيحة من بين ٥٠ تخمينا .

أما إذا اختار أحدنا أن يخمن أن جميع الطلاب أجابوا إجابة خطأ على السؤال (وهؤلاء يمثلون المجموعة غير المنوالية) فإن هذا يعنى أنه يوجد عدد قدره ٣٠ من التخمينات غير الصحيحة من بين ٥٠ تخمينا .

ومن هذا يتضح أن التخمين الخاص بالمجموعة المنوالية يؤدى إلى أخطاء أقل في التخمين .

فإذا كان التخمين فى هذا المثال هو أن جميع الطلاب أجابوا إجابة صحيحة ، فإن ترجيح الخطأ فى التخمين يكون ٢٠ : ٥٠ . ويمكن أن نطلق على متغير الإجابة على سؤال المنطق اسم « المتغير التابع » .

والآن نفترض أننا استطعنا الحصول على بعض معلومات عن كل طالب فى فى المجموعة السابقة فى متغير آخر وليكن « الخبرة السابقة فى الرياضيات » . ويمكن أن نطلق على هذا المتغير اسم « المتغير المستقل » لأننا سوف نستخدمه فى محاولة تخمين قسمى المتغير التابع .

فإذا افترضنا أن ٢٥ طالبا منهم قد سبق لهم دراسة الرياضيات ، أما بقيتهم فلم يسبق لهم دراستها ، وأمكننا تكوين جدول الاقتران الآتى (جدول رقم ٢٤):

الإجابة على سؤال المنطق

المجموعة	صحيحة	خطأ	المجموع الكلى
طلبة درسوا الرياضيات	٢٢	٣	٢٥
طلبة لم يدرسوا الرياضيات	٨	١٧	٢٥
المجموع الكلى	٣٠	٢٠	٥٠

جدول رقم (٣٤)
جدول اقتران بين متغيرين من المستوى الاسمى

فباستخدام البيانات الموضحة فى هذا الجدول يمكننا أن نصل إلى تخمينات تختلف عن التخمينات التى توصلنا إليها فى حالة المتغير الواحد فيما يتصل بأداء أو إجابة الطلاب على سؤال المنطق لأننا سنأخذ فى اعتبارنا المتغير الجديد وهو « خبرة الطلاب السابقة فى الرياضيات » . وقد قسمنا الطلاب إلى مجموعتين إحداهما درست الرياضيات والأخرى لم تدرسها ، ومن ثم يمكن تخمين أداء كل من المجموعتين على حدة فى سؤال المنطق . فإذا كان هناك اقتران بين الخبرة السابقة فى الرياضيات والإجابة على سؤال المنطق فإن هذا سيجعل أخطاء التخمين أقل منها فى حالة عدم وجود اقتران بينهما .

وإذا نظرنا إلى الجدول السابق (جدول رقم ٣٤) نجد أن ٢٢ طالباً من بين الطلاب الذين لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات أجابوا إجابة صحيحة على سؤال المنطق ، بينما أجاب ٣ طلاب إجابة خطأ .

لذلك فإننا نستطيع التخمين بأن هذه المجموعة من الطلاب الذين بلغ عددهم ٢٥ قد أجابت إجابة صحيحة على سؤال المنطق . ويكون ترجيح خطأ التخمين عندئذ ٣ : ٢٥ .

أما بالنسبة للطلاب الذين ليس لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات فإن الإجابة الخطأ على سؤال المنطق هى الإجابة الشائعة . لذلك فإننا نستطيع التخمين بأن هذه المجموعة من الطلاب الذين بلغ عددهم ٢٥ قد أجابت إجابة خطأ على سؤال المنطق ، ويكون ترجيح خطأ التخمين فى هذه الحالة ٨ : ٢٥ .

وقد لاحظنا فيما سبق أن ترجيح خطأ تخمين الأداء فى سؤال المنطق للمجموعتين معا دون أن نأخذ فى اعتبارنا خبرتهم السابقة فى الرياضيات كانت ٢٠ : ٥ . ولكن عندما أخذنا هذا المتغير الجديد فى الاعتبار أصبح ترجيح الخطأ ٣ : ٢٥ بالنسبة للطلاب الذين لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات ، ٨ : ٢٥ بالنسبة للطلاب الذين ليس لديهم هذه الخبرة .

وبذلك يصبح ترجيح خطأ التخمين للمجموعتين معا ١١ : ٥٠ ، أى أن التنبؤ بأداء الطلاب فى سؤال المنطق اعتماداً على متغير « الخبرة السابقة فى الرياضيات » قد جعل أخطاء التخمين تقل من ٢٠ إلى ١١ .

ويمكننا أن نحسب النسبة بين هذا النقص فى خطأ التخمين إلى الخطأ الأصلى ، أى :

$$\frac{\text{مقدار النقص فى الخطأ}}{\text{مقدار الخطأ الأصلى}}$$

وهو فى هذه الحالة $= \frac{٢٠ - ١١}{٢٠} = \frac{٩}{٢٠} = ٠,٤٥$

وهذا يعنى أنه يمكن أن نقلل خطأ تخمين أداء الطلاب فى سؤال المنطق بقدر ٤٥ ٪ إذا أخذنا فى اعتبارنا خبرتهم السابقة فى الرياضيات .

وهذا هو مقياس الاقتران الأول بين المتغيرين .

ويجب أن يلاحظ الباحث أننا اقتصرنا على مشكلة تخمين أداء الطلاب فى سؤال المنطق اعتمادا على خبرتهم السابقة فى الرياضيات .

ولكن ربما نهتم أيضاً بالتنبؤ العكسى ، أى تخمين ما إذا كان الطلاب لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات (وهو المتغير التابع فى هذه الحالة) اعتمادا على معرفتنا بأدائهم فى سؤال المنطق (وهو المتغير المستقل الجديد) . ولإجراء ذلك يجب أن نوجد مقدار الخطأ فى تخمين خبرة الطلاب السابقة فى الرياضيات دون اعتبار لأدائهم فى سؤال المنطق .

فإذا نظرنا إلى جدول رقم (٣٤) نلاحظ أنه من بين ٥٠ طالبا يوجد ٢٥ طالبا لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات ، ولذلك إذا أردنا تخمين ما إذا كان هؤلاء الطلاب لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات فإن ترجيح خطأ التخمين يكون ٢٥ : ٥٠ ، وربما تقل نسبة هذا الخطأ إذا أخذنا فى اعتبارنا الأداء فى سؤال المنطق .

فبالنسبة للطلاب الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال المنطق ربما نخمن أن لديهم جميعا خبرة سابقة فى الرياضيات ، ويكون ترجيح خطأ التخمين فى هذه الحالة ٨ : ٣٠ .

أما بالنسبة للطلاب الذين أجابوا إجابة خطأ على سؤال المنطق فربما نخمن أنهم ليس لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات ، ويكون ترجيح خطأ التخمين فى هذه الحالة ٣ : ٢٠ .

أى أننا عندما أخذنا الأداء فى سؤال المنطق فى الاعتبار قلت أخطاء تخمين متغير الخبرة السابقة فى الرياضيات من ٢٥ إلى ١١ .

$$\text{أى أن النسبة فى هذه الحالة} = \frac{\text{مقدار النقص فى الخطأ}}{\text{مقدار الخطأ الأصلى}}$$

$$= \frac{٢٥ - ١١}{٣٥}$$

$$= \frac{١٤}{٢٥} = ٠,٥٦$$

وهذا هو مقياس الاقتران الثانى بين المتغيرين ، ويرمز لأى من هذين المقياسين بالرمز λ غ . وقيمة كل منهما تعبر عن درجة تخمين قسم ما من أقسام أحد المتغيرين بمعلومية أقسام المتغير الآخر ، وهو مقياس غير متماثل ، أى أن التخمين يكون فى اتجاه واحد ، بمعنى أننا إذا خمنا أحد أقسام المتغير ا بمعلومية أقسام المتغير ب فإننا لا نستطيع فى نفس الوقت تخمين أحد أقسام المتغير ب بمعلومية أقسام المتغير ا .

(ثانياً) معامل التنبؤ المتماثل λ :

أحيانا يود الباحث أن يحصل على معامل تنبؤ متماثل ، أى معامل يسمح بالتنبؤ المتبادل بين متغيرين .

ويمكن أن يوجد ذلك المعامل عن طريق ضم معاملى التنبؤ غير المتماثلين اللذين عرضنا لهما فيما سبق فى معامل واحد ، ويرمز له عندئذ بالرمز λ .

. نسبة خطأ التخمين فى هذه الحالة

$$= \frac{\text{مقدار النقص فى الخطأ فى الاتجاهين معاً}}{\text{مقدار الخطأ الأصلى فى الاتجاهين معاً}}$$

ففى المثال السابق نجد أن هذه النسبة

$$= \frac{(٢٠ - ١١) + (٢٥ - ١١)}{٢٠ + ٢٥}$$

$$= \frac{٩ + ١٤}{٤٥} = \frac{٢٣}{٤٥} = ٠,٥١$$

أى أن معامل التنبؤ فى هذه الحالة = ٠,٥١ .

وبهذا نكون قد قللنا أخطاء تخمين أى من المتغيرين باستخدام المتغير الآخر بقدر ٥٢ ٪ .

أما إذا استطعنا استبعاد أخطاء التخمين كلية فإن هذه النسبة تصبح :

$$\frac{(٢٠ \quad \text{صفر}) + (٢٥ - \text{صفر})}{٢٠ + ٢٥} = \frac{٤٥}{٤٥} = ١$$

أى أن معامل الاقتران بين المتغيرين يكون تاماً . وإذا لم نستطع استبعاد أى خطأ فى التخمين فإن هذه النسبة تصبح :

$$\frac{(٢٠ - ٢٠) + (٢٥ - ٢٥)}{٢٠ + ٢٥} = \frac{\text{صفر}}{٤٥} = \text{صفر}$$

أى أنه لايوجد فى هذه الحالة اقتران بين المتغيرين .

وهذا يدل على أنه كلما زادت قيمة معامل التنبؤ نقص أخطاء التخمين .

الصورة العامة لحساب معامل التنبؤ غير المتماثل (λغ) :

يتضح مما سبق أن معامل التنبؤ لجتمان ليس معاملا واحدا وإنما هو فى الحقيقة معاملين أحدهما غير متماثل ويرمز له بالرمز λغ ، ويستخدم عندما يريد الباحث تخمين أحد أقسام متغير بمعلومية أقسام متغير آخر ، أى أن التخمين يكون فى اتجاه واحد ، والآخر متماثل ويرمز له بالرمز λ ، ويستخدم عندما يريد الباحث تخمين أحد أقسام متغير بمعلومية أقسام متغير آخر والعكس . أى أن التخمين يكون فى كلا الاتجاهين .

ويمكن حساب قيمة λغ أو λ باستخدام الطريقة التى سبق أن ذكرناها .
أو يمكن استخدام الصورة الرياضية العامة الآتية لإيجاد قيمة λغ وهى :

$$\lambda_{\text{غ}} = \frac{\text{مجـ}\ \text{ت}_{\text{م}} - \text{ت}_{\text{ت}}}{\text{ن} - \text{ت}_{\text{ت}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (١)$$

حيث $\text{ت}_{\text{م}}$ = أكبر تكرار فى كل قسم من أقسام المتغير المستقل .

$\text{ت}_{\text{ت}}$ = أكبر مجموع من بين مجاميع أقسام المتغير التابع .

ن = عدد الحالات .

ويمكننا تطبيق هذه الصورة على البيانات الموضحة فى الجدول رقم (٣٤) لتخمين الأداء فى سؤال المنطق الجزئى فى اعتبارنا خبرة الطلاب السابقة فى الرياضيات .

وهذا يتطلب إيجاد قيمة مجـ $\text{ت}_{\text{م}}$ بأن نجمع أكبر تكرار بالنسبة للطلاب

الذين لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات (وهو ٢٢) على أكبر تكرار بالنسبة للطلاب الذين ليس لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات (وهو ١٧) .

أى أن : مجـ ت$_م$ = ٢٢ + ١٧ = ٣٩ .

كما يجب أن نحصل على قيمة ت$_ت$ بأن نوجد مجموع الطلاب الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال المنطق (وهو ٣٠) ، ومجموع الطلاب الذين أجابوا إجابة خطأ على السؤال (وهو ٢٠) ونختار أكبر المجموعين .

أى أن ت$_ت$ = ٣٠ .

وبالطبع ن = ٥٠ .

وبالتعويض فى الصورة رقم (١) السابقة نجد أن :

$$\lambda_{غ} = \frac{٣٩ - ٣٠}{٥٠ - ٣٠} = \frac{٩}{٢٠} = ٠,٤٥ .$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها سبق .

ويمكننا أيضا تخمين ما إذا كان الطلاب لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات بمعلومية أدائهم فى سؤال المنطق . فى هذه الحالة نوجد مجـ ت$_م$ بأن نجمع أكبر تكرار بالنسبة للطلاب الذين أجابوا إجابة صحيحة على سؤال المنطق (وهو ٢٢) على أكبر تكرار للطلاب الذين أجابوا إجابة خطأ على السؤال (وهو ١٧) .

أى أن : مجـ ت$_م$ = ٢٢ + ١٧ = ٣٩ .

أما ت$_ت$ فنحصل عليها بأن نوجد مجموع الطلاب الذين لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات (وهو ٢٥) ، ومجموع الطلاب الذين ليس لديهم خبرة سابقة فى

الرياضيات (وهو ٢٥) ونختار أكبر المجموعين ، ونظراً لأنهما متساويان فإن $ت_ت = ٢٥$.

وبالتعويض فى الصورة رقم (١) نجد أن :

$$\lambda_{غ} = \frac{٣٩ - ٢٥}{٥٠ - ٢٥} = \frac{١٤}{٢٥} = ٠,٥٦$$

وهى أيضاً نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

ومن هذا نلاحظ أن معرفتنا بأداء الطلاب فى سؤال المنطق يساعدنا على تخمين ما إذا كان لديهم خبرة سابقة فى الرياضيات أم لا بدرجة أفضل من تخمين أدائهم فى سؤال المنطق بمعلومية خبرتهم السابقة فى الرياضيات .

الصورة العامة لحساب معامل التنبؤ المتماثل (λ) :

يمكننا أيضاً للتبسيط استخدام الصورة العامة الآتية لحساب معامل التنبؤ المتماثل (λ) وهى :

$$\lambda = \frac{مجـ ت_{ف} + مجـ ت_{ع} - (ت'_{ف} + ت'_{ع})}{٢ن - (ت'_{ف} + ت'_{ع})} \quad \cdots (٢)$$

حيث $ت_{ف}$ = أكبر تكرار فى كل صف .

، $ت_{ع}$ = أكبر تكرار فى كل عمود .

، $ت'_{ف}$ = أكبر مجموع من بين مجاميع كل صف .

، $ت'_{ع}$ = أكبر مجموع من بين مجاميع كل عمود .

، ن = عدد الحالات .

ويمكن تطبيق هذه الصورة على البيانات الموضحة في الجدول رقم (٣٤) كالآتي :

$\text{مج}\ \bar{\text{ت}}_{\text{ف}}$ = مجموع أكبر تكرار في الصفين الأول والثاني .

$= ٢٢ + ١٧ = ٣٩$

، $\text{مج}\ \bar{\text{ت}}_{\text{ع}}$ = مجموع أكبر تكرار في العمودين الأول والثاني .

$= ٢٢ + ١٧ = ٣٩$

، $\bar{\text{ت}}_{\text{ف}}$ = أكبر مجموع من بين مجاميع الصفين الأول والثاني .

$= ٢٥$

، $\bar{\text{ت}}_{\text{ع}}$ = أكبر مجموع من بين مجاميع العمودين الأول والثاني .

$= ٣٠$

، ن = ٥٠

بالتعويض في الصورة رقم (٢) السابقة نجد أن :

$$\lambda_{\text{ع}} = \frac{٣٩ + ٣٩ - (٢٥ + ٣٠)}{٢\,(٥٠) - (٢٥ + ٣٠)}$$

$$= \frac{٧٨ - ٥٥}{١٠٠ - ٥٥} = \frac{٢٣}{٤٥} = ٠{,}٥١١$$

أي أن معرفتنا بتكرار الحالات في كل قسم من أقسام أي من المتغيرين أدى

إلى نقص أخطاء تخمين أحدهما بمعلومية الآخر بقدر ٥١,١ ٪ فى العينة موضع البحث .

وهذا يدل على أن هناك علاقة أو اقترانا بين متغير الأداء فى سؤال المنطق ومتغير الخبرة السابقة فى الرياضيات فى عينة البحث .

والخلاصة أنه إذا أراد الباحث إيجاد قيمة $\lambda_{غ}$ أو λ لمتغيرين من المستوى الإسمى يمكنه أن يتبع الخطوات الآتية :

١ — يرتب التكرارات الملاحظة بالنسبة للمتغيرين فى جدول اقتران .

٢ — إذا كان المطلوب تخمين أحد أقسام متغير بمعلومية أقسام المتغير الآخر ، أى أن التنبؤ يكون فى اتجاه واحد ، فإنه يجب أن يوجد قيم مجـ $ت_م$ ، $ت_ت$ ، ن ثم يطبق الصورة رقم (١) لإيجاد قيمة $\lambda_{غ}$.

٣ — إذا كان المطلوب تخمين أحد أقسام متغير بمعلومية المتغير الآخر والعكس ، أى أن التنبؤ يكون فى الاتجاهين ، فإنه يجب أن يوجد قيم مجـ $ت_ف$ ، مجـ $ت_ع$ ، $تَ_ف$ ، $تَ_ع$ ، ن ، ثم يطبق الصورة رقم (٢) لإيجاد قيمة λ .

مقاييس إحصائية أخرى :

توجد مقاييس إحصائية متعددة لحساب مقدار اقتران متغيرين من المستوى الاسمى . ويجد الباحث كثيراً من هذه الطرق عند إطلاعه على الدراسات والبحوث النفسية والتربوية ، ومن بين هذه المقاييس :

١ — معامل الاقتران الذى ينسب إلى يول Yule ويرمز له بالحرف الإنجليزى Q ، ويسهل حساب قيمة هذا المعامل وتفسيره . ولكن يقتصر استخدامه على متغيرين من النوع الثنائى ، أى يكون لكل متغير قيمتان فقط .

ويمكن للباحث الرجوع إلى Moroney عام ١٩٥٣ (انظر قائمة المراجع في نهاية الكتاب) لمزيد من توضيح هذا المعامل .

٢ — معامل التجميع Colligation الذى ينسب إلى يول Yule أيضاً ، ويرمز له بالحرف الإنجليزى Y . وهو يشبه معامل الاقتران Q ، ويقتصر استخدامه أيضاً على متغيرين من النوع الثنائي . ويمكن الرجوع إلى Kendall عام ١٩٥٠ لمزيد من التوضيح .

٣ — معامل الاقتران الذى ينسب إلى بيرسون Pearson ، ويرمز له بالحرف الإنجليزى C .

وبالرغم من إمكانية استخدام هذا المعامل عندما يشتمل كل من المتغيرين على أى عدد من الأقسام ، إلا أن هذا المعامل لا تصل قيمته إلى الواحد الصحيح حتى إذا كان هناك اقتران تام بين المتغيرين . ويمكن الرجوع إلى McNemar عام ١٩٥٥ أو Siegel عام ١٩٥٦ لمزيد من التوضيح .

٤ — معامل الاقتران الذى ينسب إلى تشوبرو Tschuprow ، ويرمز له بالرمز T .

وهو يشبه معامل الاقتران لبيرسون C ، ولكنه يختلف عنه فى أنه يمكن أن تصل قيمته إلى الواحد الصحيح فى حالة الاقتران التام ، وهذا يتطلب أن يتساوى عدد الصفوف والأعمدة فى جدول الاقتران .

ولمزيد من التوضيح يمكن للباحث الرجوع إلى Hagood عام ١٩٥٢ .

٥ — معامل فاى ويرمز له بالحرف اليونانى φ . (وأحياناً يرمز له بالرمز ر ٤) .

وهو يشبه معامل الاقتران φ ومعامل التجميع Y ، أى يستخدم فقط إذا

كان كل من المتغيرين من النوع الثنائى . كما أن قيمه لاتتراوح دائماً بين الصفر والواحد الصحيح .

٦ — معامل الارتباط الرباعى Tetrachoric Correlation ويرمز له بالرمز رر ، وهو يستخدم فقط إذا كان كل من المتغيرين من النوع الثنائى .

ويجب أن تحقق البيانات بعض الفروض إذا أراد الباحث استخدام هذا المعامل .

ونظراً لأهمية المقياسين الإحصائيين الأخيرين ، أى معامل فاى ومعامل الارتباط الرباعى ، فإننا سوف نعرض لهما بالتفصيل فى الفصل الثالث عشر الذى سنهتم فيه بمناقشة الاقتران بين متغيرين من النوع الثنائى .

من هذا يتضح أن هناك طرقاً متعددة لإيجاد الاقتران بين متغيرين من المستوى الأسمى . ومعظم هذه المعاملات الإحصائية تتراوح قيمها بين الصفر والواحد الصحيح ، ولكنها تختلف فى توزيع هذه القيم . أى أنه بالرغم من أنها جميعا تزيد قيمها بزيادة درجة الاقتران ، إلا أن معدل هذه الزيادة يختلف من معامل إلى آخر . ولذلك لايجوز أن يقارن الباحث بين قيمتى معاملى اقتران استخدم فى حسابهما طرقا مختلفة .

تمارين على الفصل الثامن

(١) أراد باحث إيجاد درجة الاقتران بين حدوث حالات الفصام والتحرك فى الوظائف لعينتين تتكون إحداهما من مجموعة من المرضى الفصاميين والأخرى من الأسوياء . وفيما يلى النتائج التى حصل عليها الباحث :

التحرك فى الوظائف

المجموعة	إلى أعلى	إلى أدنى	لايوجد تحرك	المجموع الكلى
الفصاميون	١٢	٤٣	٣٩	٩٤
الاسوياء	١٩	٢٢	٥٣	٩٤
المجموع الكلى	٣١	٦٥	٩٢	١٨٨

احسب باستخدام معامل التنبؤ لجتمان مقدار العلاقة بين هذين المتغيرين ، وفسر القيمة الناتجة .

٢ — أوجد معامل التنبؤ المتماثل لجتمان للبيانات الموضحة بالجدول الآتى ، وفسر القيمة الناتجة .

	أ١	أ٢	أ٣	أ٤	المجموع
ب١	صفر	٢	٣	٥	١٠
ب٢	٧	٦	١	١	١٥
ب٣	٣	٢	٦	٤	١٥
المجموع	١٠	١٠	١٠	١٠	

٣ — قام أحد الباحثين بدراسة إدراك المعلمين لتلاميذهم ، فاختار عينة عشوائية من تلاميذ الصف السادس . ثم طلب من أولياء أمور التلاميذ أن يختاروا من بين أقسام أربعة هى : ضعيف جدا ، ضعيف ، جيد ، ممتاز ، درجة إدراكهم لأبنائهم ، وحصل على النتائج الآتية :

تقديرات الآباء

تقديرات المعلمين	ضعيف جدا	ضعيف	جيد	ممتاز
ضعيف جداً	٤٣	٤٨	١١٣	٢٠٩
ضعيف	٤١	١٠٠	٢٠٢	٢٥٥
جيد	٣٩	٥٨	٧٠	٦١
ممتاز	١٧	١٣	٢٢	١٠

(ا) احسب مقدار العلاقة بين تقديرات الآباء و تقديرات المعلمين لهذه العينة من التلاميذ .

(ب) هل يمكن التنبؤ بتقديرات الآباء بمعلومية تقديرات المعلمين ؟ كيف ؟

(جـ) هل يمكن التنبؤ بتقديرات المعلمين بمعلومية تقديرات الآباء ؟ كيف ؟

(د) قارن بين النتيجتين اللتين حصلت عليهما فى ب ، جـ .

٤ — أوجد مقدار معامل التنبؤ غير المتماثل للبيانات الآتية :

	$س_1$	$س_2$
$ص_1$	٥٣	٢٧
$ص_2$	٤٧	٦٣

وبين هل القيمة الناتجة تشير إلى اقتران تنبؤى قوى بين كل من المتغيرين س ، ص؟ ولماذا ؟

* * *

الفصل التاسع

مقاييس العلاقة

إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الرتبي

معامل الاقتران لجودمان وكروسكال

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

معامل ارتباط الرتب لكندال

معامل الاتفاق لكندال

معامل الاتساق لكندال

مقدمة :

كثيراً ماتتجمع لدى الباحث في مواقف بحثية مختلفة بيانات تعتمد على الرتب أي من المستوى الرتبي . إذ ربما يكون متاحا لديه قياسات كمية ولكنه يفضل استبدال هذه القياسات الكمية بالرتب بهدف تبسيط العمليات الحسابية ، أو للتمكن من إجراء نوع معين من العمليات . فمثلا يمكن أن يحصل الباحث على قياسات لأطوال وأوزان مجموعة من أطفال المدارس الابتدائية ومن ثم يحسب معامل الارتباط من أزواج القياسات باستخدام معامل ارتباط بيرسون الذى عرضنا له فى الفصل السابع ولكنه ربما يفضل أن يستبدل هذه القياسات بالرتب ومن ثم يحسب معامل الارتباط بين أزواج الرتب بدلا من أزواج القياسات . إلا أنه فى كثير من الأحيان يستخدم الطرق التى تعتمد على الرتب عندما لا يكون متاحا لديه قياسات كمية . فعمليات القياس المستخدمة حينئذ لا تسمح بإجراء مقارنات بين الفترات المختلفة للقياسات . فمثلا ربما يقوم المشرفون على العمل بترتيب العمال بحسب أدائهم أو إنتاجهم فى العمل أو يقوم المعلمون بترتيب التلاميذ من حيث درجة تكيفهم الاجتماعى فى المدرسة . فى مثل هذه الحالات تشتمل البيانات على مجموعة من الأرقام أو الأعداد التى تدل على رتب العمال أو التلاميذ فى الخاصية المقدرة . فالعامل أو التلميذ الذى ترتيبه الأول يعطى له الرقم ١ ، والعامل أو التلميذ الذى ترتيبه الثانى يعطى له الرقم ٢ وهكذا . واستبدال الترتيب الأول أو الثانى أو الثالث ... الخ بالأعداد الكاردينالية Cardinal Numbers ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن يفترض فيه تساوى الفترات ، بمعنى أنه يفترض أن الفرق بين ترتيب الفرد الأول والفرد الثانى يساوى الفرق بين ترتيب الفرد الثانى والفرد الثالث وهكذا . وتعتمد جميع معاملات ارتباط الرتب على هذا الفرض .

ونظراً للصعوبات التى يواجهها كثير من الباحثين عند قياس المتغيرات

النفسية والتربوية فإن الطرق الإحصائية التي تستخدم في تحليل البيانات التي تعتمد على الرتب تكون ذات أهمية خاصة .

وبالرغم من أن طرق حساب معاملات ارتباط الرتب تستخدم منذ سنوات طويلة ، إلا أن استخدام الرتب بكثرة في المقاييس الإحصائية المتقدمة لم يبدأ إلا مؤخراً .

إذ يمكن استخدام الرتب مثلا في المقاييس الاحصائية الاستدلالية اللابارامترية التي سنعرض لها في الجزء الثاني من الكتاب .

ومما لا شك فيه أن طرق حساب معاملات ارتباط الرتب تقع ضمن المقاييس اللابارامترية ، وهي مقاييس لا تعتمد على خصائص المنحنى الاعتدالي ، كما لا تستلزم فروضا خاصة عن شكل توزيع الظاهرة في المجتمع الأصل .

ويوجد عدد من المقاييس الإحصائية التي تستخدم في إيجاد الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الرتبي . ومن بين هذه المقاييس التي سنعرض لها في هذا الفصل بالتفصيل مقياس الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال Goodman and Kruskal ، ومقياس ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman، ومقياس ارتباط الرتب لكندال Kendall ، ومقياس الاتفاق لكندال ، ومعامل الاتساق لكندال .

معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال :

Goodman and Kruskal's Coefficient of Ordinal As ociation

ناقشنا في الفصل الثامن مفهوم الاقتران بين متغيرين من المستوى الاسمي ، وقلنا أنه يمكن اعتبار الاقتران هو مشكلة تخمين قيم أحد المتغيرين بمعلومية قيم المتغير الآخر . في حالة المتغيرات التي من المستوى الاسمي أو النوعي نحاول

تخمين انتماء الفرد إلى مجموعة معينة بمعلومية انتمائه إلى مجموعة أخرى ، أى التنبؤ بقسم معين من أقسام أحد المتغيرات بمعلومية أقسام المتغير الآخر لأن الأقسام التى تشتمل عليها مثل هذه المتغيرات لا تتصف بخاصية الترتيب .

ويمكن أيضا اعتبار أن الاقتران بين متغيرين من المستوى الرتبى هو نوع من التخمين ، ولكن نظراً لأن الموازين التى من النوع الرتبى تتكون من فئات أو مجموعات مرتبة فإن طبيعة التخمين فى هذه الحالة يجب أن تناسب هذا النوع من الموازين . فهنا لا يكون اهتمامنا منصباً على تخمين انتماء الفرد إلى مجموعة معينة أو التنبؤ بأحد أقسام متغير ما وإنما نهتم بتخمين الترتيب . أى أن المشكلة هنا تتعلق بالتنبؤ بمركز الفرد النسبي أو ترتيبه بالنسبة لميزان رتبي معين بمعلومية مركزه النسبي أو ترتيبه بالنسبة لميزان رتبي آخر .

فإذا كان لجميع أفراد عينة البحث نفس الترتيب فى كل من متغيرين فإنه يقال أن هناك اقترانا تام بين المتغيرين . أما إذا كان ترتيب جميع الأفراد على المتغير الأول عكس ترتيبهم على المتغير الثانى ، أى أن الفرد الذى ترتيبه أعلى فى المتغير الأول يكون ترتيبه أدنى فى المتغير الثانى وهكذا ، فإنه يقال أنه يوجد اتفاق أو اقتران عكسى تام بين المتغيرين .

ويمكن فى أى من الحالتين السابقتين تخمين ترتيب الفرد فى أحد المتغيرين ، بمعلومية ترتيبه فى المتغير الآخر دون أن يكون هناك خطأ فى التنبؤ .

وتعتمد درجة التنبؤ أو الاقتران بين متغيرين من المستوى الرتبى على درجة الاتفاق أو عدم الاتفاق فى الرتب على كل من ميزانى المتغيرين . فالاتفاق التام أو عدم الاتفاق بالمرة يعتبر كل منهما اقترانا تاما ، إذ يؤدى كل منهما إلى معامل اقتران رتبى يساوى الواحد الصحيح . ولكن يجب أن نميز بين قيمة كل من المعاملين بأن نضع إشارة موجبة فى حالة المعامل الأول وإشارة سالبة فى حالة المعامل الثانى . أى أن معامل الاتفاق التام يساوى + ١ ، ومعامل الاتفاق

العكسي التام يساوى - ١ ، وجميع الترتيبات الأخرى تؤدى إلى قيم مطلقة أقل من الواحد الصحيح ، وكلما زادت هذه القيم عن الصفر بحيث تقترب من + ١ أو — ١ دل ذلك على زيادة الاقتران بين الرتب بالنسبة لكل من المتغيرين .

ويعتبر معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال Goodman and Kruskal من المقاييس الإحصائية الهامة التى يمكن أن يستخدمها الباحث إذا أراد إيجاد درجة الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الرتبي، ويرمز لهذا المعامل بالحرف اليونانى (γ) ويقرأ (جاما) .

طريقة حساب معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال إذا كانت الرتب غير مكررة :

نفترض أننا طلبنا من اثنين من المحكمين ترتيب خمسة طلاب من حيث نشاطهم الاجتماعى .

وفيما يلى تقديرات المحكمين :

الطالب	المحكم الأول (س)	المحكم الثانى (ص)
ا	٤	٥
ب	١	٢
جـ	٣	٣
د	٢	١
هـ	٥	٤

فالخطوة الأولى : هى أن نعيد ترتيب تقديرات المحكم الأول (س) ترتيبا تنازليا ، ونكتب الرتب المناظرة للمحكم الثانى (ص) كالآتى :

الطالب	المحكم الاول	المحكم الثانى
ا	٥	٤
ب	٤	٥
ج	٣	٣
د	٢	١
ه	١	٢

وبذلك يتضح أن تقديرات المحكم الثانى تميل إلى الاتفاق مع تقديرات المحكم الاول، ولكن الاتفاق غير تام . إذ لو كان هناك اتفاق تام بينهما لوجدنا أن تقديرات المحكم الثانى تكون مرتبة ترتيبا تنازليا مثل تقديرات المحكم الأول ، ولكننا هنا نجد أن الرتبة ١ التى قدرها المحكم الثانى للطالب د تقع أعلى الرتبة ٢ التى قدرها للطالب ه .

والخطوة الثانية : هي أن تكون جدولا نحدد فى أحد أعمدته الاختلافات بين الرتب التى قدرها المحكمان ، وتحدد فى عمود آخر الاتفاقات بين الرتب كالآتى :

الطالب	المحكم الأول (س)	المحكم الثانى (ص)	الاختلاف بين الرتب	الاتفاق بين الرتب
ا	٥	٤	صفر	صفر
ب	٤	٥	١	صفر
ج	٣	٣	صفر	٢
د	٢	١	صفر	٣
ه	١	٢	١	٣
المجموع			٢	٨

جدول رقم (٣٥)
الاختلاف والاتفاق بين رتب محكمين
لاربعة من الطلاب

ثم نبدأ من أسفل الجدول ونبحث عن الاختلافات بين الرتب التي قدرها المحكمان ، فلو بدأنا بالرتبة ٢ التي قدرها المحكم الثاني للطالب هـ نجد أنها تقع أسفل الرتبة ١ أي عكس الترتيب المعروض .

لذلك نضع ١ أمام الرتبة ٢ للطالب هـ دلالة على أنه توجد رتبة واحدة أقل منها تقع أعلاها . ثم نكرر هذه العملية بالنسبة لبقية الرتب متجهين من أسفل إلى أعلى الجدول .

فمثلا لا يوجد اختلاف بالنسبة للرتبتين ١ ، ٣ اللتين قدرهما المحكم الثاني لأنه لا توجد رتب أعلاهما أقل منهما، لذلك نضع الرقم صفر أمام كل منهما في العمود الرابع .

ولكن نضع ١ أمام الرتبة ٥ التي قدرها المحكم الثاني للطالب ب لأنه وجد رتبة واحدة أعلاها أقل منها . وبذلك يكون المجموع الكلي للاختلافات بين الرتب = ٢ .

والخطوة الثالثة : هي أن نحسب عدد الاتفاقات بين الرتب وندونها في العمود الخامس ويتم ذلك كالآتي :

ننظر إلى الرتب التي قدرها المحكم الثاني ، فإذا وجدنا أنه توجد رتبة أكبر تقع أعلى رتبة أصغر فإن معنى ذلك أن تقديراته تتفق مع تقديرات المحكم الأول .

ولذلك نبدأ بأول هذه الرتب من أسفل الجدول (وهي الرتبة ٢) ونوجد عدد الرتب التي تزيد عنها (وهي الرتب ٣ ، ٥ ، ٤) أي ٣ .

ثم ننتقل إلى الرتبة ٤ فنجد أن عدد الرتب التي تزيد عنها (وهي الرتب ٣ ، ٥ ، ٤) . أي ٣ أيضا .

أما بالنسبة للرتبة ٣ إن عـــدد الرتب التي تزيد عنها (وهما الرتبتان ٥ ، ٤) . أي ٢ .

وبالنسبة للرتبة ٥ . لا توجد رتب أعلاها تزيد عنها .

وبذلك يكون المجموع الكلي للاتفاقات بين الرتب

= ٣ + ٣ + ٢ = ٨

أي أننا نحصل على عدد الاختلافات أو الاتفاقات بين الرتب بعملية مقارنة كل رتبة في العمود الثالث بالرتب التي تقع أعلاها في نفس العمود .

ويجب ملاحظة أنه إذا كانت الرتب التي قدرها المحكم الثاني عكس الرتب التي قدرها المحكم الأول فإنه ينتج عن كل مقارنة اختلاف بين الرتب ولا يكون هناك اتفاق بين المحكمين .

ويوضح ذلك بالجدول الآتي (رقم ٣٦) :

الطالب	المحكم الأول	المحكم الثاني	الاختلاف بين الرتب	الاتفاق بين الرتب
ا	٥	١	صفر	صفر
ب	٤	٢	١	صفر
ﺣ	٣	٣	٢	صفر
د	٢	٤	٣	صفر
ﻫ	١	٥	٤	صفر
المجموع			١٠	صفر

جدول رقم (٣٦)

رتب المحكم الثاني عكس رتب المحكم الاول

كما يجب ملاحظة أن أكبر عدد ممكن من الاتفاقات أو الاختلافات بين الرتب يساوي العدد الكلي للاتفاقات مضافا إليه العدد الكلي للاختلافات . في المثال الأصلي وجدنا أن عدد الاختلافات = ٢ ، وعدد الاتفاقات = ٨ . وأكبر عدد ممكن من الاتفاقات والاختلافات = ٢ + ٨ = ١٠ .

والخطوة الرابعة : نطرح عدد الاتفاقات من عدد الاختلافات بين الرتب . فإذا كان عدد الاتفاقات أكبر من عدد الاختلافات فإن إشارة الفرق تكون موجبة ، أما إذا كان عدد الاتفاقات أقل من عدد الاختلافات فإن إشارة الفرق تكون سالبة . ومقدار هذا الفرق بصرف النظر عن إشارته يدل على مدى تغلب أى منهما على الآخر .

فإذا قسمنا هذا الفرق على القيمة القصوى له نحصل على معامل الاقتران الرتبى لجودمان وكروسكال . وهذا المعامل ينحصر بين — ١ ، + ١ ، ويمكن أن يساوى أياً من القيمتين .

ففى المثال السابق :

$$y = \frac{\text{عدد الاتفاقات — عدد الاختلافات}}{\text{عدد الاتفاقات + عدد الاختلافات}}$$

$$= \frac{٨ - ٢}{٨ + ٢} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦٠$$

ويمكن تفسير هذا المعامل بأن نقول أن الإتفاقات تزيد بنسبة ٦٠ ٪ عن الاختلافات بين الرتب التى قدرها المحكمان للطلاب الخمسة فى السمة المطلوبة .

وعندما تكون الرتب التى قدرها الحكم الأول متفقة تماما مع الرتب التى قدرها الحكم الثانى ، فإننا نحصل على عشرة اتفاقات ، ولا نجد أى اختلافات بين الرتب وبذلك تصبح :

$$y = \frac{١٠ - \text{صفر}}{١٠ + \text{صفر}} = \frac{١٠}{١٠} = ١,٠٠$$

أما إذا كانت الرتب التى قدرها الحكم الأول عكس الرتب التى قدرها الحكم الثانى تماما فإن :

$$y = \frac{١٠ - صفر}{١٠ + صفر} = \frac{١٠}{١٠} = ١,٠٠$$

وإذا كان عدد الاتفاقات مساوياً لعدد الاختلافات بين الرتب كما هو مبين بالجدول الآتى رقم (٣٧) فإن :

$$y = \frac{٥ - ٥}{٥ + ٥} = صفر$$

الطالب	المحكم الأول	المحكم الثانى	الاختلاف بين الرتب	الاتفاق بين الرتب
ا	٥	٤	صفر	صفر
ب	٤	٣	صفر	صفر
جـ	٣	١	صفر	صفر
د	٢	٢	١	١
هـ	١	٥	٤	٤
المجموع			٥	٥

جدول رقم (٣٧)

عدد الاتفاقات = عدد الاختلافات بين الرتب

لذا فإن معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال (y) هو معامل اقتران بين مجموعتين من الملاحظات المرتبة ، ويعتمد على الفرق المتبادل من حيث نسبة عدد الاتفاقات وعدد الاختلافات بين الرتب .

والصورة الرياضية التى يمكن استخدامها لإيجاد المعامل (y) إذا كانت الرتب غير مكررة هى :

$$y = \frac{ت_ق - ت_ف}{ت_ق + ت_ف} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١)$$

حيث $ت_{ق}$ = عدد الاتفاقات بين الرتب .

. $ت_{ف}$ = عدد الاختلافات بين الرتب .

طريقة حساب معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال إذا كانت بعض الرتب مكررة :

عندما يقوم أحد المحكمين بترتيب مجموعة من الأفراد بالنسبة لسمة أو صفة معينة فإنه ربما لا يكون قادراً فى جميع الأحوال على التمييز الدقيق بين بعض الأفراد فى هذه السمة أو الصفة فيضطر إلى أن يعين نفس الرتبة لأكثر من فرد منهم .

لذلك يجب التمييز بين البيانات التى لا تكون فيها الرتب مكررة ، والبيانات التى تكون فيها بعض الرتب مكررة عند استخدام معامل الاقتران الرتبى لجودمان وكروسكال (γ) شأنه شأن جميع معاملات ارتباط الرتب كما سنرى فيما بعد .

وفى الحقيقة أن الصورة الرياضية التى تستخدم فى إيجاد المعامل (γ) فى حالة وجود بعض الرتب المكررة هى نفس الصورة التى استخدمناها فى حالة الرتب غير المكررة . والفرق الوحيد هو أنه فى حالة وجود بعض الرتب المكررة يحسن اتباع طريقة أخرى لتحديد $ت_{ق}$ ، $ت_{ف}$ يوضحها تفصيلياً المثال الآتى :

لفرض أننا استطعنا ترتيب ٥٠ طالباً من حيث اتجاههم نحو إنفاق المال تبعاً لمستواهم الاجتماعى ، وهذه البيانات موضحة بجدول الاقتران الآتى رقم (٣٨) :

المستوى الاجتماعى	ترتيب الاتجاه نحو انفاق المال		
	كثير الانفاق (٢)	قليل الانفاق (١)	المجموع
مرتفع	٢	٣	٥
متوسط	١٥	٢٠	٣٥
منخفض	٨	٢	١٠
المجموع	٢٥	٢٥	٥٠

جدول رقم (٣٨)
جدول اقتران بين متغيرين

من هذا الجدول يتضح أن كلا من المتغيرين من المستوى الرتبي إلى حد ما وذلك بسبب وجود عدد من الرتب المكررة ، ومع هذا يمكن أن نحسب معامل الاقتران الرتبي بين هذين المتغيرين لتحديد درجة اقتران المستوى الاجتماعى للطلاب الحسين بالاتجاه نحو إنفاق المال باتباع الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : نوجد قيمة تـق كالآتى :

نضرب تكرار كل خلية من خلايا الجدول فى مجموع تكرارات الخلايا التى تقع أسفل تلك الخلية وإلى يسارها ، ونجمع حواصل الضرب الناتجة لنحصل على تـق .

فبالنسبة للخلية الأولى التى تكرارها ٢ نجد أن تكرارى الخليتين اللتين تقعان أسفلها وإلى يسارها هما ٢٠ ، ٢ . وبالنسبة للخلية التى تكرارها ١٥ نجد أن تكرار الخلية التى تقع أسفلها وإلى يسارها هى ٢ ، وبذلك يكون :

تـق = ٢ (٢٠ + ٢) + ١٥ (٢)
= ٧٤

والخطوة الثانية : نوجد قيمة $ت_ف$ كالآتى :-

نضرب تكرار كل خلية من خلايا الجدول فى مجموع تكرارات الخلايا التى تقع أسفلها وإلى يمينهـــا . ونجمع حواصل الضرب الناتجة لنحصل على $ت_ف$ فبالنسبة للخلية التى تكرارها ٣ نجد أن تكرارى الخليتين اللتين تقعان أسفلها وإلى يمينها هما ١٥ ، ٩ ، وبالنسبة للخلية التى تكرارها ٢٠ نجد أن تكرار الخلية التى تقع أسفلها وإلى يمينها هو ٨ .

وبذلك تكون $ت_ف$ = ٣ (١٥ + ٨) + ٢٠ (٨)

= ٢٢٩

والخطوة الثالثة : تطبيق الصورة الرياضية رقم (١) لإيجاد قيمة y كالآتى :

$$Y = \frac{ت_ق - ت_ف}{ت_ق + ت_ف}$$

$$= \frac{٧٤ - ٢٢٩}{٧٤ + ٢٢٩} = -\frac{١٥٥}{٣٠٣} = - ٠٫٥١$$

أى أن معامل الاقتران الرتبى = — ٥١ ,٠ والإشارة السالبة تدل على أن الاختلافات بين الرتب كانت هى الغالبة فى الاقتران . بمعنى أن الرتب المرتفعة فى أحد المتغيرين تميل إلى الاقتران بالرتب المنخفضة فى المتغير الآخر . وعلى وجه التحديد تزيد الاختلافات بين الرتب بنسبة ٥١ ٪ عن الاتفاقات بينها بالنسبة لهذين المتغيرين .

وبذلك يمكننا القول أنه كلما ارتفع المستوى الاجتماعى لهذه العينة ضعف اتجاههم نحو إنفاق المال . أو على العكس من ذلك كلما قوى اتجاه

أفراد العينة نحو إنفاق المال دل هذا على انخفاض المستوى الاجتماعى لهم .

والخلاصة أنه إذا أراد الباحث استخدام معامل الاقتران الرتبى لجودمان وكروسكال عليه أن يتبع الخطوات الآتية :

(١) يرتب الملاحظات بالنسبة لكل من المتغيرين س ، ص ترتيبا تصاعديا .

(٢) يحدد ما إذا كانت بعض الرتب مكررة فى أى من المتغيرين س ، ص .

(٣) إذا وجد أن جميع الرتب غير مكررة عليه أن يتبع الخطوات الآتية :

(ا) يرتب قائمة الأفراد الذين عددهم ن بحيث تظهر الرتب بالنسبة للمتغير س فى ترتيبها الطبيعى (من الأعلى إلى الأدنى) .

(ب) يحدد قيمة $ت_ق$ باستخدام رتب المتغير ص .

(ج) يحدد قيمة $ت_ف$ باستخدام رتب المتغير س .

(د) يطبق الصورة الرياضية رقم (١) الخاصة بحساب المعامل (y) .

(٤) إذا وجد أن بعض الرتب مكررة عليه أن يتبع الخطوات الآتية : -

(ا) يضع رتب كل من المتغيرين فى جدول اقتران .

(ب) يحدد التكرار فى كل خلية من خلايا الجدول .

(ج) يحدد قيمة $ت_ق$ باستخدام رتب المتغير ص .

(د) يحدد قيمة $ت_ف$ باستخدام رتب المتغير س .

(هـ) يطبق الصورة الرياضية رقم (١) الخاصة بحساب المعامل (y) .

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

Spearman's Rank Correlation Coefficient

يعتبر معامل ارتباط الرتب لسبيرمان حالة خاصة من معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون الذى عرضنا له فى الفصل السابع . ويستخدم معامل ارتباط الرتب لإيجاد درجة الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الرتبى . ويمكن حساب هذا المعامل بالتعويض عن الرتب بدلا من الدرجات فى صورة معامل ارتباط بيرسون . إلا أننا إذا وضعنا بعض القيود على البيانات وهى أن كل متغير يكون له ن من الرتب ، وأن هذه الرتب تتراوح بين ١ ، ن فإنه يمكن اشتقاق صورة أخرى يمكن باستخدامها تبسيط العمليات الحسابية .

وقبل أن نوضح كيفية اشتقاق صورة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان يجب أن نعرض بعض القواعد الجبرية الخاصة بالرتب .

تمثيل الرتب جبريا :

تمثل الرتب عادة بأعداد صحيحة مثل ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن . فإذا رمزنا لهذه الرتب بالرموز الجبرية $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . . ، $س_ن$ فإنه يمكن أن نحصل على مجموع ومجموع مربعات ن من الأعداد الصحيحة الأولى كالآتى .

$$(١) \quad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك = \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

أى أن مجموع ن من الأعداد الصحيحة ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن

$$= \frac{ن(ن+١)}{٢}$$

فمثلا مجموع الأعــداد الخمسة الصحيحة الأولى أى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ هو ١+٢ + ٣ + ٤ + ٥ = ١٥ ، وهذه يمكن الحصول عليها مباشرة باستخدام الصورة الجبرية السابقة كالآتى :

$$\underset{\text{ك}=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ك}} = \frac{٥(٥+١)}{٢} = \frac{٥\times٦}{٢} = ١٥$$

(٢) $$\underset{\text{ك}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{س}^{٢}_{\text{ك}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

أى أن مجموع مربعات ن من الأعدادالصحيحة $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + \text{ن}^{٢}$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)(٢\text{ن}+١)}{٦}$$

فمثلا $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} = \frac{٤(٤+١)(٩+١)}{٦}$

$$= \frac{٤\times٥\times٩}{٦} = ٣٠$$

(٣) متوسط ن من الأعداد الصحيحة الأولى $= \frac{\text{ن}+١}{٢}$

أى أن : $\bar{\text{س}} = \frac{١+٢+٣+\cdots+\text{ن}}{\text{ن}}$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢\text{ن}} = \frac{\text{ن}+١}{٢}$$

(٤) تباين ن من الأعداد الصحيحة الأولى والذى يمكن أن نحصل عليه بجمع مجموع مربعات انحرافات الأعداد عن المتوسط وقسمة الناتج على ن هو :

$$ع^2 = \frac{ن^2 - 1}{12}$$

، وكذلك مجـ $(س - \overline{س})^2 = \frac{ن (ن^2 - 1)}{12} = \frac{ن^3 - ن}{12}$.

(٥) المتوسط هو دالة بسيطة مباشرة للتباين . إذ يمكن كتابة العلاقة بين متوسط ن من الأعداد الصحيحة وتباين هذه الأعداد كالآتى :

$$\overline{س} = \frac{6ع^2}{ن - 1}$$

ويمكن البرهنة على ذلك ببساطة بأن نبدأ بصورة التباين :

$$ع^2 = \frac{ن^2 - 1}{12}$$

ثم نحلل البسط $ن^2 - 1$ إلى عاملين $(ن - 1) (ن + 1)$

أى أن : $ع^2 = \frac{(ن - 1) (ن + 1)}{12}$

ولكن $س = \frac{ن + 1}{2}$ للأعداد الصحيحة الأولى التى عددها ن .

أى أن : $ن + 1 = 2س$

وبالتعويض فى $ع^2$ نجد أن :

$$ع^2 = \frac{2 \overline{س} (ن - 1)}{12}$$

أى أن $\overline{س ص} = \frac{٦ ع^{٢}}{ن - ١}$ ،

وفى الحقيقة يمكن أن يستفيد الباحث من معرفة هذه العلاقات فى فهم الأساس الرياضى لمعامل ارتباط الرتب .

مقياس درجة اتفاق الرتب :

إذا افترضنا أن لدينا ن من الأفراد $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، $ا_{٣}$ ، . . . ، $ا_{ن}$ ثم ترتيبهم بالنسبة لمتغيرين س ، ص . فإننا نرمز لرتب قيم المتغير س بالرموز :

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، . . . ، $س_{ن}$.

ولرتب قيم المتغير ص بالرموز :

$ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ . . . ، $ص_{ن}$.

فإذا كانت رتب خمسة أفراد بالنسبة المتغيرين س ، ص كما يلى :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٤	٣	٥	٢

فهنا يكون ترتيب المتغير س هو الترتيب الطبيعى ، أما ترتيب المتغير ص فلا يكون كذلك .

إذ أن هناك نوعا من عدم الترتيب فى المتغير ص بالنسبة المتغير س . وهنا يبرز التساؤل : هل يمكن تعريف مقياس درجة اتفاق الرتب فى مثل هذه الحالة ؟ .

أن أحد المقاييس الأخرى الشائعة الاستخدام لقياس درجة اتفاق الرتب يعتمد على مجموع مربعات الفروق بين أزواج الرتب . ويمكن أن نرمز لهذا المقدار بالرمز مجـ ف^{٢} . ففى المثال السابق :

مج (س − ص)^{2} = مج (ف^{2})

= (صفر)^{2} + (−٢)^{2} + (صفر)^{2} + (−١)^{2}

+ (٣)^{2} = ١٤ .

ومن المهم أن نحدد أكبر وأقل قيمة يصل إليها المقدار مج ف^{2} .

فإذا كان لمجموعة من الأفراد نفس الترتيب فى كل من المتغيرين س ، ص فإن مج ف^{2} = صفر . وهذه هى أقل قيمة للمقدار مج ف^{2} . أى أنه إذا كانت رتب قيم المتغير س هى : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ورتب قيم المتغير ص هى : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فإن الفروق بين كل رتبتين متناظرتين تكون صفراً . أما إذا كانت أزواج الرتب موضوعة بترتيب عكسى وهو أقصى عدم ترتيب ، فإن مج ف^{2} تأخذ قيمتها القصوى . وإذا كانت رتب قيم المتغير س هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ورتب قيم المتغير ص هى ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ فإن فروق الرتب تصبح − ٤ ، − ٢ ، صفر ، ٢ ، ٤ وتكون مج ف^{2} = ٤٠ .

ولا يمكن الحصول على قيمة أكبر من ذلك مهما غيرنا من ترتيب ص بالنسبة إلى س .

ويمكن إثبات أن أقصى قيمة تأخذها مج ف^{2} نحصل عليها بالتعويض فى الصورة الآتية :

مج ف^{2} القصوى = $\frac{\text{ن}\,(\text{ن}^{2} - 1)}{3}$

فإذا وضعنا رتب ص فى ترتيب عشوائى بالنسبة إلى س فإن القيمة المتوقعة للمقدار مج ف^{2} تكون نصف مج ف^{2} القصوى .

أى أن : مج ف^{2} المتوقعة $\frac{\text{ن}\,(\text{ن}^{2} - 1)}{6}$.

وتعتبر مج ف^{2} أحد المقاييس التى تستخدم فى قياس درجة اتفاق الرتب .

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

نظراً لأهمية مجـ ف^{٢} فى قياس درجة اتفاق الرتب فإنها تستخدم فى تعريف معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . وهذا المعامل يأخذ القيمة + ١ عندما يكون لقيم المتغيرين نفس الترتيب ، والقيمة − ١ عندما ينعكس ترتيب القيم ، وتكون قيمته المتوقعة مساوية للصفر إذا كان ترتيب القيم عشوائياً بالنسبة لبعضها البعض.

ويمكن تعريف معامل ارتباط الرتب الذى يفى بهذه الخواص كالآتى :

$$\text{معامل ارتباط الرتب } \rho = ١ - \frac{٢ \text{ مجـ ف}^{٢}}{\text{مجـ ف}^{٢} \text{ القصوى}} \quad \cdots\cdots \quad (٢)$$

حيث ρ وهو أحد الحروف اليونانية ويقرأ (رو) يرمز لمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان . فإذا كان لقيم المتغيرين نفس الترتيب تصبح مجـ ف^{٢} = صفر ، وتكون ρ = ١ .

وإذا انعكس ترتيب قيم المتغيرين تكون مجـ ف^{٢} = مجـ ف^{٢} القصوى ، وتصبح ρ = − ١ . وفى حالة عدم وجود ارتباط بين رتب س ورتب ص تصبح ٢ مجـ ف^{٢} = مجـ ف^{٢} القصوى ، وعندئذ تكون ρ = صفر. وقد سبق أن أوضحنا أن :

$$\text{مجـ ف}^{٢} \text{ القصوى} = \frac{ن \, (ن^{٢} - ١)}{٣} \quad \cdots\cdots \quad (٣)$$

بالتعويض من (٣) فى (٢) نجد أن :

$$\text{معامل ارتباط الرتب} = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^{٢}}{ن \, (ن^{٢} - ١)} \quad \cdots\cdots \quad (٤)$$

وهذه هى الصورة المعروفة التى تستخدم فى حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان كحالة خاصة من معامل الارتباط لبيرسون:

فى الحقيقة يمكن اعتبار أن معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (الصورة رقم ٤) حالة خاصة من معامل الارتباط لبيرسون الذى يمكن كتابة الصورة التى تستخدم فى حسابه كالآتى :

$$\text{معامل ارتباط بيرسون} = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^2 \times \sum (ص - \overline{ص})^2}}$$

..... (٥)

ولتوضيح كيفية اشتقاق الصورة رقم (٤) من الصورة رقم (٥) نعرض البرهان الآتى :

إذا افترضنا أنه لكل زوج من قيم المتغيرين س ، ص :

$$ف = س - ص$$

$$\text{فإن } \sum ف = \sum س - \sum ص$$

بالقسمة على ن (حيث ن = عدد القيم) :

$$\frac{\sum ف}{ن} = \frac{\sum س}{ن} - \frac{\sum ص}{ن}$$

أى أن : $\overline{ف} = \overline{س} - \overline{ص}$ (المتوسطات)

ومجموع مربعات انحرافات قيم ف عن متوسط هذه القيم هو :

$$\sum (ف - \overline{ف})^2 = \sum [(س - \overline{س}) - (ص - \overline{ص})]^2$$

$$= \sum (سَ - صَ)^2$$

حيث سَ ، صَ ترمز إلى انحرافات قيم س ، ص عن متوسط كل منهما .

$$\therefore \text{مج}(\text{ف} - \bar{\text{ف}})^2 = \text{مج}\,\text{سَ}^2 + \text{مج}\,\text{صَ}^2 - ٢\,\text{مج}\,\text{سَ}\,\text{صَ}$$

$$= \text{مج}\,\text{سَ}^2 + \text{مج}\,\text{صَ}^2 - ٢\,\text{مج}\,\text{سَ}\,\text{صَ} \times \frac{\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}}{\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}}$$

وذلك بالضرب فى $\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}$

بسطا ومقاماً

$$= \text{مج}\,\text{سَ}^2 + \text{مج}\,\text{صَ}^2 - ٢\,\text{ر}\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}$$

لأن $\text{ر} = \frac{\text{مج}\,\text{سَ}\,\text{صَ}}{\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}}$

(أنظر الصورة رقم ٣ فى الفصل السابع)

$$\therefore \text{ر} = \frac{\text{مج}\,\text{سَ}^2 + \text{مج}\,\text{صَ}^2 - \text{مج}(\text{ف} - \bar{\text{ف}}^2)}{٢\sqrt{\text{مج}\,\text{سَ}^2 \times \text{مج}\,\text{صَ}^2}}$$

ولكن سبق أن بينا أن :

$$\text{مج}\,\text{سَ}^2 = \text{مج}\,\text{صَ}^2 = \frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{١٢}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{١٢} + \frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{١٢} - (\text{مج}\,\text{ف} - \bar{\text{ف}})^2}{\sqrt{\left(\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{١٢}\right)\left(\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{١٢}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{٦} - \text{مج}(\text{ف} - \text{ف})^2}{\frac{\text{ن}^3 - \text{ن}}{٦}}$$

$$= ١ - \frac{٦\,\text{مج}(\text{ف} - \bar{\text{ف}})^2}{\text{ن}^3 - \text{ن}}$$

ولكن إذا كانت كل من س ، ص مقدرة على أساس الرتب فإن : $\bar{س} = \bar{ص}$

، $\bar{ف} = \bar{س} - \bar{ص} =$ صفر

$$أى \therefore ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن^٣ - ن}$$

وهذه هى صورة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

طريقة حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان إذا كانت الرتب غير مكررة :

مثال (١) : أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان باستخدام البيانات الآتية :

رتب س = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)

رتب ص = (٦ ، ٣ ، ٧ ، ٢ ، ١ ، ٨ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ١٠)

فلإيجاد معامل الارتباط المطلوب يمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية :

(١) يوجد الفروق بين الرتب المتناظرة لكل من س ، ص ويرمز لها بالرمز ف . وللتحقق من صحة هذه الفروق يجب أن يكون مجموعها صفراً .

أى أن : مجـ ف = صفر

(٢) يربع الفروق الناتجة ليحصل على $ف^٢$.

(٣) يجمع مربعات هذه الفروق ليحصل على مجـ $ف^٢$.

(٤) يعوض فى صورة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لإيجاد قيمة P وهى :

$$P = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

ويمكن استخدام هذه الخطوات فى المثال السابق وتلخيصها فى الجدول رقم (٣٩) الآتى :

الرتب		الفروق بين الرتب	
س	ص	ف	ف٢
١	٦	— ٥	٢٥
٢	٣	— ١	١
٣	٧	— ٤	١٦
٤	٢	+ ٢	٤
٥	١	+ ٤	١٦
٦	٨	— ٢	٤
٧	٤	+ ٣	٩
٨	٩	— ١	١
٩	٥	+ ٤	١٦
١٠	١٠	صفر	صفر
المجموع		صفر	مج ف٢ = ٩٢

$$P = 1 - \frac{\text{٦ مج ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{\text{٦} \times \text{٩٢}}{\text{١٠}(\text{١٠٠} - \text{١})} = \text{٠,٤٤٢}$$

جدول رقم (٣٩)

خطوات حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

اذا كانت الرتب غير مكررة

مثال (٢) : أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين درجات المتغيرين س ، ص الآتية :

س = (٤٧ ، ٧١ ، ٥٢ ، ٤٨ ، ٣٥ ، ٣٦)

ص = (٧٥ ، ٧٩ ، ٨٥ ، ٥٠ ، ٤٩ ، ٥٩)

هنا يجب أن نلاحظ أن المعلوم هو الدرجات وليست الرتب . ولذلك يجب أولا إيجاد الرتب المناظرة لكل قيمة من قيم س ، ص بأن تبدأ بترتيب قيم س ترتيباً تنازلياً أو تصاعدياً ويلى ذلك ترتيب قيم ص بنفس الطريقة ، ثم نتبع نفس الخطوات التى اتبعناها فى المثال السابق رقم (١) .

ويمكن تلخيص هذه الخطوات فى الجدول الآتى (رقم ٤٠) :

الدرجات		الرتب		الفرق بين الرتب	
س	ص	س	ص	ف	ف^{2}
٤٧	٧٥	٤	٣	+ ١	١
٧١	٧٩	١	٢	— ١	١
٥٢	٨٥	٢	١	+ ١	١
٤٨	٥٠	٣	٥	— ٢	٤
٣٥	٤٩	٦	٦	صفر	صفر
٣٦	٥٩	٥	٤	+ ١	١
المجموع				صفر	مج ف^{2} = ٨

$$P = ١ - \frac{٦ \text{ مج ف}^{2}}{\text{ن}(\text{ن}^{2} - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٨}{٦(٣٦ - ١)} = ٠,٧٨$$

جدول رقم (٤٠)
خطوات حساب معامل ارتباط الرتب
لسبيرمان بمعلومية الدرجات

طريقة حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان إذا كانت بعض الرتب مكرره

إذا أردنا أن نرتب الدرجات ١٤ ، ١٩ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٥ فإننا نلاحظ على الفور أن الدرجة ١٩ قد تكررت مرتين ، والدرجة ٢٣ تكررت ثلاث مرات . وفى مثل هذه الحالات يجب أن تعين للدرجات المكررة متوسط رتب هذه الدرجات .

فمثلا إذا كانت رتبة الدرجة ١٤ هى ١ ، فإن رتبة كل من الدرجتين ١٩ تكون $\frac{٢ + ٣}{٢}$ = ٢,٥ ، ورتبة الدرجة ٢٢ تساوى ٤ نظراً لأنه يسبقها ثلاث درجات ، ورتبة كل من الدرجات ٢٣ التالية تساوى $\frac{٥ + ٦ + ٧}{٣}$ = ٦ .

ويمكن إيجاد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بعد ذلك بنفس الطريقة التى اتبعناها فى حالة الرتب غير المكررة .

ولكن إذا كان هناك رتب كثيرة مكررة فإن هذه الطريقة ربما لا تكون دقيقة فى حساب معامل الارتباط . وذلك يرجع إلى أن معامل ارتباط الرتب لسبيرمان هو حالة خاصة من معامل ارتباط بيرسون الذى يفترض أن الرتب هى الأعداد الصحيحة الأولى التى عددها ن . فوجود الرتب المكررة يتنافى مع هذا الغرض . وإذا زاد عدد هذه الرتب المكررة فإن مجموع مربعات فروق هذه الرتب يختلف اختلافاً كبيراً عن مجموع مربعات الأعداد الصحيحة الأولى التى عددها ن . وهذا يؤثر بالتالى على قيمة معامل ارتباط الرتب . ولذا توجد طرق أخرى تستخدم لتصحيح الرتب المكررة سوف نعرض إحداها بعد عرضنا للمثال رقم (٣) الآتى .

مثال (٢) : أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لأزواج الدرجات الآتية :

س = (١ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠)

ص = (٢ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٨)

ويمكن تلخيص الخطوات التي يمكن أن يتبعها الباحث لإيجاد معامل الارتباط في هذه الحالة في الجدول رقم (٤١) الآتي:

الدرجات		الرتب		الفروق بين الرتب	
س	ص	س	ص	ف	ف²
١	٢	١	١,٥	−٠,٥	٠,٢٥
٢	٢	٢,٥	١,٥	+١,٠	١,٠٠
٢	٣	٢,٥	٣	−٠,٥	٠,٢٥
٣	٥	٤	٥	−١,٠	١,٠٠
٤	٥	٥	٥	صفر	صفر
٥	٥	٦	٥	+١,٠	١,٠٠
٦	٦	٧	٧	صفر	صفر
٨	٧	٨	٨,٥	−٠,٥	٠,٢٥
٩	٧	٩	٨,٥	+٠,٥	٠,٢٥
١٠	٨	١٠	١٠	صفر	صفر
المجموع				صفر	مجـ ف² = ٤

$$P = 1 - \frac{6\ \text{مجـ}\ \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 4}{10(100 - 1)} = 0.975$$

جدول رقم (٤١)

خطوات حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان اذا كانت بعض الرتب مكررة

طريقة أخرى لحساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

يمكن حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان باستخدام صورة أخرى. وبالرغم من أن هذه الصورة تتطلب عمليات حسابية أكثر من الصورة السابقة إلا أنها تتميز بإمكانية إجراء بعض التعديل عليها بحيث تستخدم فى حالة وجود بعض الرتب المكررة .

وعندما تنحصر الرتب بين ١ ، ن فإن مجموع مربعات الرتب ومجموع حواصل ضربها يمكن حسابه باستخدام الصورة الآتية :

مجموع مربعات رتب س ، أى م~س~ = مجموع مربعات رتب ص ، أى م~ص~

$$= \frac{ن^{٣} - ن}{١٢}$$

ومجموع حواصل ضرب رتب س ، ص أى :

$$م_{ح} = \frac{1}{2} (م_{س} + م_{ص} - مج ف^{2})$$

حيث ف هى فرق رتبتين متناظرتين من رتب س ، ص وبذلك تكون

$$ر = \frac{م_{ح}}{\sqrt{م_{س} \times م_{ص}}} \quad \cdots\cdots \quad (٦)$$

ويمكن أن نطبق هذه الصورة على البيانات الموضحة فى الجدول السابق رقم (٤١) كالآتى :

$$م_{س} = م_{ص} = \frac{ن^{٣} - ن}{١٢} = \frac{١٠٠٠ - ١٠}{١٢} = ٨٢,٥$$

$$\therefore م_{ح} = \frac{1}{2} (م_{س} + م_{ص} - مج ف^{2})$$

$$= \frac{١}{٢} \left(٨٢,٥ + ٨٢,٥ - ٤ \right)$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١٦١ = ٨٠,٥$$

وبذلك تكون $\rho = \frac{٨٠,٥}{\sqrt{٨٢,٥ \times ٨٢,٥}}$

$$= \frac{٨٠,٥}{٨٢,٥} = ٠,٩٧٥$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

ولكن وجود رتب مكررة فى هذا المثال يقلل من قيمة مجموع المربعات . والصورة التى استخدمناها لم تدخل هذه الرتب المكررة فى الاعتبار عند حساب معامل الارتباط . ولذلك يجب أن نصحح هذه الصورة قبل استخدامها فى حالة الرتب المكررة فى أحد المتغيرين أو كليهما . ويمكن حساب معامل التصحيح كالآتى :

١ — نحسب قيمة ى لكل مستوى من مستويات الرتب المكررة باستخدام الصورة :

$$ى = \frac{ت^{٣} - ت}{١٢}$$

حيث ت ترمز إلى عدد الملاحظات أو الدرجات التى لها نفس الرتبة .

فإذا كان هناك مثلا درجتان لهما نفس الرتبة ، فإن :

$$ى = \frac{٨ - ٢}{١٢} = ٠,٥$$

٢ — نجمع قيم ى لجميع الرتب المكررة لكل من المتغيرين س ، ص لكى نحصل على مجـ $ت_{س}$ ، مجـ $ت_{ص}$.

٣ — نعدل مجموع مربعات رتب س ، ص ومجموع حواصل الضرب كالآتى :

$$\text{م}_{\text{س}} = \frac{\text{ن}^{٣} - \text{ن}}{١٢} - \text{مجـ ت}_{\text{س}} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٧)$$

$$\text{، م}_{\text{ص}} = \frac{\text{ن}^{٣} - \text{ن}}{١٢} - \text{مجـ ت}_{\text{ص}} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٨)$$

فى المثال السابق :

$$\text{م}_{\text{س}} = ٨٢,٥ - ٠,٥ = ٨٢ \text{ ،}$$

$$\text{، م}_{\text{ص}} = ٨٢,٥ - ١ = ٨١,٥ \text{ ،}$$

$$\text{، م}_{\text{سص}} = \frac{١}{٢}\left(٨٠ + ٨١,٥ - ٤\right) = ٧٩,٧٥ .$$

$$\text{، } \rho = \frac{٧٩,٧٥}{\sqrt{(٨٢)(٨١,٥)}} = \frac{٧٩,٧٥}{٨١,٧٥} = ٠,٩٧٣$$

ويلاحظ أن معامل التصحيح له تأثير طفيف على قيمة معامل ارتباط الرتب لان عدد الرتب المكررة كان قليلا . ولذلك يمكن التغاضى عن استخدام معامل التصحيح فى مثل هذه الحالات .

ولكن يجب استخدام هـذا المعامل إذا كان هناك عدد كبير من الرتب المكررة .

وعلى الباحث أن يقرر بنفسه ما إذا كان من الأفضل استخدام معامل التصحيح أم لا إذا وجد أن هذا المعامل سوف يكون له تأثير يذكر على قيمة معامل ارتباط الرتب .

وينبغي أن نلاحظ أنه إذا حسبنا معامل ارتباط بيرسون لنفس مجموعة الدرجات فإن قيمته ربما تختلف قليلا عن قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . ولذا يفضل استخدام معامل ارتباط بيرسون إذا كان ميزان قياس البيانات من النوع الفترى .

أما إذا لم يكن لدى الباحث آلة حاسبة فإن استخدام طريقة سبيرمان بما تتميز به من سهولة فى العمليات الحسابية تعطيه قيمة تقريبية لمعامل ارتباط بيرسون . وكلما زاد حجم العينة كلما زاد اقتراب قيمتى المعاملين .

وفى الحقيقة توجد صورة رياضية يمكن أن تستخدم لتقدير معامل ارتباط بيرسون بمعلومية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . إلا أن استخدام هذه الصورة يتطلب أن تكون البيانات مستمدة من عينات كبيرة ، وهو مالا يتوفر لدى الباحث عند استخدامه لمعامل ارتباط الرتب .

وقد دلت نتائج تطبيق هذه الصورة الرياضية على أن معامل ارتباط الرتب فى المتوسط يكون أكبر قليلا من معامل ارتباط بيرسون ، وأن أكبر فرق بينهما باستخدام هذه الصورة عندما يكون كل منهما قريبا من ٠,٥٠ هو ٠,٠٠٢ مما يؤكد مدى اقتراب قيمتى المعاملين من بعضهما . ولكننا مع هذا لا ننصح الباحث بأن يستخدم معامل ارتباط بيرسون إلا إذا كانت البيانات تحقق الفروض التى يتطلبها هذا النوع من الارتباط .

<u>تفسير معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :</u>

إذا كان كل من المتغيرين المطلوب إيجاد معامل الارتباط بينهما مقدرين على أساس الرتب فإن قيمة هذا المعامل تساوى قيمة معامل ارتباط بيرسون الناتجة من استخدام الدرجات الأصلية بدلا من الرتب (فيما عدا الحالات التى تكون

فيها بعض الرتب مكررة أكثر من ثلاث أو أربع مرات) .

ولذا يمكن فى الحالة الأولى تفسير معامل ارتباط الرتب لسبيرمان على أنه مقياس لمقدار العلاقة الخطية بين الرتب .

أما إذا كانت قيم كل من المتغيرين محسوبة بوحدات غير الرتب (مثل درجات اختبار فى الذكاء مثلا) فإن قيمة معامل ارتباط الرتب المناظرة لدرجات الاختبار لاتساوى قيمة معامل ارتباط بيرسون المحسوبة من الدرجات الأصلية .

كما أن معامل ارتباط الرتب بين درجات توزيعين يتخذان شكل التوزيع الاعتدالى يكون أقل قليلا من معامل ارتباط بيرسون الذى يحسب من الدرجات الأصلية (أقل من ٠,٠٢) .

والخلاصة أنه يمكن أعتبار قيم معامل ارتباط الرتب لسبيرمان هى قيم تقريبية لمعامل ارتباط بيرسون .

معامل ارتباط الرتب لكندال

Kendall's Tau Rank Correlation Coefficient

يمكن اعتبار معامل ارتباط الرتب الذى ينسب إلى العالم الإنجليزى موريس كندال Maurice Kendall بديلا لمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان . فكل منهما يستخدم كمقياس للعلاقة بين متغيرين كل منهما من المستوى الرتبى .

ولكن معامل ارتباط كندال يختلف فى الفكرة التى بنى عليها عن معامل ارتباط سبيرمان . فمعامل ارتباط سبيرمان يمكن اشتقاقه كماسبق أن رأينا بطريقة جبرية من معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون ، ولذلك فهو يعتبر حالة خاصة منه . ولكن معامل ارتباط الرتب لكندال يعتمد على تحديد الفرق بين عدد الاتفاقات وعدد الاختلافات بين أزواج رتب كل من المتغيرين ،

ثم إيجاد النسبة بين هذا الفرق إلى عدد الاتفاقات بين الرتب إذا افترض أن هناك اقترانا موجبا تاما بين مجموعتي الرتب .

وهو بهذا يشبه إلى حد ما معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال الذى سبق أن عرضنا له فى مستهل هذا الفصل . ويرمز لمعامل ارتباط الرتب لكندال بالحرف اليونانى (T) ويقرأ (تو) . وسوف نوضح فى نهاية هذا الفصل العلاقة بين معاملات ارتباط الرتب الثلاثة .

وتوجد فى الحقيقة طرق متعددة لحساب معامل ارتباط الرتب لكندال بعضها جبرية والأخرى بيانية . وسوف نعرض فيما يلى لبعض هذه الطرق .
التي أشار إليها هيز

طريقة حساب معامل ارتباط الرتب لكندال إذا كانت الرتب غير مكررة :

(أولا) طريقة جبرية :

نفترض أننا أردنا حساب معامل ارتباط كندال بين مجموعتى الرتب الآتية :

س	٣	٢	١	٤	٥
ص	٤	١	٣	٢	٥

فالخطوة الأولى : نعيد ترتيب رتب س ترتيبا تصاعديا من ١ إلى ن ، ونكتب رتب ص المناظرة كالآتى :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	١	٤	٢	٥

والخطوة الثانية : نبدأ بزوج الرتب الأول (حيث س = ١) ، ونقارن قيمة ص المناظرة (ص = ٣) بجميع قيم ص التالية ، ونعين القيمة + ١ لكل رتب ص التالية التى تكون أكبر من الرتبة ص = ٣ ، والقيمة — ١ لكل رتب ص التالية التى تكون أقل من الرتبة ص = ٣ .

ثم نجمع القيم الناتجة جمعا جبريا (أى مع مراعاة الإشارات) . ونكرر هذه العملية لجميع رتب ص المناظرة لرتب س كالآتى :

بالنسبة للزوج الأول حيث (س = ١) :

— ١ + ١ — ١ + ١ = صفر

وبالنسبة للزوج الثانى (حيث س = ٢) :

+ ١ + ١ + ١ = + ٣

وبالنسبة للزوج الثالث (حيث س = ٣) :

— ١ + ١ = صفر

وبالنسبة للزوج الرابع (حيث س = ٤) :

+ ١ = + ١ .

والخطوة الثالثة : نجمع القيم الناتجة جمعا جبريا ونرمز للمجموع بالرمز ج.

أى أن : ج = صفر + ٣ + صفر + ١ = ٤ .

والخطوة الرابعة ، نحسب أكبر قيمة للمقدار (ج)، وهى القيمة التى نحصل عليها إذا كان هناك اقتران موجب تام بين مجموعتى الرتب . وهذه القيمة = $\frac{1}{2}$ ن (ن — ١) .

والخطوة الخامسة ، نحسب معامل ارتباط الرتب لكندال باستخدام الصورة الآتية :

$$T = \frac{ج}{\frac{1}{2}ن(ن-1)} = \frac{2ج}{ن(ن-1)} \quad \ldots (9)$$

أى أن T فى المثال السابق $= \frac{٢٥ - ٥}{٢ \times ٤} = + ٠,٤٠$

وإذا حسبنا معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لهذه البيانات سوف نجد أنه يساوى + ٠,٥٠ ، واختلاف الناتجين يرجع إلى اختلاف الأساس المنطقى الذى بنى عليه كل من المعاملين . وسوف نعود لمناقشة هذه النقطة عند مقارنة الطرق المختلفة لإيجاد العلاقة بين متغيرين من المستوى الرتبى فى آخر هذا الفصل .

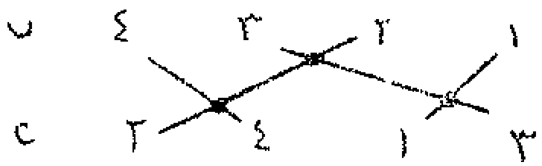
(ثانيا) طريقة بيانية :

تعد هذه الطريقة أبسط من الطريقة الجبرية السابقة عند حساب قيمة ج ، إذ أنها تعتمد على التوضيح البيانى لأزواج الرتب . وفيما يلى ملخص الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث عند استخدام هذه الطريقة فى حساب معامل ارتباط الرتب لـكندال إذا كانت الرتب غير مكررة .

الخطوة الأولى: يعيد ترتيب رتب س ترتيبا تصاعديا من ١ إلى ن، ويكتب رتب ص المناظرة كالآتى :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	١	٤	٢	٥

والخطوة الثانية: يرسم خطوطا تصل بين الرتب المتساوية لـكل من المتغيرين س ، ص كالآتى :



والخطوة الثالثة : يوجد عدد نقط تقاطع هذه الخطوط ، وهى تدل على عددالاختلافات بين الرتب . وفى هذا المثال توجد ثلاث نقط تقاطع كما هو مبين بالتخطيط البيانى السابق .

والخطوة الرابعة : يوجد قيمة ج باستخدام الصورة الآتية :

$$ج = \frac{ن(ن - ١)}{٢} - ٢ \times \text{عدد الاختلافات بين الرتب} \qquad \cdots\cdots\cdots (١٠)$$

فى هذا المثال :

$$ج = \frac{٥(٥ - ١)}{٢} - ٢ \times ٣$$

$$= ١٠ - ٦ = ٤$$

والخطوة الخامسة : يطبق الصورة الجبرية رقم (٩) لحساب قيمة (T) وهى :

$$T = \frac{٢ ج}{ن(ن - ١)} = \frac{٢ \times ٤}{٥(٥ - ١)} = + ٠,٤٠$$

وهى نفس القيمه التى حصلنا عليها باستخدام الطريقة الجبرية .

ويمكن تفسير معامل ارتباط الرتب (T) تفسيرا مباشراً . فإذا سحبنا زوجا من الأشياء التى حصلنا على رتبها بطريقة عشوائية ، فإن احتمال أن يكون هذا الزوج له نفس الرتبة فى كل من المتغيرين أكبر من احتمال أن يكون له رتبتان مختلفتان بقدر ٠,٤٠ ، وبعبارة أخرى فإن هذا المعامل يدل على أن ترجيح تقدير شخصين نفس الرتبة لزوج معين من الأشياء يتم اختياره بطريقة عشوائية يكون أكبر من ترجيح تقدير رتبتين مختلفتين لهذا الزوج من الأشياء .

وهذه الطريقة البيانية لحساب معامل ارتباط الرتب لكندال تصلح فقط عندما تكون الرتب غير مكررة ، ويسهل استخدامها إذا كان عدد الأفراد كبيراً نسبياً .

ويجب أن يلاحظ الباحث أن هذه الطريقة لاتقتصر فقط على تقديرات المحكمين لترتيب أشياء معينة ، وإنما يمكن أيضاً استخدامها فى حالة ترتيب مجموعة من درجات كل من متغيرين .

ثالثا : طريقة بيانية أخرى لحساب معامل ارتباط الرتب (T) .

يمكن استخدام طريقة بيانية أخرى لحساب قيمة (ج) . والهدف من ذكرها هنا هو أنه يمكن تطبيقها بشىء من التعديل فى حالة وجود بعض الرتب المكررة فى أحد المتغيرين أو كليهما .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث لإيجاد قيمة ج باستخدام هذه الطريقة نشير إلى المثال السابق .

فالخطوة الأولى : يعد جدولا تكراريا ثنائى البعد ، ويضع رتب المتغير س على أحد بعديه ، ورتب المتغير ص على بعده الآخر ، ويكون لكل فرد زوج من الرتب تتحدد عن طريقه الخلية التى يقع فيها .

رتب المتغير ص

رتب المتغير س	١	٢	٣	٤	٥
١			١		
٢	١				
٣				١	
٤		١			
٥					١

جدول رقم (٤٢)
جدول ثنائى البعد لرتب متغيرين
(الرتب غير مكررة)

فمثلا زوج الرتب (١ ، ٣) فى الجدول رقم (٤٢) يقع فى الخلية الناتجة من تقاطع الصف الأول والعمود الثالث . ولذلك وضعنا الرقم ١ فى هذه الخلية ، وهكذا بالنسبة لبقية الرتب .

والخطوة الثانية : يحسب قيمة جـ بأن يأخذ أى خلية يختلف تكرارها عن الصفر ، ويهمل كل من الصف والعمود الذى تقع فيه هذه الخلية ، ويوجد عدد التكرارات التى تقع أسفل وإلى يسار هذه الخلية ، ثم يجمع التكرارات التى يحصل عليها . فمثلا بالنسبة للخلية (٢ ، ١) توجد ٣ تكرارات تقع أسفل وإلى يسار هذه الخلية ، وهكذا فى بقية خلايا الجدول . ويمكن تلخيص ذلك كالآتى :

الخلية	عدد التكرارات
(١ ، ٣)	٢
(٢ ، ١)	٢
(٣ ، ٤)	١
(٤ ، ٢)	١
(٥ ، ٥)	صفر
ج+ =	٧

والخطوة الثالثة : يطبق الصورة الآتية لحساب قيمة ج :

$$\text{ج} = \text{٢ ج}_{+} - \frac{\text{ن (ن − ١)}}{\text{٢}} \quad \ldots\ldots\ (\text{١١})$$

$$= \text{٢} \times \text{٧} - \frac{\text{٥} \times \text{٤}}{\text{٢}}$$

$$= \text{١٤} - \text{١٠} = \text{٤}$$

والخطوة الرابعة : يطبق الصورة الجبرية رقم (٩) لحساب قيمة (T) وهى :

$$T = \frac{\text{٢ج}}{\text{ن (ن − ١)}} = \frac{\text{٢} \times \text{٤}}{\text{٥ (٥ − ١)}} = +\text{٠,٤٠}$$

ونلاحظ أنها نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام الطريقتين الآخريين .

ويمكن أن يوجد الباحث قيمة ج ــ بدلا من ج + وذلك بأن يأخذ مجموع التكرارات الواقعة إلى يمين وأسفل كل خلية من خلايا الجدول يختلف تكرارها من الصفر .

وعندئذ تكون $\text{ج} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢} - ٢\,\text{ج}_{-}$ ..... (١٢)

وذلك لأنه فى حالة عدم وجود رتب مكررة .

$\text{ج}_{+} + \text{ج}_{-} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢}$ . . . . . . (٣)

طريقة حساب معامل ارتباط الرتب لكندال إذا كانت بعض الرتب مكررة :

يمكن حساب معامل ارتباط الرتب لكندال إذا كانت بعض الرتب مكررة باستخدام طريقة مماثلة للطريقة البيانية الثانية التى عرضنا لها فيما سبق . أى أن الباحث يمكنه استخدام جدول تكرارى ثنائى البعد كما سبق ولكن بعض خلايا الجدول فى هذه الحالة سوف تشتمل على تكرارات أكبر من الواحد الصحيح .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث لايجاد قيمة كل من ج ، T نعرض فى المثال الآتى :

نفترض أننا قمنا بملاحظة ١٢ فردا بغرض ترتيبهم بالنسبة لكل من متغيرين ، وحصلنا على البيانات الآتيه الموضحة بجدول رقم (٤٣) الآتى .

الفرد	رتب المتغير (س)	رتب المتغير (ص)
١	٥	٨,٥
٢	٧	١١
٣	٥	١٢
٤	١	٨,٥
٥	٢	٨,٥
٦	٣	٦
٧	٥	٥
٨	١١,٥	٨,٥
٩	١١,٥	٢
١٠	٩,٥	٢
١١	٩,٥	٢
١٢	٨	٤

جدول رقم (٤٣)

ترتيب ١٢ فردا بالنسبة الى كل من متغيرين

فالخطوة الأولى . يرتب الدرجات فى كل من المتغيرين س ، ص كما فى الجدول رقم (٤٣) . وفى الحقيقة يمكن استخدام الدرجات الفعلية بدلا من الرتب وتدوينها فى العمودين الثانى والثالث من الجدول نظراً لأن الباحث لن يستخدم هذه الدرجات فى حد ذاتها فى العمليات الحسابية التى تلى ذلك .

والخطوة الثانية : يكون جدولا ثنائى البعد ، يضع رتب المتغير س على بعده الأفقى ، ورتب المتغير ص على بعده الرأسى كالآتى :

رتب المتغير س

رتب المتغير ص	١	٢	٣	٥	٧	٨	٩,٥	١١,٥	المجموع
٢							٢	١	٣
٤						١			١
٥				١					١
٦			١						١
٨,٥	١	١		١				١	٤
١١					١				١
١٢				١					١
المجموع	١	١	١	٣	١	١	٢	٢	١٢

جدول رقم (٤٤)

جدول تكرار ثنائى البعد لرتب متغيرين

(بعض الرتب مكررة)

والخطوة الثالثة : يحسب قيمة ج+ كما سبق فى حالة الرتب غير المكررة . غير أنه فى هذه الحالة يجب أن يعطى أوزانا للتكرارات التى تقع إلى يسار وأسفل كل خلية غير صفرية تساوى تكرار الخلية .

فمثلا بالنسبة للخلية الناتجة من تقاطع الصف الأول والعمود السابع يوجد تكرار واحد أسفل وإلى يسار هذه الخلية . ولكن نظراً لوجود حالتين أو تكرارين فى الخلية فإنه عند حساب ج+ يجب أن يجمع التكرارات الموزونة للخلايا .

أى أن :

+ = ٢ (١) + ١ (١) + ١ (٢) + ١ (٤) + ١ (٢)
+ ١ (٢) + ١ (١) = ١٤ .

والخطوة الرابعة : يحسب ج وذلك بأن يأخذ المجموع الموزون للتكرارات الواقعة إلى يمين وأسفل كل خلية غير صفرية من خلايا الجدول كالآتى :

$$\text{ج}_{-} = ٢(٨) + ١(٨) + ١(٧) + ١(٢) + ١(٢)$$
$$+ ١(٢) + ١(١) = -٣٩ .$$

وبذلك تكون $\text{ج} = \text{ج}_{+} - \text{ج}_{-}$

$$= ١٤ - ٣٩ = -٢٥ .$$

ويقترح كندال لإيجاد قيمة T أن نقسم قيمة ج الناتجة على المقدار الآتى :

$$\sqrt{\left[\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢} - \text{ت}_{١}\right]\left[\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢} - \text{ت}_{٢}\right]} \quad . \quad . \quad . \quad (١٤)$$

حيث $\text{ت}_{١} = \frac{\sum_{\text{ع}} \text{ن}_{\text{ع}}(\text{ن}_{\text{ع}} - ١)}{٢}$ . . . . (١٥)

، $\text{ن}_{\text{ع}}$ = المجموع الكلى للتكرار الهامشى للعمود ع، حيث ع ترمز إلى عدد الأعمدة المناظرة لرتب س .

، $\text{ت}_{٢} = \frac{\sum_{\text{ف}} \text{ن}_{\text{ف}}(\text{ن}_{\text{ف}} - ١)}{٢}$ . . . . (١٦)

، $\text{ن}_{\text{ف}}$ = المجموع الكلى للتكرار الهامشى للصف ف ، حيث ف ترمز إلى عدد الصفوف المناظرة لرتب ص .

في هذا المثال :

$$ت_١ = \frac{١}{٢}\left[(١)٢ + (١)٢ + (٢)٣\right]$$

$$= ٥ ,$$

$$ت_٢ = \frac{١}{٢}\left[(٢)٤ + (٢)٣\right]$$

$$= ٩ ,$$

$$T = \frac{-٢٥}{\sqrt{\left(\frac{١٢ \times ١١}{٢} - ٥\right)\left(\frac{١٢ \times ١١}{٢} - ٩\right)}}$$

$$= \frac{-٢٥}{\sqrt{٦١ \times ٥٧}} = -٠,٤٢$$

أى أن درجة الاقتران بين الرتب تكون سالبة وتساوى ٠,٤٢

معامل الاتفاق لكندال

Kendall's Coefficient of Concordance

أحيانا يود الباحث تحديد العلاقة بين ثلاث مجموعات أو أكثر من الرتب ، أى يود معرفة مدى إتفاق مجموعة من المحكمين عندما يطلب منهم ترتيب مجموعة من الأشياء بالنسبة إلى خاصية معينة . ويمكن أن يحصل الباحث على هذه البيانات بطرق مختلفة . فمثلا يمكنه أن يعرض الأشياء أو المثيرات التى عددها(ن) على(م) من المحكمين ، ويطلب من كل محكم أن يقدر رتبة معينة لكل مثير أو شيء

فيما لحك من سبق تحديده . أو يمكنه أن يحصل على درجات أو قياسات عددها (م) لمجموعة تتكون من (ن) من الأشخاص أو الأشياء مثل درجات اختبارات في الرياضيات واللغة العربية والتاريخ وهكذا . ثم يقوم بترتيب درجات كل اختبار ، ويضع هذه البيانات في جدول مكون من (م) من الصفوف ، (ن) من الأعمدة ، وبذلك تتكون خلايا الجدول من الأعداد التي تناظر رتب الأفراد أو الأشياء التي قدرها المحكمون .

ويمكن أن يوجد الباحث درجة الاتفاق بين المحكمين بأن يحسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين كل مجموعتين من الرتب ، ثم يوجد متوسط معاملات الارتباط الناتجة ، وبذلك يحصل على مقياس للعلاقة بين جميع الرتب .

ولكن هذه الطريقة تحتاج بلاشك إلى جهد ووقت كبيرين من جانب الباحث . ولذلك اقترح كندال Kendall استخدام مقياس إحصائي جديد لتبسيط هذه العمليات أطلق عليه اسم معامل الاتفاق

Coefficient of Concordance.

ويرمز له بالحرف الانجليزي W ولكننا سنرمز له في هذا الكتاب بالرمز (ق) .

<u>طريقة حساب معامل الاتفاق لكندال إذا كانت الرتب غير مكررة :</u>

لتوضيح الخطوات التي يمكن أن يتبعها الباحث في حساب معامل الاتفاق إذا كانت الرتب غير مكررة بعرض غير ميسوني المثال الآتي :

نفترض أنه طلب من خمسة من المحكمين (م) تقدير رتبة معينة للمشروعات التي قدمها عشرة طلاب في إحدى الكليات (ن) . وأراد تحديد مدى اتفاق الرتب التي قدرها هؤلاء المحكمون . والجدول الآتي رقم (٤٥) يوضح هذه البيانات :

(١) الطالب	(٢) الرتب التى قدرها المحكمون ١	٢	٣	٤	٥	(٣) مجموع الرتب	(٤) ف	(٥) ف٢
١	٢	١	٢	٣	٤	١٢	١٥,٥	٢٤٠,٢٥
٢	١	٣	١	٢	٢	٩	١٨,٥	٣٤٢,٢٥
٣	٣	٤	٤	١	٣	١٥	١٢,٥	١٥٦,٢٥
٤	٥	٥	٥	٥	١	٢١	٦,٥	٤٢,٢٥
٥	٤	٢	٦	٧	٦	٢٥	٢,٥	٦,٢٥
٦	٧	٨	٣	٤	٧	٢٩	١,٥	٢,٢٥
٧	٦	٦	٨	٦	٥	٣١	٣,٥	١٢,٢٥
٨	٨	٧	٧	٨	٩	٣٩	١١,٥	١٣٢,٢٥
٩	٩	١٠	١٠	٩	٨	٤٦	١٨,٥	٣٤٢,٢٥
١٠	١٠	٩	٩	١٠	١٠	٤٨	٢٠,٥	٤٢٠,٢٥
						٢٧٥		مجـ ف٢ = ١٦٩٦,٥

جدول رقم (٤٥)
تقديرات خمسة من المحكمين لعشرة طلاب
وخطوات ايجـــاد معامل الاتفاق لكندال
فى حالة الرتب غير المكررة

ونلاحظ من هذا الجدول أن مجموع قيم العمود الثالث هو المجموع الكلى للرتب . ويمكن التحقق من صحة هذا المجموع كالآتى :

$$\text{المجموع الكلى للرتب} = \frac{م (ن) (ن + ١)}{٢}$$

$$= \frac{٥ (١٠) (١١)}{٢}$$

$$= ٢٧٥$$

حيث م ترمز لعدد المحكمين ،

، ن ترمز لعدد الطلاب .

فإذا لم تكن هناك علاقة بين الرتب فإننا نتوقع أن يتساوى مجموع الرتب في كل صف .

ففي هذا المثال يكون هذا المجموع مساويا لمتوسط المجموع الكلي للرتب ، أي $= \frac{٢٧٥}{١٠} = ٢٧,٥$.

ولذلك نوجد الفرق بين مجموع الرتب في كل صف وهذا المتوسط، ثم نوجد مربع هذه الفروق ، ونجمع المربعات الناتجة . ونتائج هذه الخطوات مبينة في العمودين الرابع والخامس من الجدول رقم (٤٥) .

ويلاحظ أن هذه المربعات تشير إلى درجة اتفاق مجموعة المحكمين . فكلما زادت قيمة هذه المربعات دل ذلك على اتفاق المحكمين . وكلما نقصت هذه القيمة دل ذلك على عدم اتفاقهم .

وللحصول على مقياس نسبي لدرجة الاتفاق ، يجب أن نقسم هذا المجموع على أكبر قيمة له ، وهي القيمة التي يمكن أن نحصل عليها في حالة الاتفاق التام بين المحكمين. ويمكن ببساطة إثبات أن هذه القيمة $= \frac{م^{٢} ن (ن^{٢} - ١)}{١٢}$

ولذلك فإن معامل الاتفاق ق

$$= \frac{١٢ \text{ مج } ف^{٢}}{م^{٢} (ن) (ن^{٢} - ١)} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٧)$$

وبالتعويض من الجدول السابق في هذه الصورة نجد أن :

$$ق = \frac{١٢ \times ١٦٩٦,٥}{(٢٥) (١٠) (١٠٠ - ١)} = ٠,٨٢$$

وهي قيمة مرتفعة مما يدل على أن هناك اتفاقا كبيرا بين المحكمين الخمسة في تقدير رتب مجموعة الطلاب .

ويجب أن يلاحظ الباحث أنه إذا كان معامل الاتفاق = ١ فإن هذا يعني وجود اتفاق تام بين المحكمين، وإذا كان هذا المعامل = صفرا فإن هذا يعني عدم وجود أي اتفاق بين المحكمين. كما يجب أن يلاحظ أن هذا المعامل لا تكون قيمته سالبة ، وإذا كان لدينا أكثر من اثنين من المحكمين فإنه لا يمكن أن تصل قيمته إلى الواحد الصحيح ، إذ لا يمكن أن يحدث اتفاق تام بينهم . فمثلا إذا لم يوجد بين المحكمين ا ، ب أي اتفاق ، وكذلك بين المحكمين ا ، جـ ، فإنه يجب أن يكون بين المحكمين ب ، جـ اتفاق تام .

كما أنه لا معنى لعدم وجود أي اتفاق إذا كان لدى الباحث أكثر من مجموعتين من الرتب .

<u>العلاقة بين معامل ارتباط الرتب لسبيرمان ومعامل الاتفاق لكندال :</u>

سبق أن ذكرنا أنه يمكن إيجاد درجة الاتفاق بين المحكمين بحساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين كل مجموعتين من الرتب وإيجاد متوسط هذه المعاملات ،

ولنرمز لهذا المتوسط بالرمز $\bar{ر}_س$.

وفي الحقيقة توجد علاقة بين هذا المتوسط وقيمة معامل الاتفاق ق وهي :

$$\bar{ر}_س = \frac{م ق - ١}{م - ١} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (١٨)$$

حيث م ترمز لعدد المحكمين .

وفي حالة م = ٢ تصبح العلاقة :

$$\overline{ر}_{س} = ٢ ق - ١$$

وعندما ق = صفر تكون $\overline{ر}_{س}$ = - ١ .

وعندما ق = ٠,٥ تكون $\overline{ر}_{س}$ = صفر .

وعندما ق = ١ تكون $\overline{ر}_{س}$ = + ١ .

وليس من السهل تفسير قيمة معامل الاتفاق ق تفسيراً مباشراً من حيث درجة اتفاق الرتب ، ولكن يمكن تفسير هذه القيمة عن طريق إيجاد متوسط قيمة معاملات ارتباط الرتب لسبيرمان بين كل مجموعتين من الرتب باستخدام الصورة السابقة رقم (١٨) .

فمثلا بالنسبة للمثال السابق وجدنا أن ق = ٠,٨٢ وبذلك تكون :

$$\overline{ر}_{س} = \frac{٥ \times ٠,٨٢ - ١}{٥ - ١} = ٠,٧٧٥$$

فإذا أخذنا جميع أزواج الرتب الممكنة وعددها $\frac{٥ \times ٤}{٢} = ١٠$ أزواج ، وحصلنا على معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لكل زوج منها فإن متوسط معاملات الارتباط ستبلغ حوالى ٠,٧٧٥ . وهذا يدل على أن هناك اتفاقا كبيرا بين المحكمين الخمسة فى متوسط تقديرهم لرتب مجموعة الطلاب .

ولكن يفضل تقرير درجـــة الاتفاق باستخدام ق بدلا من

$\bar{ر}_س$ فى البحوث ، لأن $\bar{ر}_س$ تنحصر قيمتها بين $\frac{-١}{م - ١}$ ، ١ أو تساوى أيا منهما مهما كانت قيم ن أو م . وهـــذا يسمح للباحث بمقارنة معاملات الاتفاق لمجموعات مختلفة من البيانات ، إلا أن استخدام $\bar{ر}_س$ يساعد على تفسير معامل الاتفاق فى تفسيراً أكثر وضوحاً .

طريقة حساب معامل الاتفاق لـكندال إذا كانت بعض الرتب مكررة :

إذا وجد الباحث أن هناك عددا قليلا من الرتب المكررة فإنه يمكنه استخدام نفس الطريقة السابقة التى استخدمناها فى حالة الرتب غير المكررة . ولـكنه فى هذه الحالة يجب أن يعين للدرجات المكررة متوسط رتب هذه الدرجات ، ثم يحسب معامل الاتفاق فى مباشرة من البياناته دون أى تعديل . أما إذا وجد أن عدد الرتب المكررة كبير فإنه يجب عليه تصحيح كل مجموعة من الرتب باستخدام معامل التصحيح الآتى والذى سنرمز له بالرمز ل :

$$ل = \frac{مج(ت^٣ - ت)}{١٢} \quad \ldots \quad (١٩)$$

حيث ت ترمز إلى عدد الملاحظات المكررة بالنسبة لأى رتبة فى مجموعة البيانات . فمثلا إذا كانت رتب المتغير س هى ١ ، ٢,٥ ، ٢,٥ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ١٠ فإنه يكون لدينا مجموعتان من الرتب المكررة إحداهما تكررت مرتين والأخرى تكررت ثلاث مرات .

وبتطبيق صورة معامل التصحيح المذكورة على هذه المجموعة من الرتب نجد أن :

$$ل = \frac{(٢^٣ - ٢) + (٣^٣ - ٣)}{١٢} = \frac{٦ + ٢٤}{١٢} = \frac{٣٠}{١٢} = ٢,٥$$

اى أننا نحسب قيمة معامل التصحيح ل لكل مجموعة من مجموعات الرتب التى عددها م ، و نجمع هذه القيم لنحصل على (مج ل) . ثم نحسب معامل الاتفاق ق باستخدام الصورة (رقم ١٧) التى استخدمناها فى حالة الرتب غير المكررة ، ولكن بعد تعديلها بحيث تتضمن معـــامل التصحيح الذى أشرنا إليه . وتصبح الصورة كالآتى :

$$ق = \frac{مج\ ف^٢}{\frac{١}{١٢}\ م^٢\ (ن^٣ - ن) - م\ مج\ ل} \quad \cdots (٢٠)$$

حيث م ترمز إلى عدد مجموعات الرتب . وهذا التصحيح يؤدى إلى زيادة قيمة معامل الاتفاق ق ولكن يكون له تأثير طفيف على هذا المعامل إذا كان عدد الرتب المكررة قليلا . ولذلك لا ننصح الباحث باستخدام هذه الصورة إلا إذا كان عدد الرتب المكررة كبيرا .

معامل الاتساق لكندال

Kendall's Coefficient of Consistence

لكى يحصل الباحث على رتب مجموعة من الأشياء بالنسبة إلى خاصية أو صفة معينة يمكنه أن يعرض هذه الأشياء مثنى مثنى بجميع الطرق الممكنة على أحد المحكمين ، ويطلب منه أن يرتب كل زوج من الأشياء تبعا لمحك معين . وتسمى هذه الطريقة طريقة الموازنات الثنائية Paired Comparisons .

وتستخدم هذه الطريقة بكثرة فى البحوث النفسية والتربوية . ويفترض أن الرتب التى تحصل عليها باستخدام هذه الطريقة تكون أكثر ثباتا من تلك التى تحصل عليها إذا طلب من المحكم ترتيب مجموعة الأشياء مرة واحدة .

إلا أن طريقة الموازنات الثنائيـة تتطلب جهدا ووقتا كبيرا . فإذا كان لدى الباحث ن من الأشياء ، فإن عـدد الموازنات الثنائيـة الممكنة يكون مساويا $\frac{ن\ (ن - ١)}{٢}$. وكلما زادت قيمة ن زاد تبعاً لذلك عـدد الموازنات زيادة كبيرة مما يجعل هذه الطريقة غير عملية .

وأحيانا نود أن نتأكد من اتساق الموازنات عند استخدام هـذه الطريقة . فإذا افترضنا أن لدينا ثلاثة أشياء ا ، ب ، ح وكان أحد المحكمين يفضل ا على ب ، ب على ح . فلكى تكون أحكامه متسقة يجب أن يفضل ا على ح . أما إذا كان يفضل ح على ا فإنه بذلك يكون غير متسق مع نفسه . وربما يرجع عدم الاتساق هذا إلى عدم قدرة المحكم على التمييز الدقيق بين الأشياء التى يوازن بينها أو بسبب عدم وضوح المحك أو البعد الذى يحكم على أساسه . فكلما زاد عدم الاتساق قلت الثقة فى معنى الرتب التى يقدرها المحكم للأشياء المطلوب ترتيبها .

فإذا رمزنا لتفضيل ا على ب بالرمز ا ← ب ، وتفضيل ب على ا بالرمز ب ← ا ، وكان تسلسل تفضيل ثلاثة أشياء هو :

ا ← ب ← حـ ← ا

فإن هذا يدل على ثلاثية غير متسقة من التفضيلات Inconsistent Triad فإذا كان لدينا مجموعة من الموازنات الثنائية بين ن من الأشياء فإنه يمكن إيجاد عدد الثلاثيات غير المتسقة من الأحكام أو التفضيلات واستخدامها لتعريف معامل اتساق هذه الأحكام أو الاستجابات .

ويوضح جلفورد الاستجابات التي نحصل عليها بطريقة الموازنات الثنائية لتسعة أشياء رمزنا لها بالحروف ا ، ب ، حـ ، د ، ...... ، ن في جدول رقم (٤٦) الآتي :

	ا	ب	حـ	د	هـ	و	ل	م	ن	مجموع الصف ف	(ف - ف̄)²
ا		١	صفر	صفر	١	١	١	صفر	١	٥	١
ب	صفر		١	١	١	١	صفر	١	١	٦	٤
حـ	١	صفر		صفر	صفر	١	١	١	١	٥	١
د	١	صفر	١		١	١	١	١	١	٧	٩
هـ	صفر	صفر	١	صفر		١	١	١	صفر	٤	١٠
و	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر		١	١	١	٣	١
ل	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر		١	١	٣	١
م	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر		صفر	١	٩
ن	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١		٢	٤
المجموع										٣٦	٣٠

ف̄ = ٤

جدول رقم (٤٦)
الموازنات الثنائية لتسعة أشياء

ونظراً لأن ا قد فضلت على ب ، فإننا وضعنا الرقم ١ فى الخلية الناتجة من تقاطع الصف ا مع العمود ب فوق القطر الرئيسى للجدول ، ووضعنا صفراً فى الخلية الناتجة من تقاطع العمود ا مع الصف ب تحت القطر الرئيسى للجدول . ويجب أن نلاحظ أنه إذا كانت الاستجابات متسقة اتساقاً تاماً فإن جميع القيم الواقعة على أحد جانبى القطر الرئيسى تكون مساوية للواحد الصحيح ، وجميع القيم الواقعة على الجانب الآخر تكون صفراً .

ولكن بالنظر إلى القيم الموجودة فى الجدول السابق نجد أن هناك بعض القيم الصفرية فوق القطر الرئيسى والواحد الصحيح تحت هذا القطر مما يدل على عدم وجود اتساق تام بين الاستجابات .

ولإيجاد معامل الاتساق لكندال لهذه المجموعة من البيانات يمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : يجمع كل صف فى الجدول السابق ، فإذا كان هناك اتساق تام بين الاستجابات فإن مجموع الصفوف سوف يكون : ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، صفر . ولكننا نجد أن مجموع الصفوف فى الجدول السابق هو ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٢ ، ١ مع مراعاة أننا رتبنا هذه المجاميع ترتيبا تنازليا . ويلاحظ أن الاستجابات غير متسقة ، وهذا يقلل من تباين الاعداد التى يحصل عليها الباحث عندما يجمع صفوف الجدول .

والخطوة الثانية : يوجد متوسط مجموع جميع الصفوف . فإذا رمزنا لمجموع كل صف بالرمز ف ، ومتوسط مجموع جميع الصفوف بالرمز $\overline{ف}$ فإن:

$$\overline{ف} = \frac{مجـ ف}{ن}$$

وهذا المتوسط الحقيقة $= \frac{ن - ١}{٢}$ حيث ن يرمز لعدد الأشياء المطلوب الموازنة بينها .

ومن الجدول يتضح أن : $\overline{ف} = \frac{٣٦}{٩} = ٤$

والخطوة الثالثة : يوجد مجموع مربعات انحرافات كل مجموع عن المتوسط .
أى : مجـ $(ف - \overline{ف})^٢$ وهذه تساوى

$$مجـ ف - \frac{ن (ن - ١)^٢}{٤}$$

ومن الجدول يتضح أن قيمة هذا المقدار $= ٣٠$.

والخطوة الرابعة : يحصل على أكبر وأقل قيمة للمقدار مجـ $(ف - \overline{ف})^٢$.
ويحصل على أكبر قيمة عندما يكون هناك اتساق تام فى أنماط الاستجابات ، وهذه القيمة $= \frac{ن (ن^٢ - ١)}{١٢}$. وأقل قيمة للمقدار مجـ $(ف - \overline{ف})^٢$ تعتمد على ما إذا كانت ن فردية أم زوجية . فإذا كانت ن فردية فإن أقل قيمة لهـــذا المقدار = صفر .

أما إذا كانت ن زوجية فإنه يمكن إثبات أن أقل قيمة لهذا المقدار $= \frac{ن}{٤}$.

أى أن أكبر قيمة ممكنة للمقدار مجـ $(ف - \overline{ف})^٢$ من الجدول السابق

$$= \frac{\text{٩ (٨١ − ١)}}{\text{١٢}} = \text{٦٠}$$

وأقل قيمة ممكنة لهذا المقدار = صفر (لأن ن فردية)

الخطوة الخامسة : يطبق الصورة الرياضية الآتية لحساب قيمة معامل الاتساق لكندال والذي يرمز له بالحرف الانجليزي K ، ولكننا سنرمز له في هذا الكتاب بالرمز (ك) .

$$\text{ك} = \frac{\text{مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط − أقل قيمة لهذا المجموع}}{\text{أكبر قيمة لهذا المجموع − أقل قيمة لهذا المجموع}}$$

فإذا كانت ن فردية فإن :

$$\text{ك} = \frac{\text{١٢ مج (ف} - \overline{\text{ف}}\text{)}^{٢} - \text{٣ ن}}{\text{ن (ن}^{٢} - \text{١)}} \quad \ldots \qquad (\text{٢١})$$

وإذا كانت ن زوجية فان :

$$\text{ك} = \frac{\text{١٢ مج (ف} - \overline{\text{ف}}\text{)}^{٢} - \text{٣ ن}}{\text{ن (ن}^{٢} - \text{٤)}} \quad \ldots \qquad (\text{٢٢})$$

ونظراً لان (ن) في الجدول السابق فردية . فإننا نستخدم الصورة رقم (٢١) لإيجاد قيمة (ك) .

$$\therefore \text{ك} = \frac{\text{١٢} \times \text{٣٠}}{\text{٩ (٨١ − ١)}} = \frac{\text{١٢} \times \text{٣٠}}{\text{٩} \times \text{٨٠}} = \text{٠,٥٠}$$

تفسير معامل الاتساق لكندال (ك) :

والآن ما هو تفسير القيمة الناتجة لمعامل الاتساق ؟

في الحقيقة يمكن تفسير معامل الاتساق في ضوء المناقشة التي قدمناها في مستهل

الحديث عن هـــذا المعامل ، وهو فكرة « الثلاثيات غير المتسقة » التى على الصورة :

ا ← ب ← حـ ← ا

فإذا رمزنا لعدد الثلاثيات غير المتسقة التى من هذا النوع بالرمز «ث» ، فإن «ث» تكون لها علاقة بمعامل الاتساق «ك» . فعندما تكون «ن» فردية فإنه يمكن إثبات أن :

$$\text{ث} = \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{٢}} - \text{١})(\text{١} - \text{ك})}{\text{٢٤}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٢٣})$$

وعندما تكون ن زوجية . فإنه يمكن إثبات أن

$$\text{ث} = \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{٢}} - \text{٤})(\text{١} - \text{ك})}{\text{٢٤}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٢٤})$$

وبالنسبة للبيانات الموضحة فى الجدول رقم (٤٦) تكون عدد الثلاثيات الغير المتسقة $\text{ث} = \frac{\text{٩}(\text{٨١} - \text{١})(\text{١} - \text{٠,٥})}{\text{٢٤}} = \text{١٥}$ ، لأن ن فردية .

وأكبر قيمة ممكنة لعدد هذه الثلاثيات = ٣٠ وبذلك تكون ك = ٠,٥٠ .

أى أن هناك اتساقا بين نصف عدد العلاقات الثنائية التى تشتمل عليها هذه البيانات ، ولا يوجد اتساق بين النصف الآخر .

وإذا كانت ك = ٠,٢٠ فإن معنى ذلك أن هناك اتساقا بين أربعة أخماس عدد هذه العلاقات ، ولا يوجد اتساق بين الخمس الباقى .

ويجب أن نلاحظ أن معامل الاتساق (ك) يكون مساويا للصفر إذا كانت أنماط الاستجابات عشوائية ، وهذه تعتبر أقصى حالة لعدم الاتساق . بينما تصل

قيمة هذا المعامل إلى الواحد الصحيح إذا كان هناك اتساق تام بين هـــذه الأنماط .

كيف يختار الباحث مقياس الاقتران المناسب إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الرتبي .

عرضنا فى هذا الفصل عددا من المقاييس الإحصائية التى يمكن أن يستخدمها الباحث فى إيجاد درجة الاقتران بين متغيرين كل منهما من المستوى الرتبى . ولكى يقرر الباحث أى هذه المقاييس يمكنه استخدامها عليه أن يكون واعيا للطريقة التى جمع بها بيانات بحثه والهدف من جمعها والأسئلة المطلوب الإجابة عليها باستخدام هذه البيانات .

ونظراً لأن معرفة الأساس المنطقى الذى بنى عليه كل مقياس من هذه المقاييس ومزاياه وعيوبه وحدود استخداماته يعد من الأمور الهامة التى يجب على كل باحث أن يكون على دراية بها، فإننا سوف نحاول هنا أن نقارن بإيجاز بين مختلف هذه المقاييس الإحصائية وطريقة تفسيرها حتى يكون لدى الباحث صورة متكاملة عن هـــذه المقاييس ، وبالتالى يستطيع اختيار المقياس الذى يناسب بيانات بحثه .

فمقاييس العلاقة الثلاثة الأولى التى عرضنا لها فى هذا الفصل ، وهى معامل الاقتران الرتبى لجودمان وكروسكال ، ومعامل ارتباط الرتب لسبيرمان ، ومعامل ارتباط الرتب لكندال تعتبر جميعها مقاييس متماثلة ، بمعنى أن الاقتران بين المتغيرين يكون فى كلا الاتجاهين . أى متبادل . ويمكن أن يستخدم معامل الاقتران الرتبى لجودمان إذا أراد الباحث أن يحصل على معامل تصل قيمته إلى — ١ أو + ١ فى حالة الاقتران التام . ولكن يفضل استخدام معامل ارتباط الرتب لكندال نظراً لسهولة حسابه بالطرق البيانية وسهولة تفسيره تفسيراً

احتماليا . وفى الحقيقة أن قيمة أى من المعاملين لا تختلف اختلافا يذكر فى حالة عدم وجود رتب مكررة لقيم أى من المتغيرين لنفس مجموعة البيانات . وكذلك يمكن فى هذه الحالة استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . إلا أن هذا المعامل يضع وزنا أكبر للفروق الكبيرة بين مجموعتى الرتب عن معامل الرتب لكندال . فإذا كان الباحث مهتما بإبراز هذه الفروق فإنه يفضل استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . أما إذا كانت بعض الرتب مكررة فى أى من المتغيرين فإنه لا يفضل استخدام هذا المعامل لصعوبة تفسيره فى هذه الحالة تفسيرا احتماليا . وإذا حسبنا كلا من معامل ارتباط الرتب لسبيرمان ومعامل ارتباط الرتب لكندال نجد أن القيمة المطلقة للمعامل الأول أكبر من القيمة المناظرة للمعامل الثانى (وللتأكد من ذلك انظر إلى المثال الذى عرضناه عند مناقشة معامل ارتباط كندال فى هذا الفصل) . ولكن يتساوى كل من المعاملين فى حالة الاقتران التام بين مجموعتى الرتب بشرط أن تكون الرتب غير مكررة .

وفى الحقيقة يوجد ارتباط مرتفع بين كل من المعاملين فى حالة العينات المستمدة من مجتمع أصل توزيعه اعتدالى Bivariate Normal Distribution.

فعندما يكون الارتباط فى المجتمع الأصل = صفرا ، فإن معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم بين كل من المعاملين = ٠,٩٨ عندما تكون ن = ٥ . ويقترب معامل الارتباط من الواحد الصحيح عندما تقترب ن (أى عدد الملاحظات) من اللانهاية .

ويتميز معامل ارتباط الرتب لكندال بأنه يعتمد فى حسابه على مقياس إحصائى آخر رمزنا له — كما سبق أن رأينا — بالرمز (ج) . وهذا المقياس يتصف بدرجة ما من العمومية لا تتميز بها (مج ف٢) المستخدمة فى حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان ، إذ أن لهذا المقياس عدد من التطبيقات غير تلك المستخدمة فى حساب معاملات الارتباط . كما أن معامل ارتباط الرتب لكندال يمكن أن يمتد استخدامه إلى معاملات الارتباط الجزئية ، أى الارتباط بين متغيرين بعد عزل تأثير متغير ثالث .

ولكن يصعب استخدام أي من هذه المعاملات إذا كان عدد أفراد العينة كبيرا وبخاصة إذا كانت بعض الرتب مكررة . وهنا ربما يلجأ الباحث إلى استخدام معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون إذا وجد أن البيانات تحقق فروض هذا المعامل إلى حد ما .

والاعتبار الآخر الذي يجب أن يراعيه الباحث عند اختيار مقياس العلاقة المناسب هو مدى اهتمامه بطبيعة المتغيرين موضع الدراسة . ولتوضيح هذه النقطة في الحالة التي يكون فيها كل من المتغيرين من المستوى الرتبي نعرض المثال الآتي :-

يفترض جيلفورد أننا حاولنا التنبؤ بطول فترة المرض النفسي لمجموعة تتكون من ١٠ أفراد من المرضى على أساس درجاتهم المرتفعة أو المتوسطة أو المنخفضة في استبيان معين . فهنا يمكن اعتبار أن كلا من المتغيرين (درجات الاستبيان ، وطول فترة المرض) من المستوى الرتبي .

وهذه البيانات موضحة بالجدول رقم (٤٧) الآتي :

طول فترة المرض	درجات الاستبيان: مرتفعة	متوسطة	منخفضة
أكثر من عامين	—	٤	—
من عام إلى عامين	—	—	٤
أقل من عامين	٢	—	—

جدول رقم (٤٧)

فإذا حسبنا قيمة المقياس الإحصائي (ج) لهذه البيانات نجد أنه = صفر . وبذلك يكون كل من معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال ، ومعامل ارتباط الرتب لكندال = صفرا . وهذا يدل على عدم وجود اقتران بين درجات الاستبيان وطول فترة المرض لهذه المجموعة من الأفراد .

ولكن بالتأمل فى جدول رقم (٤٧) يتضح أنه يوجد اقتران نظراً لأن الدرجات المرتفعة فى الاستبيان تقترن بالفترة القصيرة للمرض (أقل من عامين). والدرجات المتوسطة تقترن بالفترة الطويلة (أكثر من عامين)، والدرجات المنخفضة تقترن بالفترة المتوسطة (من عام إلى عامين). ولا توجد أى استثناءات لهذه القاعدة فى المجموعة بوجه عام. والسبب فى عدم تأثر هذه المقاييس بهذه العلاقة هو أنها أكثر تأثراً بالاقتران المطرد monotonic الذى يمكن أن يوجد فى حالة ما إذا كان كل من المتغيرين من النوع الرتبى. وبالرغم من أنه فى هذا المثال توجد درجة معينة من الاقتران بين المتغيرين، إلا أن هذا الاقتران ليس مطرداً، لأن ارتفاع الدرجات فى الاستبيان لا يقترن باطراد (زيادة أو نقصان) طول فترة المرض.

ولذلك إذا لجأنا إلى إيجاد قيمة أحد المقاييس المستخدمة فى حالة المتغيرات التى من النوع الاسمى مثل معامل التنبؤ لجتمان (الذى عرضنا له فى الفصل الثامن) والذى يغفل الخصائص الترتيبية للمتغيرين، سوف نجد أن قيمته فى هذا المثال تساوى الواحد الصحيح مما يدل على اقتران تام، بمعنى أنه بمجرد معرفتنا درجة الفرد فى أحد المتغيرين يمكننا التنبؤ بدقة تامة بدرجته فى المتغير الآخر.

تمارين على الفصل التاسع

١ — طلب باحث من مجموعة من المحكمين ترتيب بعض المجالات التى تسهم فى التكيف الأسرى . واختار الباحث المجالات التى حازت أعلى التقديرات . ثم اختار ١٠٧ من الزوجات والأزواج وطلب منهم ترتيب هذه المجالات بحسب إسهامها الفعلى فى تكيفهم الأسرى، وبذلك حصل الباحث على ترتيب آخر مستقل عن الترتيب الذى قدره المحكمون . وفيما يلى كل من مجموعتى الرتب :

مجال الاهتمام .	الرتب التى قدرها المحكمون (س)	الرتب التى قدرها الزوجين (ص)
إظهار العطف المتبادل	١٠	٩
وضع خطة المستقبل	٩	٦
وضع خطة للتوفير	٨	١٠
تعليم الأطفال	٧	١
وضع خطة لميزانية الأسرة	٦	٨
وضع خطة لتنشئة الأطفال	٥	٧
وضع خطة لتنسيق المنزل	٤	٤
تنظيم وإعداد الوجبات	٣	٥
شراء لوازم الأسرة	٢	٣
تنظيف المنزل	١	٢

احسب باستخدام معامل الاقتران الرتبي لجودمان وكروسكال درجة اتفاق مجموعتى الرتب الخاصة بالتكيف الأسرى .

٢ — فيما يلى مجموعتين من الرتب لمجموعة تتكون من ١٢ فردا فى متغيرين س ، ص :

الفرد	رتب س	رتب ص
١	١,٠	٨,٠
٢	٢,٥	٦,٥
٣	٢,٥	٤,٥
٤	٤,٥	٢,٠
٥	٤,٥	١,٠
٦	٦,٠	٣,٠
٧	٩,٠	٤,٥
٨	٧,٥	٦,٥
٩	١٠,٠	٩,٠
١٠	٧,٥	١٠,٠

(أ) احسب معامل ارتباط الرتب لكندال ، وفسر القيمة الناتجة .

(ب) احسب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وقارن بينها وبين القيمة التي حصلت عليها في (أ) .

٣ — حول الدرجات الآتية إلى رتب ، ثم احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بطريقتين ، وقارن بين الناتجين .

س	٤	٤	٧	٧	٧	٩	١٦	١٧	٢١	٢٥
ص	٨	١٦	٨	٨	١٦	٢٠	١٢	١٥	٢٥	٢٠

٤ — قام ثلاثة من المحكمين بترتيب درجات سبعة من الطلاب في اختبار ما كالآتي :

المحكم	الطالب						
	ا	ب	جـ	د	هـ	و	ل
س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	٢	٣	٤	٥	١	٧	٦
ع	٥	٤	١	٢	٣	٦	٧

(ا) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين كل محكمين ، وقارن بين القيم الناتجة .

(ب) احسب متوسط معاملات الارتباط التي حصلت عليها في ا .

(جـ) احسب معامل الاتفاق لكندال وفسر القيمة الناتجة .

(د) تحقق من العلاقــــة بين متوسط معاملات ارتباط الرتب لسبيرمان ، ومعامل الاتفاق لكندال .

٥ ـ احسب معامل الاتساق لكندال للبيانات الآتية :

	ا	ب	جـ	د	هـ
ا		١	صفر	صفر	١
ب	صفر		١	١	١
جـ	١	صفر		صفر	صفر
د	١	صفر	١		١
هـ	صفر	صفر	١	صفر	

٦ — قام أحد المشرفين بترتيب ستة من العمال ا ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و من حيث دقة أدائهم فى العمل باستخدام طريقة الموازنات الثنائية . كما يأتى :

ا ← ب ، ا ← جـ ؛ ا ← د ، هـ ← ا ، و ← ا ، ب ← جـ ، د ← ب ، ب ← هـ ، ب ← و ، جـ ← د جـ ← هـ ، و ← جـ ، د ← هـ ، د ← و ، هـ ← و .

احسب معامل الاتساق لهذه البيانات ، وفسر القيمة الناتجة .

الفصل العاشر

مقاييس العلاقة

إذا كان أحد المتغيرين من المستوى
الاسمى والآخر من المستوى الرتبى

نموذج ويلكوكسون للاقتران الاسمى ــ الرتبى

طريقة حساب معامل ويلكوكسون
إذا اشتمل المتغير الاسمى على قسمين

طريقة حساب معامل ويلكوكسون
إذا اشتمل المتغير الاسمى على أكثر من قسمين

مقدمة :

عرضنا فى الفصول الثلاثة السابقة مقاييس الاقتران بين متغيرين كل منهما إما من المستوى الفترى أو المستوى الاسمى أو المستوى الرتبى . ولكن الباحث لا يضمن فى جميع الأحوال أن يكون المتغيران موضع البحث لهما نفس ميزان أو مستوى القياس . فأحياناً يود الباحث أن يوجد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى للرتبى ، أو أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الفترى أو النسبى ، أو أحدهما من المستوى الرتبى والآخر من المستوى الفترى .

وسوف نقتصر فى هذا الفصل على عرض مقاييس الاقتران فى الحالة الأولى، أى عندما يكون أحد المتغيرين من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الرتبى . أما مقاييس الاقتران فى الحالتين الأخريين فسوف نعرض لها بالتفصيل فى الفصلين التاليين .

نموذج ويلكوكسون للاقتران الإسمى — الرتبى :

The Wilcoxon Model for Nominal – Ordinal Association

عندما يود الباحث أن يوجد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الرتبى فإن الطريقة المعتادة هى أن يستخدم مقياساً إحصائياً يعتمد على متغيرين من المستوى الاسمى . وهنا يتغاضى الباحث عن الميزان أو المستوى الرتبى للمتغير الآخر ويعتبره من المستوى الاسمى . ومن ثم يوجد معامل التنبؤ لجتمان (λ) الذى سبق أن عرضنا له فى الفصل الثامن . وهنا ربما يبرر الباحث ذلك بأنه لا يستطيع إيجاد علاقة بين متغيرين أحدهما لاتتوافر فيه خاصية الترتيب .

ويرى عريان ١٩٦٨ أنه . إذا فحصنا هذا التبرير نجد أنه غير منطقى ويتضح ذلك إذا نظرنا

إلى جدول الاقتران رقم (٤٨) الآتي ، وهو يشتمل على متغيرين أحدهما من المستوى الاسمي والآخر من المستوى الرتبي .

المتغير الاسمي (أقسام المتغير س)	المتغير الرتبي (رتب المتغير ص)					المجموع
	٥	٤	٣	٢	١	
أ	١٠	صفر	١٠	صفر	١٠	٣٠
ب	صفر	١٠	صفر	١٠	صفر	٢٠
المجموع	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	٥٠

جدول رقم (٤٨)
جدول اقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى
الاسمي والاخر من المستوى الرتبي

فاذا تغاضينا عن ترتيب المتغير (ص) فى هذا الجدول واعتبرناه متغيرا من المستوى الاسمي ثم حسبنـــا قيمة معامل التنبؤ لجتمان (λ) باستخدام الصورة التى عرضنا لها فى الفصل الثامن وهى :

$$\lambda = \frac{ع\,ت_{ف} + ع\,ت_{ع} - (ت'_{ف} + ت'_{ع})}{٢\,ن - (ت'_{ف} + ت'_{ع})}$$

$$\text{نجد أن } \lambda = \frac{٢٠ + ٥٠ - (٣٠ + ١٠)}{١٠٠ - (٣٠ + ٢٠)}$$

$$= \frac{٣٠}{٦٠} = ٠,٥٠$$

وإذا نظرنا إلى جدول آخر رقم (٤٩) الآتي :

المتغير الاسمي (أقسام المتغير س)	المتغير الرتبي (رتب المتغير ص)					المجموع
	٥	٤	٣	٢	١	
أ	١٠	١٠	١٠	صفر	صفر	٣
ب	صفر	صفر	صفر	١٠	١٠	٢٠
المجموع	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	٥٠

جـــدول رقم (٤٩)

وتغاضينا أيضا عن ترتيب المتغير ص في هذا الجدول واعتبرناه متغيرا من المستوى الاسمي ، وحسبنا قيمة λ نجد أن :

$$\lambda = \frac{(١٠ + ٣٠) - ٥٠ + ٢٠}{(١٠ + ٣٠) - ١٠٠}$$

$$= \frac{٣٠}{٦٠} = ٠,٥٠$$

في كلتا الحالتين استطعنا أن نقلل خطأ تخمين أي من المتغيرين باستخدام الآخر بقدر ٥٠ ٪ . ولكن إذا قارنا جدول رقم (٤٨) بجدول رقم (٤٩) يمكن أن نلاحظ أنهما يوضحان نمطين مختلفين من العلاقات . ففي كل من الحالتين يمكن تخمين عضوية أو انتماء الفرد لمجموعة معينة على الميزان الاسمي باستخدام رتبته على الميزان الرتبي . وسوف يكون هناك أخطاء في تخمين الرتب الفعلية للأفراد بمعلومية انتمائهم إلى الأقسام المختلفة . ولكن عند تخمين الرتب النسبية ـ أي الأعلى أو الأدنى ـ بدلا من الرتب الفعلية يمكن أن نلاحظ الفرق بين الجدولين .

فإذا نظرنا إلى الجدول رقم (٤٨) نجد أن رتب جميع أفراد القسم ا أعلى من رتب أفراد القسم ب ، بينما لا نجد مثل هـــذه العلاقة الترتيبية فى الجدول رقم (٤٩) .

ووجود مثل هذه العلاقة يدل على أن هناك درجة أكبر من الاقتران فى الجدول رقم (٤٨) .

والفكرة الرئيسية هنا هى أن الميزان الاسمى والميزان الرتبى يقترنان أو يرتبطان إذا كان الأفراد الذين ينتمون إلى كل قسم من أقسام المتغير الاسمى يميل ترتيبهم إلى أن يكون مرتفعا أو منخفضا بدرجة متسقة عن الأفراد الذين ينتمون إلى الأقسام الأخرى .

وهذا هو نموذج ويلكوكسون Wilcoxon الذى يمكن استخدامه فى وصف درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الرتبى . وهو تعديل لمقياس إشارات الرتب لويلكوكسون Wilcoxon Signed - Ranks Test ، وقد بنيت فكرة هذا النموذج على نفس الفكرة التى بنيت عليها مقاييس الاقتران التى عرضنا لها فى الفصلين السابقين . وهى فكرة التخمين أو التنبؤ ونظراً لأن أحد المتغيرين فى هذه الحالة يكون من المستوى الرتبى ، فإن معامل ويلكوكسون يشبه معامل الاقتران الرتبى لجودمان وكروسكال من حيث إنه يتطلب تخمين رتب الأفراد موضع الدراسة . ولكن يختلف معامل ويلكوكسون عن معامل جودمان وكروسكال فى أننا لانستطيع تخمين رتبة فرد معين بالنسبة إلى أحد المتغيرين من رتبته بالنسبة إلى المتغير الآخر (لأن أحد المتغيرين أصبح من المستوى الاسمى) ، وإنما يجب أن نخمن رتبة الفرد فى المتغير الرتبى من انتمائه إلى أحد أقسام المتغير الاسمى .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث فى حساب معامل ويلكوكسون الذى يرمز له بالحرف اليونانى Θ (ويقرأ ثيتا) نعرض ما يلى :

لنفرض أننا استطعنا ترتيب عشرة من الطلبة والطالبات من حيث الدرجة النسبية للعدوانية فى مجموعة من المواقف الاجتماعية . وهذه البيانات موضحة فى الجدول الآتى رقم (٥٠) :

الجنس	الرتب بالنسبة للعدوانية									
	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ذكور	١	١	١	١	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر
إناث	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر	١	١

جدول رقم (٥٠)
جدول اقتران بين رتب العدوانية و الجنس

والسؤال الآن : ما هى درجة اقتران الجنس برتب العدوانية ، أى ماهى درجة تنبؤنا بالرتب النسبية للعدوانية بمعلومية جنس الطالب ؟

ويمكن الإجابة على ذلك بموازنة رتب كل فرد فى إحدى مجموعتى الذكور أو الإناث برتب جميع الأفراد فى المجموعات الأخرى التى تكون الميزان الاسمى .

ونظراً لأن لدينا فى هذا المثال مجموعتين فقط (مجموعة الذكور ومجموعة الإناث) فإنه يكون لدينا مجموعتان فقط من الموازنات . إذ يجب موازنة رتبة كل طالب برتب جميع الطالبات .

فإذا بدأنا بالطالب الأول الذى رتبته ١٠ فإننا نجد أن هناك ٤ طالبات رتبهن أقل منه (الرتب ٦ ، ٤ ، ٢ ، ١) ، ولا توجد طالبات تفوق رتبهن رتبة هذا الطالب ، فتكون درجتا هذا الطالب هما ٤ (أقل منه) ، صفر (أعلى منه) .

ويجب أن نكرر نفس الطريقة لكل طالب .

فالطالب الثانى الذى رتبته ٩ درجتاه هما ٤ (أقل منه) ، صفر (أعلى منه) .

والطالب الثالث الذى رتبته ٨ درجتاه هما ٤ (أقل منه) ، صفر (أعلى منه) .

والطالب الرابع الذى رتبته ٧ درجتاه هما ٤ (أقل منه) ، صفر (أعلى منه) .

ولكن الطالب الخامس الذى رتبته ٦ درجتاه هما ٣ (أقل منه) ، ١ (أعلى منه) .

والطالب الثامن الذى رتبته ٣ درجتاه هما ٢ (أقل منه) ، ٢ (أعلى منه) ، وهكذا .

فإذا جمعنا تكرار الطالبات الأقل من كل طالب ، وكذلك تكرار الطالبات الأعلى من كل طالب ، ثم أوجدنا الفرق بين التكرارين فإننا نحصل على معامل الرتب النسبية بين الجنسين :

أى أن :

مجموع تكرارات (الأقل) = ٤ + ٤ + ٤ + ٣ + ٣ + ٢ = ٢١

مجموع تكرارات (الأعلى) = ١ + ٢ = ٣

الفرق بين المجموعين = مجموع تكرار (الأقل)

— مجموع تكرار (الأعلى)

= ٢١ — ٣ = ١٨

وإذا قسمنا هذا الفرق على العدد الكلى للموازنات فإننا نحصل على معامل الاقتران المطلوب .

أى أن معامل الاقتران

$$= \frac{\text{مجموع تكرارات (الأقل)} - \text{مجموع تكرارات (الأعلى)}}{\text{المجموع الكلى للموازنات}}$$

$$= \frac{٢١ - ٣}{٢١ + ٣} = \frac{١٨}{٢٤} = ٠,٧٥$$

وإذا بدأنا الموازنات بالطالبات بدلا من الطلبة ، فإننا سوف نحصل على نفس النتائج فيما عدا أن الإشارة سوف تكون مختلفة .

فمثلا الطالبة الخامسة التى رتبتها ٦ درجتيها هما ٤ (أعلى منها) ، ٢ (أقل منها) .

والطالبة السابعة التى رتبتها ٤ درجتيها هما ٥ (أعلى منها) ، ١ (أقل منها). وهكذا .

$$\text{وبذلك يكون معامل الاقتران} = \frac{٣ - ٢١}{٣ + ٢١}$$

$$= \frac{-١٨}{٢٤} = -٠,٧٥$$

ومعنى هذا أنه عند موازنة رتب الطلبة والطالبات تكون رتب الطلاب أعلى فى العدوانية فى حالات أكثر بنسبة ٧٥ ٪ من الرتب الأقل .

ولا يختلف بالطبع مقدار الاقتران سواء بدأنا الموازنات بالطلاب أم بالطالبات ، وإنما يختلف هذا المقدار فقط فى الإشارة .

ولكن نظرا لأن أحد المتغيرين فقط من المستوى الرتبى فإن الإشارة تصبح لا معنى لها ، فهى لاتدل إلا على المجموعة التى بدأنا منها الموازنات . فإذا أهملنا الإشارة ، يمكننا أن نتوصل إلى صورة معامل ويلكوكسون وهى :

$$\Theta = \frac{|\text{مجموع تكرارات (الأقل)} - \text{مجموع تكرارات (الأعلى)}|}{\text{المجموع الكلى للموازنات}} \quad \ldots (١)$$

ويدل الخطان الرأسيان على أننا نأخذ القيمة المطلقة للفرق ، أى قيمة الفرق بغض النظر عن الإشارة .

فإذا كانت رتب جميع الطلاب أعلى من أى من الطالبات كما هو مبين بالجدول الآتى رقم (٥١) :

الجنس	الرتب بالنسبة للمدوانية									
	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ذكور	١	١	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
إناث	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	١	١	١

جدول رقم (٥١)

فإن درجات الطلاب تكون كالآتى :

مجموع تكرارات (الأقل) = ٢٤

مجموع تكرارات (الأعلى) = صفر

وحينئذ تكون $\Theta = \frac{|\text{٢٤} - \text{صفر}|}{\text{صفر} + \text{٢٤}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{٢٤}} = ١$

وهذا يدل على اقتران تام بين المتغيرين .

أما إذا كان توزيع الطلبة والطالبات فى المدوانية كما هو مبين فى الجدول الآتى رقم (٥٢) :

الجنس	الرتب بالنسبة للمدوانية									
	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ذكور	١	صفر	١	صفر	١	١	صفر	١	صفر	١
إناث	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر

جدول رقم (٥٢)

فإن درجات الطلاب تكون كالآتى :

مجموع تكرارات (الأقل) = ١٢

مجموع تكرارات (الأعلى) = ١٢

وحينئذ تكون $\Theta = \frac{|١٢ - ١٢|}{١٢ + ١٢} = \frac{\text{صفر}}{٢٤} = $ صفر

وهذا يدل على عدم وجود أى اقتران بين المتغيرين . وتعتبر Θ مقياسا للاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الرتبى . ويمكن أن تتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح . ويمكن تفسير قيمة Θ فى ضوء الموازنات بين رتب الأفراد الذين ينتمون إلى الأقسام المختلفة للمتغير الاسمى . ونحصل عليها بإيجاد الفرق بين نسبة الموازنات التى يتفوق فيها أفراد إحدى المجموعات أو أحد الأقسام ونسبة الموازنات التى يتفوق فيها أفراد مجموعة أخرى أو قسم آخر .

طريقة أخرى لحساب Θ :

يمكن إجراء تعديل طفيف على الطريقة السابقة لكى نحصل على مقياس إحصائى يمكن تعميمه فى حالة الرتب غير المكررة أو التى يكون بعضها مكررا . والصورة الرياضية المستخدمة فى هذه الحالة هى :

$$\Theta = \frac{\text{مجـ } ف_{ن}}{ت^{٢}} \quad \dots \quad (٣)$$

حيث $ف_{ن} = | ت_{ق} - ت_{ع} |$

أى القيمة المطلقة للفرق بين تكرارات (الأقل) وتكرارات (الأعلى) لكل قسمين من أقسام المتغير الاسمى .

ويمكن حساب قيمة $ت_{م}$ بأن نضرب التكرار الكلى لكل قسم من أقسام المتغير الاسمى فى تكرار كل قسم من الأقسام الأخرى مثنى مثنى ، ثم نجمع حواصل الضرب الناتجة . وهذا المجموع يساوى المجموع الكلى للموازنات التى حصلنا عليها فيما سبق .

ويفترض عند استخدام هذه الصورة أن يكون المتغير الرتبى متصلا ، وأن يكون تكرار بعض الرتب هو نتيجة لعدم الدقة الكاملة فى التصنيف ، أى نتيجة لعدم إمكانية تحديد أى الملاحظات تكون رتبتها أعلى وأيها تكون رتبتها أقل .

ولذلك فإن نصف عدد الرتب المكررة يطرح من تكرارات (الأقل) ، والنصف الآخر يطرح من تكرارات (الأعلى) ، أى :

| تكرارات (الأقل) — ½ عدد الرتب المكررة | — | تكرارات (الأعلى) — ½ عدد الرتب المكررة | .

وبذلك فإن عدد الرتب المكررة لا يكون له تأثير على قيمة Θ لأنها تحذف نتيجة لعملية الطرح .

أى أنه يمكننا حساب قيمة Θ دون اعتبار للرتب المكررة .

ولتوضيح الخطوات التي يمكن أن يتبعها الباحث عند حساب قيمة Θ بهذه الطريقة نرجع إلى البيانات الموضحة بجدول رقم (٥٠) .

الخطوة الأولى : يحسب ت$_{ق}$ وذلك بأن يضرب كل تكرار في الجدول رقم ٥٠ (جميع القيم في هذه الحالة = الواحد الصحيح) في مجموع التكرارات التي تقع أسفل وإلى يسار هذا التكرار ، ثم يجمع حواصل الضرب الناتجة .

فمثلا بالنسبة للرتبة ١٠ :

(١) [صفر + صفر + صفر + ١ + صفر + ١ + صفر + ١ + ١]

أي   (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٩ :   (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٨ :   (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٧ :   (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٥ :   (١) (٣) = ٣

وبالنسبة للرتبة ٣ :   (١) (٢) = ٢

المجموع   ٢١

(وينبغي أن نلاحظ أننا أهملنا الرتب التي تكرارها صفر وهي الرتب ٦ ، ٤ ، ٢ ، ١) .

الخطوة الثانية : يحسب ت$_{ع}$ وذلك بأن يضرب كل تكرار في الجدول رقم (٥٠) في مجموع التكرارات التي تقع أسفل وإلى يمين هذا التكرار ، ثم يجمع حواصل الضرب الناتجة .

$$\theta = \frac{\text{مجـ } ف_{ن}}{ت_{٢}} \quad \ldots \qquad (٢)$$

$$\text{حيث } ف_{ن} = \left| ت_{ق} - ت_{ع} \right|$$

أى القيمة المطلقة للفرق بين تكرارات (الأقل) وتكرارات (الأعلى) لكل قسمين من أقسام المتغير الاسمى .

ويمكن حساب قيمة $ت_{٢}$ بأن نضرب التكرار الكلى لكل قسم من أقسام المتغير الاسمى فى تكرار كل قسم من الأقسام الأخرى مثنى مثنى ، ثم نجمع حواصل الضرب الناتجة . وهذا المجموع يساوى المجموع الكلى للموازنات التى حصلنا عليها فيما سبق .

ويفترض عند استخدام هذه الصورة أن يكون المتغير الرتبى متصلا ، وأن يكون تكرار بعض الرتب هو نتيجة لعدم الدقة الكاملة فى التصنيف ، أى نتيجة لعدم إمكانية تحديد أى الملاحظات تكون رتبتها أعلى وأيها تكون رتبتها أقل .

ولذلك فإن نصف عدد الرتب المكررة يطرح من تكرارات (الأقل) ، والنصف الآخر يطرح من تكرارات (الأعلى) ، أى :

| تكرارات (الأقل) — ½ عدد الرتب المكررة | — | تكرارات (الأعلى) — ½ عدد الرتب المكررة | .

وبذلك فإن عدد الرتب المكررة لا يكون له تأثير على قيمة θ لأنها تحذف نتيجة لعملية الطرح .

أى أنه يمكننا حساب قيمة θ دون اعتبار للرتب المكررة .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث عند حساب قيمة ⊖ بهذه الطريقة نرجع إلى البيانات الموضحة بجدول رقم (٥٠) .

الخطوة الأولى : يحسب ت ق وذلك بأن يضرب كل تكرار فى الجدول رقم ٥٠ (جميع القيم فى هذه الحالة = الواحد الصحيح) فى مجموع التكرارات التى تقع أسفل وإلى يسار هذا التكرار ، ثم يجمع حواصل الضرب الناتجة .

فمثلا بالنسبة للرتبة ١٠ :

(١) [صفر + صفر + صفر + ١ + صفر + ١ + صفر + ١ + ١]

أى (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٩ : (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٨ : (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٧ : (١) (٤) = ٤

وبالنسبة للرتبة ٥ : (١) (٣) = ٣

وبالنسبة للرتبة ٣ : (١) (٢) = ٢

المجموع ٢١

(وينبغى أن نلاحظ أننـا أهملنا الرتب التى تكرارها صفر وهى الرتب ٦ ، ٤ ، ٢ ، ١) .

الخطوة الثانية : يحسب ت ع وذلك بأن يضرب كل تكرار فى الجدول رقم (٥٠) فى مجموع التكرارات التى تقع أسفل وإلى يمين هذا التكرار ، ثم يجمع حواصل الضرب الناتجة .

فبالنسبة للرتبة ١٠ : (١) (صفر) = صفر

وبالنسبة الرتبة ٩ : (١) (صفر) = صفر

وبالنسبة الرتبة ٨ : (١) (صفر) = صفر

وبالنسبة للرتبة ٧ : (١) (صفر) = صفر

وبالنسبة الرتبة ٥ : (١) (صفر) = ١

وبالنسبة للرتبة ٣ : (١) (٢) = ٢

المجموع ٣

الخطوة الثالثة : يوجد الفرق $ف_{ن} = |ت_{ق} \quad ت_{ع}|$

$= |٢١ - ٣|$

$= |١٨| = ١٨$

ونظرا لأن المتغير الاسمى فى هـــذا المثال يتكون من قسمين فقط فإنه لا توجد موازنات أخرى . ولذلك فإنه يوجد فقط فرق واحد ($ف_{ن}$) .

وتكون مجـ $ف_{ن} = ف_{ن} = ١٨$

الخطوة الرابعة : يحسب قيمة $ت_{٣}$ كالآتى :

يضرب تكرار الذكور فى تكرار الإناث .

أى أن $ت_{٣} = (٦)(٤) = ٢٤$

الخطوة الخامسة : يحسب قيمة Θ باستخدام الصورة رقم (٢) السابقة وهى :

$$\Theta = \frac{مجـ\ ف_{ن}}{ت_{٣}}$$

$$= \frac{١٨}{٢٤} = ٠,٧٥$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام الطريقة السابقة .

حساب قيمة ⊙ إذا اشتمل المتغير الاسمى على أكثر من قسمين :

يمكن أن تتضح بدرجة أفضل كيفية استخدام وتطبيق الصورة السابقة لحساب قيمة ⊙ إذا اشتمل المتغير الاسمى على أكثر من قسمين، ولذلك سنعرض المثال الآتى لمتغيرين أحدهما من المستوى الرتبى ، والآخر من المستوى الاسمى الذى يشتمل على أربعة أقسام .

بفترض ضربنا أننا قمنا بتصنيف مجموعة تتكون من ٤٠ فردا بحسب حالتهم الاجتماعية . واستطعنا أن نقدر لكل منهم رتبة فى التوافق الاجتماعى . وهذه البيانات موضحة فى الجدول الآتى رقم (٥٣) :

الحالة الاجتماعية	الرتبة فى التوافق الاجتماعى					المجموع الكلى
	٥	٤	٣	٢	١	
أعزب	١	٢	٥	٢	صفر	١٠
متزوج	١٠	٥	٥	صفر	صفر	٢٠
أرمل	صفر	صفر	٢	٢	١	٥
مطلق	صفر	صفر	صفر	٢	٣	٥

جدول رقم (٥٣)

جدول اقتران بين الحالة الاجتماعية والتوافق الاجتماعى

فإذا أردنا تحديد درجة الاقتران بين الحالة الاجتماعية والتوافق الاجتماعى لهذه العينة من الأفراد، فإننا نحسب قيمة ⊖ بنفس الطريقة السابقة كالآتى :

الخطوة الأولى : نحسب قيمة كل من $ت_ق$ ، $ت_ع$ لكل موازنة ثنائية ممكنة ، وعدد هذه الموازنات ٦ (أى توافيق ٤ أقسام مثنى مثنى) .

الموازنة الأولى : موازنة الفرد الأعزب بالفرد المتزوج :

نحسب قيمة $ت_ق$ كالآتى :

بالنسبة للرتبة ٥ : (١) (٥ + ٥) = ١٠

بالنسبة للرتبة ٤ : (٢) (٥) = ١٠

بالنسبة للرتبة ٣ : (٥) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ٢ : (٢) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ١ : (صفر) (صفر) = صفر

المجموع ٢٠

ونحسب قيمة $ت_ع$ لهذه الموازنة كالآتى :

بالنسبة للرتبة ٥ : (١) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ٤ : (٢) (١٠) = ٢٠

بالنسبة للرتبة ٣ : ٥ (١٠ + ٥) = ٧٥

بالنسبة للرتبة ٢ : (١٠ + ٥ + ٥) = ٤٠

بالنسبة للرتبة ١ : صفر (١٠ + ٥ + ٥ + صفر) = صفر

المجموع ١٢٥

ثم نحسب قيمة $ع ف_ن$ لهذه الموازنة كالآتى :

$$ف_ن = | ت_ق - ت_ع |$$

$$= | ٢٠ - ١٣٥ | = | - ١١٥ | = ١١٥ .$$

<u>الموازنة الثانية</u> : موازنة الفرد الأعزب بالفرد الأرمل .

نحسب قيمة $ت_ق$ بنفس الطريقة :

بالنسبة للرتبة ٥ : (١) (٢ + ٢ + ١) = ٥

بالنسبة للرتبة ٤ : (٢) (٢ + ٢ + ١) = ١٠

بالنسبة للرتبة ٣ : (٥) (٢ + ١) = ١٥

بالنسبة للرتبة ٢ : (٢) (١) = ٢

بالنسبة للرتبة ١ : (صفر) (صفر) = صفر

المجموع ٣٢

وكذلك نحسب قيمة $ت_ع$ كالآتى :

بالنسبة للرتبة ٥ : (١) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ٤ : (٢) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ٣ : (٥) (صفر) = صفر

بالنسبة للرتبة ٢ : (٢) (٢) = ٤

بالنسبة للرتبة ١ : (صفر) (٢ + ٢) = صفر

المجموع ٤

ثم نحسب قيمة $ف_ن$ باستخدام الصورة :

$$ف_ن = | ت_ق - ت_ع |$$

$$= | ٣٢ - ٤ | = | ٢٨ | = ٢٨ .$$

الموازنة الثالثة : موازنة الفرد الأعزب بالفرد المطلق .

نحسب قيمة $ت_{ق}$ كالآتي :

بالنسبة للرتبة ٥ :	(١) (٢ + ٣) = ٥
بالنسبة للرتبة ٤ :	(٢) (٢ + ٣) = ١٠
بالنسبة للرتبة ٣ :	(٥) (٢ + ٣) = ٢٥
بالنسبة للرتبة ٢ :	(٢) (٣) = ٦
بالنسبة للرتبة ١ :	(صفر) (صفر) = صفر
المجموع	٤٦

وكذلك نحسب قيمة $ت_{ع}$ كالآتي :

بالنسبة للرتبه ٥ :	(١) (صفر) = صفر
بالنسبة للرتبة ٤ :	(٢) (صفر) = صفر
بالنسبة للرتبة ٣ :	(٥) (صفر) = صفر
بالنسبة للرتبة ٢ :	(٢) (صفر) = صفر
بالنسبة للرتبة ١ :	(صفر) (٢) = صفر
المجموع	صفر

ثم نحسب قيمة $ف_{ن}$:

$$ف_{ن} = |ت_{ق} - ت_{ع}|$$

$$= |٤٦ - صفر| = ٤٦$$

الموازنة الرابعة : موازنة الفرد المتزوج بالفرد الأرمل .

وباستخدام نفس الطريقة نحصل على :

$ت_{ق}$ = ٩٠

، $ت_{ع}$ = صفر

، $ف_{ن}$ = ٩٠

<u>الموازنة الخامسة</u> : موازنة الفرد المتزوج بالفرد المطلق .

$ت_{ق}$ = ١٠٠

، $ت_{ع}$ = صفر

، $ف_{ن}$ = ١٠٠

<u>الموازنة السادسة</u> : موازنة الفرد الأرمل بالفرد المطلق .

$ت_{ق}$ = ١٦

، $ت_{ع}$ = ٢

، $ف_{ن}$ = ١٤

والخطوة الثانية : نوجد المجموع الكلى الموازنات وذلك بأن نضرب التكرار الكلى لكل قسم من أقسام متغير الحالة الاجتماعية مثنى مثنى لنحصل على $ت_{٢}$ كالآتى :

$ت_{٢}$ = (١٠) (٢٠) + (١٠) (٥) + (١٠) (٥) + (٢٠) (٥)
+ (٢٠) (٥) + (٥) (٥) = ٥٢٥ .

والخطوة الثالثة : نحسب قيمة ⊖ باستخدام الصورة رقم ( ) السابقة وهى :

$$\Theta = \frac{\text{مجـ ف}_{\text{ن}}}{\text{ت}_{٢}}$$

$$= \frac{١١٥ + ٢٨ + ٤٦ + ٩٠ + ١٠٠ + ١٤}{٥٢٥}$$

$$= \frac{٣٩٣}{٥٢٥} = ٠,٧٥ \text{ تقريباً .}$$

أي أنه يمكننا التنبؤ بالتوافق الاجتماعي لمجموعة الأفراد في هذا المثال بمعلومية حالتهم الاجتماعية بدرجة جيدة . وتدل قيمة Θ على أنه توجد فروق منتظمة في التوافق الاجتماعي في ٧٥٪ من الموازنات بين الأفراد الذين يختلفون في حالتهم الاجتماعية .

ولذلك يمكن للباحث استخدام هذا المعامل أو المقياس الإحصائي إذا أراد معرفة مقدار العلاقة بين متغيرين أحدهما من المستوى الرتبي والآخر من المستوى الاسمي .

وفيما يلي ملخص للخطوات التي يمكن أن يتبعها الباحث في حساب قيمة Θ :

١ — ينظم التكرارات في جدول اقتران .

٢ — يوازن أقسام المتغير الاسمي فيما بينها مثنى مثنى ، ويسجل تكرارات القسم الآخر التي تكون رتبتها أقل من رتب القسم المطلوب ($\text{ت}_{\text{ق}}$) ، وكذلك تكرارات القسم الآخر التي تكون رتبها أعلى من رتب القسم المطلوب في كل حالة ($\text{ت}_{\text{ع}}$) .

٣ — يحسب الفرق بين $\text{ت}_{\text{ق}}$ ، $\text{ت}_{\text{ع}}$ بغض النظر عن إشارة الناتج لكل قسمين من أقسام المتغير الاسمي ، ثم يجمع الفروق الناتجة .

٤ - يحسب العدد الكلي للموازنات الممكنة $ت_٢$

٥ — يحسب قيمة Θ باستخدام الصورة :

$$\Theta = \frac{مجـ ف_ن}{ت_٢}$$

مقاييس إحصائية أخرى :

في الحقيقة لا توجد مقاييس إحصائية أخرى يمكن استخدامها في إيجاد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمي والآخر من المستوى الرتبي . ولكن يمكن للباحث — كما ذكرنا في مستهل هذا الفصل — أن ينظر إلى المتغير الرتبي على أنه متغير اسمي ويحسب معامل التنبؤ لجتمان (λ) ، غير أن قيمة هذا المعامل سوف تكون أقل حساسية في الكشف عن درجة الاقتران الفعلي بين المتغيرين الأصليين .

تمارين على الفصل العاشر

١ — حاول أحد الباحثين دراسة العلاقة بين رتب دخول أسر مجموعة من الطلاب ، والصفات التي يرى كل طالب في المجموعة أنها يجب أن تتوافر في صديقه الذي يود اختياره . لذلك صمم الباحث استبياناً طلب فيه من عينة من طلاب إحدى الكليات أن يحدد هذه الصفات . وفيما يلي النتائج التي حصل عليها :

الصفة المفضلة	رتبة دخل الأسرة				التكرار الكلي
	٤	٣	٢	١	
(أ) الرغبة في الصداقة	٥٢	٢٨	٤٠	٣٤	١٥٤
(ب) المظهر الخارجي	٧	٩	١٦	١٠	٤٢
(جـ) احترام الصداقة	٨	٤	١٠	٩	٣١
(د) المستوى التعليمي	١٢	٦	٧	٥	٣٠

أوجد درجة العلاقة بين هذين المتغيرين ، وفسر القيمة الناتجة .

٢ — احسب معامل ويلكوكسون للعلاقة بين الجنس وترتيب الأفراد في صفة التحرر لعينة من طلاب وطالبات إحدى الكليات كالآتي :

الجنس	الرتب									
	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ذكر	١	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١
أنثى	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١	١	١	صفر	صفر

وفسر القيمة التي حصلت عليها .

تمارين على الفصل العاشر

١ — حاول أحد الباحثين دراسة العلاقة بين رتب دخول أسر مجموعة من الطلاب ، والصفات التى يرى كل طالب فى المجموعة أنها يجب أن تتوافر فى صديقه الذى يود اختياره . لذلك صمم الباحث استبياناً طلب فيه من عينة من طلاب إحدى الكليات أن يحدد هذه الصفات . وفيما يلى النتائج التى حصل عليها :

الصفة المفضلة	رتبة دخل الاسرة				التكرار الكلى
	٤	٣	٢	١	
(أ) الرغبة فى الصداقة	٥٢	٢٨	٤٠	٣٤	١٥٤
(ب) المظهر الخارجى	٧	٩	١٦	١٠	٤٢
(ج) احترام الصداقة	٨	٤	١٠	٩	٣١
(د) المستوى التعليمى	١٢	٦	٧	٥	٣٠

إوجد درجة العلاقة بين هذين المتغيرين ، وفسر القيمة الناتجة .

٢ — احسب معامل ويلكوكسون للعلاقة بين الجنس وترتيب الأفراد فى صفة التحرر لعينة من طلاب وطالبات إحدى الكليات كالآتى :

الجنس	الرتب									
	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ذكر	١	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	١
أنثى	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١	١	١	صفر	صفر

وفسر القيمة التى حصلت عليها .

الفصل الحادي عشر

مقاييس العلاقة

إذا كان أحد المتغيرين من المستوى
الاسمي والآخر من المستوى الفتري

نسبة الارتباط

طريقة حساب نسبة الارتباط إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الاسمي والآخر من المستوى الفتري

طريقة حساب نسبة الارتباط إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الفتري ولكن العلاقة بينهما منحنية

العلاقة بين نسبة الارتباط ومعامل ارتباط بيرسون

مقدمة :

رأينا فيما سبق أن الاقتران بين متغيرين يمكن اعتباره مشكلة تخمين أو تنبؤ ، كما رأينا أن طبيعة التخمين تختلف من حالة إلى أخرى على حسب ميزان قياس كل من المتغيرين . إلا أنه يمكننا القول بوجه عام أنه كلما زادت دقة تخمين قيم أحد المتغيرين باستخدام قيم المتغير الآخر كلما زادت درجة الاقتران بين المتغيرين .

في حالة معامل التنبؤ لجتمان ومعامل حاصل ضرب العزوم لبيرسون يمكن تقدير دقة التخمين عن طريق مدى قدرتنا على تخمين قيم أحد المتغيرين تخميناً صحيحاً دون علمنا بقيم المتغير الآخر . وفي مثل هذه الحالات يكون معامل الاقتران هو معامل يدل على مقدار التحسن في قدرتنا على التخمين إذا استخدمنا معلومات عن المتغير الآخر . وكلما زاد مقدار هذا التحسن كلما زادت قيمة معامل الاقتران .

وسوف نعرض في هذا الفصل أحد المقاييس الإحصائية الهامة التي يمكن أن يستخدمها الباحث في إيجاد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمي والآخر من المستوى الفترى ويسمى « نسبة الارتباط Correlation Ratio » ويرمز لهذه النسبة بالحرف اليوناني (η) وتقرأ (إيتا) .

وبالطبع يمكن أن يعتبر الباحث المتغير الفترى متغيراً رتبياً ، ويحسب قيمة معامل ويلكوكسون Θ ، أو يعتبره متغيراً اسمياً ويحسب قيمة معامل التنبؤ لجتمان λ . ولكن استخدام أى من هذين المعاملين يؤدى بالطبع إلى فقد بعض المعلومات التي كان من الممكن أن يحصل عليها من بيانات بحثه إذا استخدم المتغير الفترى بدلا من اعتباره من النوع الرتبي أو الاسمي . ولذلك فإن نسبة الارتباط أكثر هذه المقاييس حساسية لدرجة الاقتران في هذه الحالة .

وقد ذكرنا في الفصل السابع أن معامل ارتباط بيرسون يفترض وجود علاقة خطية بين متغيرين كل منهما من النوع الفترى أو النسبي . فإذا لم يرتبط

المتغيران يمثل هذه العلاقة فإن الصورة المستخدمة لإيجاد قيمة معامل ارتباط بيرسون تكون أقل من القيمة الفعلية للارتباط بين المتغيرين . وأحيانا تكون هذه القيمة الفعلية مرتفعة جداً ومع هذا تقترب قيمة معامل ارتباط بيرسون من الصفر . وللتأكد من خطية العلاقة بين متغيرين يجب أن نرسم شكلا انتشارياً لأزواج القيم . فإذا وجدنا أن النقط لا تميل إلى التراكم حول خط مستقيم بل تميل إلى الانحناء ، بمعنى أنه كلما زادت قيمة أحد المتغيرين تزيد قيمة المتغير الآخر حتى تصل إلى نقطة معينة تبدأ بعدها قيم المتغير الآخر في النقصان مع استمرار قيم المتغير الأول في الزيادة ، فإنه لا يجب في هذه الحالة استخدام معامل ارتباط بيرسون لأنه لا يكون في هذه الحالة هو المقياس المناسب لإيجاد درجة هذه العلاقة المنحنية . وهنا يمكن للباحث أن يستخدم نسبة الارتباط η .

ويجب أن يميز الباحث بين هذين الاستخدامين لنسبة الارتباط . فإذا استخدمت هذه النسبة لإيجاد درجة الاقتران بين متغير اسمى ومتغير فترى فإن شرط الخطية أو عدم الخطية لا يكون له معنى في هذه الحالة ، وإنما تعبر نسبة الارتباط عن درجة العلاقة بين المتغيرين .

أما إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الفترى فإنه يجب التأكد من خطية أو انحناء العلاقة . وسوف نعرض في هذا الفصل لكل من الحالتين .

ونسبة الارتباط شأنها شأن معامل ارتباط بيرسون أو معامل التنبؤ لجتمان تدل على مقدار التحسن في التخمين . فكما هو الحال في المعاملين المذكورين نبدأ هنا أيضاً بتخمين قيم نموذجية Typical في التوزيع ، ونعيد التخمين مرة أخرى ولكننا نستعين في هذه المرة بتوزيع متغير آخر ، ثم نوجد نسبة ما طرأ على التخمين من تحسن .

طريقة حساب نسبة الارتباط η إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الفترى :

لتوضيح طريقة حساب نسبة الارتباط فى هذه الحالة نعرض المثال البسيط الآتى :

نفترض أننا حصلنا على معلومات عن عدد علب السجائر التى يستهلكها كل فرد من أفراد مجموعة عددها ٤٠ كل أسبوع . ووضعنا هذه البيانات فى جدول التوزيع التكرارى رقم (٥٤) الآتى :

عدد علب السجائر المستهلكة (ص)	التكرار (ت)	ص × ت
صفر	٣	صفر
١	١	١
٢	٢	٤
٣	٣	٩
٤	٤	١٦
٥	٤	٢٠
٦	٤	٢٤
٧	٤	٢٨
٨	٤	٣٢
٩	٦	٥٤
١٠	٣	٣٠
١١	٢	٢٢
المجموع	٤٠	٢٤٠

جدول رقم (٥٤)

فإذا طلب منا أن نخمن العدد النموذجى Typical لعلب السجائر التى يستهلكها كل فرد من أفراد هذه المجموعة ، فإن أفضل تخمين يكون هو المتوسط .

وسوف نرى فى الفصل الثالث عشر أن المتوسط يعد أفضل تخمين للدرجة النموذجية فى توزيع المتغير الذى من المستوى الفترى .

وقد سبق أن رأينا فى الفصل الثالث أنه يمكن إيجاد قيمة المتوسط الحسابى لمثل هذا التوزيع باستخدام الصورة :

$$\overline{ص} = \frac{\sum_{ن=1}^{ن} ت_ن \times ص_ن}{ن} \quad \ldots \quad (1)$$

أى أن $\overline{ص} = \frac{٢٤٠}{٤٠} = ٦$

وبهذا يكون أفضل تخمين هو أن أى فرد من أفراد هذه المجموعة يستهلك ٦ علب من السجائر كل أسبوع .

ولكى نقدر دقة هذا التخمين يجب أن نحصل على معامل يقيس التباين حول المتوسط . فلإيجاد تباين التوزيع السابق يجب أن نستخدم أيضا الصورة التى ذكرناها فى الفصل الرابع وهى :

$$\text{التباين } ع^2_ص = \frac{\sum_{ن=1}^{ن} ت_ن (ص_ن - \overline{ص})}{ن} \text{ — —}$$

$$= \frac{\sum_{ن=1}^{ن} ت_ن \, ص^2_ن}{ن} \quad \ldots (2)$$

وهذا يتطلب تكوين الجدول الآتي رقم (٥٥) :

ص	ص َ = ص — ص ̄	ص َ٢	ت	ت ص َ٢
صفر	— ٦	٣٦	٣	١٠٨
١	— ٥	٢٥	١	٢٥
٢	— ٤	١٦	٢	٣٢
٣	— ٣	٩	٣	٢٧
٤	— ٢	٤	٤	١٦
٥	— ١	١	٤	٤
٦	صفر	صفر	٤	صفر
٧	+ ١	١	٤	٤
٨	+ ٢	٤	٤	١٦
٩	+ ٣	٩	٦	٥٤
١٠	+ ٤	١٦	٣	٤٨
١١	+ ٥	٢٥	٢	٥٠
المجموع		٤٠	٤٠	٣٨٤

جدول رقم (٥٥)

ومن هذا الجدول يتضح أن :

$$ع^{٢}_{ص} = \frac{٣٨٤}{٤٠} = ٩,٦$$

أى أن تباين توزيع المتغير ص = ٩,٦ . وهذا التباين يعتبر مقياسا للخطأ فى تخمين متوسط عدد علب السجائر التى يستهلكها كل فرد فى المجموعة .

والآن إذا افترضنا مثلا أن استهلاك السجائر يقترن بجنس الفرد (ذكر أو أنثى) إذ ربما نستطيع التخمين بأن الرجال يدخنون أكثر من النساء .

والمشكلة الآن هى تحديد درجة الاقتران بين متغير الجنس ومتغير استهلاك السجائر لهذه المجموعة من الأفراد . أى أننا نريد أن نحدد مقدار النقص

فى أخطاء تخمين متغير استهلاك السجائر إذا علمنا متغير الجنس . لذلك فإننا نكون جدول توزيع تكرارى لكل من الذكور والإناث كما هو مبين بالجدول رقم (٥٦) الآتى :

عدد علب السجائر المستهلكة كل أسبوع (ص)	الجنس		المجموع
	ذكور	إناث	
صفر	صفر	٣	٣
١	صفر	١	١
٢	صفر	٢	٢
٣	صفر	٣	٣
٤	صفر	٤	٤
٥	صفر	٤	٤
٦	صفر	٤	٤
٧	١	٣	٤
٨	٢	٢	٤
٩	٤	٢	٦
١٠	٢	١	٣
١١	١	١	٢
المجموع	١٠	٣٠	٤٠

جدول رقم (٥٦)

ولكى نستطيع تخمين عدد علب السجائر المستهلكة ، ونقدر خطأ التخمين لكل من الجنسين (أى التباين) ، فإن هذا يتطلب تكوين جدولين أحدهما للذكور رقم (٥٧) والآخر للإناث رقم (٥٨) كالآتى :

(أولا) جدول الذكور

ص	ت	ت ص	ص َ = ص — $\bar{ص}$	ص َ٢	ت ص َ٢
٧	١	٧	— ٢	٤	٤
٨	٢	١٦	— ١	١	٢
٩	٤	٣٦	صفر	صفر	صفر
١٠	٢	٢٠	+ ١	١	٢
١١	١	١١	+ ٢	٤	٤
المجموع	١٠	٩٠		١٠	١٢

جدول رقم (٥٧)

طريقة حساب تباين توزيع المتغير المتصل للذكور

أى أن : $\bar{ص} = \frac{\sum_{ن=١}^{ن} ت_ن \, ص_ن}{ن}$

$= \frac{٩٠}{١٠} = ٩$

، $ع^٢_ص = \frac{\sum_{ن=١}^{ن} ت_ن \, ص َ^٢_ن}{ن}$

$= \frac{١٢}{١٠} = ١,٢$

(ثانياً) جدول الإناث

ص	ت	ت ص	ص َ = ص — ص̄	ص َ ٢	ت ص َ ٢
صفر	٣	صفر	— ٥	٢٥	٧٥
١	١	١	— ٤	١٦	١٦
٢	٢	٤	— ٣	٩	١٨
٣	٣	٩	— ٢	٤	١٢
٤	٤	١٦	— ١	١	٤
٥	٤	٢٠	صفر	صفر	صفر
٦	٤	٢٤	+ ١	١	٤
٧	٣	٢١	+ ٢	٤	١٢
٨	٢	١٦	+ ٣	٩	١٨
٩	٢	١٨	+ ٤	١٦	٣٢
١٠	١	١٠	+ ٥	٢٥	٢٥
١١	١	١١	+ ٦	٣٦	٣٦
المجموع	٣٠	١٥٠			٢٥٢

جدول رقم (٥٨)
طريقة حساب تباين توزيع المتغير المتصل للإناث

أى أن ، $\bar{ص} = \frac{\sum_{ن=١}^{ن} ت_ن \, ص_ن}{ن}$

$= \frac{١٥٠}{٣٠} = ٥$

، $ع^{٢}_{ص} = \frac{\sum_{ن=١}^{ن} ت_ن \, ص'^{٢}_ن}{ن}$

$= \frac{٢٥٢}{٣٠} = ٨,٤$

ومن هذا يتضح أن تباين توزيع الذكور = ١,٢ ، وتباين توزيع الإناث = ٨,٤ . وهذا يعنى أنه عند تخمين متوسط الذكور (وهو = ٩) يكون معامل الخطأ مساويا ١,٢ . وعند تخمين متوسط الإناث (وهو = ٥) يكون معامل الخطأ مساويا ٨,٤ . وهذه القيم تمثل خطأ تخمين عدد علب السجائر المستهلكة بمعلومية الذكور والإناث كل على حدة . ويمكننا الحصول على معامل الخطأ الناتج عن تخمين عدد علب السجائر المستهلكة عندما نأخذ متغير الجنس فى الاعتبار بأن نضم معاملى الخطأ معا .

وفى الحقيقة فإن هذا المعامل هو متوسط موزون أو مرجح . أى أن :

$$ع^{٢}_{م} = \frac{\sum_{ج=١}^{ك} ت_{ج} \, ع^{٢}_{ج}}{ن} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٣)$$

حيث $ت_{ج}$ ترمز إلى عدد الملاحظات (أى التكرار) فى كل مجموعة فرعية يشتمل عليها الميزان الاسمى .

، $ع^{٢}_{ج}$ ترمز إلى تباين توزيع قيم المتغير ص لكل مجموعة فرعية.

، ك ترمز إلى عدد المجموعات الفرعية .

، ن ترمز إلى العدد الكلى للملاحظات (التكرار الكلى) .

، $ع^{٢}_{م}$ ترمز إلى متوسط التباين داخل المجموعات الفرعية .

ونظراً لأن لدينا فى هذا المثال مجموعتين فرعيتين (ذكور وإناث) فإن :

ك = ٢

، $ت_{١}$ = ١٠ ، $ت_{٢}$ = ٣٠

، $ع^{٢}_{١}$ = ١,٢ ، $ع^{٢}_{٢}$ = ٨,٤

وبهذا تكون :

$$ع^٢_م = \frac{(٨,٤)(٣٠) + (١,٢)(١٠)}{٤٠}$$

$$= \frac{٢٥٢ + ١٢}{٤٠} = \frac{٢٦٤}{٤٠} = ٦,٦$$

أى أن متوسط التباين داخل مجموعتى الذكور والإناث = ٦,٦ . وهذا يعتبر معامل الخطأ الذى نحصل عليه عند تخمين متوسط عدد علب السجائر المستهلكة لكل من الذكور والإناث على حدة . وقد حصلنا على هذا المعامل عن طريق إيجاد التباين حول المتوسط لكل من المجموعتين وضم القيمتين معا فى معامل واحد .

والآن يمكننا أن نوجد نسبة الارتباط (η) باستخدام نفس الفكرة التى سبق استخدامها فى إيجاد معامل ارتباط بيرسون أو معامل التنبؤ لجتمان وهى :

$$\frac{\text{مقدار النقص فى خطأ التخمين}}{\text{الخطأ الأصلى}}$$

وهنا يمثل التباين خطأ التخمين ، أى أن :

$$\text{مربع نسبة الارتباط } (\eta^2) = \frac{ع^٢_ص - ع^٢_م}{ع^٢_ص} \qquad \text{(٤) ...}$$

$$= \frac{٩,٦ - ٦,٦}{٩,٦}$$

$$= \frac{٣}{٩,٦} = ٠,٣١$$

ويلاحظ أن $\eta = \sqrt{\eta^2}$

$= \sqrt{0,31} = 0,56$

أى نسبة الارتباط $(\eta) = 0,56$

ونظراً لأن مربع نسبة الارتباط تدل دلالة مباشرة على التباين فإنه من السهل تفسيرها على أنها نسبة تباين المتغير الفترى ص الذى يقترن بالمجموعات الفرعية للمتغير الاسمى س .

فى المثال الحالى يقترن ٣١٪ من تباين متغير عدد علب السجائر المستهلكة (ص) بمتغير الجنس (س) بينما لا يقترن ٦٩٪ (أى ١ — مربع نسبة الارتباط) من تباين المتغير (ص) بالمتغير (س) .

وتتراوح قيم نسبة الارتباط بين الصفر ، والواحد الصحيح . ونظراً لأننا حصلنا على نسبة الارتباط باستخدام متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الفترى فلا يجوز فى هذه الحالة أن نتحدث عن علاقة ترتيبية ، ولذلك لا يمكن أن تكون هذه النسبة سالبة . والقيمة الناتجة عن تربيع نسبة الارتباط تدل على نسبة التباين المشترك بين المتغيرين س ، ص .

وتكون قيمة مربع نسبة الارتباط مساوية للصفر إذا لم يطرأ أى تحسن فى قدرتنا على تخمين قيم المتغير ص عندما نأخذ المتغير س فى الاعتبار .

وفى مثل هذه الحالة تكون ص لكل مجموعة فرعية من مجموعات المتغير الاسمى س مساوية للمتوسط العام لجميع قيم ص ، ويكون تباين كل مجموعة من هذه المجموعات مساويا التباين العام للتوزيع .

ويمكن توضيح ذلك بالجدول الآتى رقم (٥٩) :

قيم المتغير ص	ت	ت س أ	ت س ب	ت س ج
١	٣	١	١	١
٢	٦	٢	٢	٢
٣	١٢	٤	٤	٤
٤	٦	٢	٢	٢
٥	٣	١	١	١
المجموع	٣٠	١٠	١٠	١٠

جدول رقم (٥٩)

تباين المجموعات الفرعية = تباين التوزيع العام

(نسبة الارتباط = صفر)

وبالنظر إلى هذا الجدول نلاحظ أن المتغير الاسمى س يتكون من ثلاث مجموعات أ ، ب ، جـ . والمتوسط العام لتوزيع المتغير ص = ٣ وتباين التوزيع = ٣ أيضا .

أما بالنسبة لكل من المجموعات الفرعية التى يشتمل عليها المتغير س فإننا نلاحظ أن :

$$\bar{ص} = ٣ \text{ ، } ع^{2}_{ص} = ٣$$

أى أن : مربع نسبة الارتباط $= \frac{٣ - ٣}{٣} = \frac{\text{صفر}}{٣}$

= صفر .

ومعنى هذا أنه لم يحدث أى نقص فى خطأ التخمين بالرغم من أخذ المتغير س فى الاعتبار . أى أنه لا يوجد اقتران بين المتغيرين س ، ص .

ولكن إذا أخذنا الحالة التى تقع فيهـا كل قيمة من قيم ص فى مجموعة واحدة من المجموعات التى يشتمل عليها المتغير س ، فإننا نحصل على نتيجة مختلفة كما هو مبين بالجدول الآتى رقم (٦٠) :

قيم المتغير ص	ت	المجموعات الفرعية للمتغير س				
		$ت_{س ا}$	$ت_{س ب}$	$ت_{س ج}$	$ت_{س د}$	$ت_{س ه}$
١	٣	٣	صفر	صفر	صفر	صفر
٢	٦	صفر	صفر	صفر	٦	صفر
٣	١٢	صفر	١٢	صفر	صفر	صفر
٤	٦	صفر	صفر	٦	صفر	صفر
٥	٣	صفر	صفر	صفر	صفر	٣
المجموع	٣٠	٣	١٢	٦	٦	٣

جدول رقم (٦٠)
قيم ص تقع فى مجموعة واحدة من مجمـوعات المتغير س

وبالنظر إلى هذا الجدول نجد أن المتغير الاسمى يشتمل على ٥ مجموعات هى أ ، ب ، جـ ، د ، هـ . وأن كل مجموعة من هذه المجموعات تشتمل على قيمة واحدة من قيم ص . فهنا نجد أن المتوسط العام للتوزيع = ٣ ، وتباين التوزيع = ٣ . ولكن متوسطات المجموعات الفرعية تختلف عن ذلك ، $ع^٢_م$ = صفر .

$$\text{وبذلك يكون مربع نسبة الارتباط} = \frac{٣ - \text{صفر}}{٣}$$

$$= \frac{٣}{٣} = ١$$

أى أن التباين الكلى للمتغير ص يقترن بالتغير الذى يحدث فى أقسام المتغير س . وهنا يمكننا التنبؤ بدرجة تامة بقيم المتغير ص بمعلومية المتغير س .

ولذا يمكننا القول بوجه عام أن نسبة الارتباط هى مقياس لدرجة التنبؤ بقيم متغير فترى بمعلومية أقسام متغير اسمى .

طريقة مختصرة لحساب نسبة الارتباط :

يمكن أن يستخدم الباحث الطريقة السابقة لإيجاد نسبة الارتباط (η) ، ولكن يمكنه اختصار هذه الخطوات إذا استخدم الصورة الآتية :

$$\text{مربع نسبة الارتباط} = \frac{\sum_{ج=1}^{ك} ت_ج \left(\overline{ص}_ج - \overline{ص} \right)^2}{\sum_{ف=1}^{ن} \left(ص_ف - \overline{ص} \right)^2} \quad \ldots\ldots (٥)$$

حيث $ت_ج$ ترمز إلى عدد الملاحظات (التكرار) فى كل مجموعة فرعيـــة يشتمل عليها المتغير الاسمى .

، $\overline{ص}_ج$ ترمز إلى متوسط درجات كل مجموعة فرعية .

، $\overline{ص}$ ترمز إلى المتوسط العام لدرجات المتغير ص .

، ك ترمز إلى عدد المجموعات الفرعية .

، $ص_ف$ ترمز إلى درجات المتغير الفترى ص .

، ن ترمز إلى العدد الكلى للملاحظات (التكرار الكلى) .

يلخص خطوات الخطوات التى يتبعها الباحث عند استخدام الصورة رقم (٥) فى المثال السابق فى الجدول الآتى رقم (٦١) :

المجموعة الكلية						مجموعة الذكور		مجموعة الإناث	
ص	ت	ت ص	ص َ = ص − ص̄	ص َ^{٢}	ت ص َ^{٢}	ت	ت ص	ت	ت ص
صفر	٣	صفر	− ٦	٣٦	١٠٨	صفر	صفر	٣	صفر
١	١	١	− ٥	٢٥	٢٥	صفر	صفر	١	١
٢	٢	٤	− ٤	١٦	٣٢	صفر	صفر	٢	٤
٣	٣	٩	− ٣	٩	٢٧	صفر	صفر	٣	٩
٤	٤	١٦	− ٢	٤	١٦	صفر	صفر	٤	١٦
٥	٤	٢٠	− ١	١	٤	صفر	صفر	٤	٢٠
٦	٤	٢٤	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	٤	٢٤
٧	٤	٢٨	+ ١	١	٤	١	٧	٣	٢١
٨	٤	٣٢	+ ٢	٤	١٦	٢	١٦	٢	١٦
٩	٦	٥٤	+ ٣	٩	٥٤	٤	٣٦	٢	١٨
١٠	٣	٣٠	+ ٤	١٦	٤٨	٢	٢٠	١	١٠
١١	٢	٢٢	+ ٥	٢٥	٥٠	١	١١	١	١١
المجموع	٤٠	٢٤٠			٣٨٤	١٠	٩٠	٣٠	١٥٠

جدول رقم (٦١)
خطوات حساب نسبة الارتباط بين متغير من المستوى الاسمى
ومتغير من المستوى الفترى

ص̄ (المتوسط العام) = $\frac{٢٤٠}{٤٠}$ = ٦

ص̄ (للذكور) = $\frac{٩٠}{١٠}$ = ٩

ص̄ (للإناث) = $\frac{١٥٠}{٣٠}$ = ٥

$(\bar{ص}$ للذكور $- \bar{ص}$ العام$)^2 = (٩ - ٦)^2 = ٩$

، ن للذكور $= ١٠$

، $(\bar{ص}$ الإناث $- \bar{ص}$ العام$)^2 = (٥ - ٦)^2 = ١$

،ن للإناث $= ٣٠$

ثم نحسب قيمة مربع نسبة الارتباط كالآتى :

$$\text{مربع نسبة الارتباط} = \frac{\sum_{ج=١}^{ك} ن_ج (\bar{ص}_ج - \bar{ص})^2}{\sum_{ف=١}^{ن} (ص_ف - \bar{ص})^2}$$

$$= \frac{(١٠)(٩) + (٣٠)(١)}{٣٨٤}$$

$$= \frac{١٢٠}{٣٨٤} = ٠,٣١$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

والخلاصة أن الباحث يمكنه أن يتبع الخطوات الآتية عند حساب نسبة الارتباط (η) بين متغيرين أحدهما من المستوى الاسمى والآخر من المستوى الفترى :

١ — نفترض أن ص هو المتغير الفترى (أى المتغير الذى يمكن قياسه كميا) ، يوجد $\bar{ص}$ للمجموعات ككل، $\bar{ص}_ج$ لكل مجموعة فرعية يشتمل عليها المتغير الاسمى س .

٢ — يحسب مربع انحرافات متوسطات المجموعات الفرعية عن المتوسط العام، أى $(\overline{ص_ج} - \overline{ص})^٢$.

٣ — يضرب مربعات انحرافات متوسطات المجموعات الفرعية فى عدد أفراد كل مجموعة أى :

$ت_ج (\overline{ص_ج} - \overline{ص})^٢$ ، ويجمع نواتج حاصل الضرب لجميع المجموعات الفرعية .

٤ — يحسب مجموع مربعات انحرافات المجموعات ككل أى :

$$\sum_{ف=١}^{ن} (ص_ى - \overline{ص})^٢$$

٥ — يحسب نسبة الارتباط باستخدام الصورة رقم (٥) السابقة .

<u>طريقة حساب نسبة الارتباط إذا كانت العلاقة بين متغيرين كل منهما من المستوى الفترى منحنية :</u>

ذكرنا فيما سبق أن العلاقة بين متغيرين كل منهما من المستوى الفترى لاتكون دائما خطية كما هو الحال عندما نبحث العلاقة بين الاداء فى أحد اختبارات القدرات العقلية والعمر الزمنى .

فمعدل الأداء يزداد بسرعة كبيرة فى الاعمار الصغيرة (من ٥ — ١٠ أعوام)، ثم يقل هذا المعدل قليلا بالنسبة للأعمار من ١٠ — ٢٠ عاما ، حيث يصل الأداء إلى أقصاه فى سن العشرين ، ثم يبدأ فى التناقص التدريجى فى الأعمار من ٢٠ — ٤٠ عاما ، ويزداد التناقص فى الأداء زيادة سريعة بعد سن الاربعين . فإذا كانت الدراسة الارتباطية تعتمد على عينة تشتمل على جميع هذه الاعمار ، وحسبنا

معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون بين الأداء فى الاختبار والعمر الزمنى ، فإن هناك احتمال كبير أن تقترب قيمة هذا المعامل من الصفر . والسبب فى ذلك أن معامل ارتباط بيرسون يعتمد على فرض خطية العلاقة بين متغيرين . فإذا لم تكن العلاقة خطية كما فى هذه الحالة ، فإن القيمة التى نحصل عليها باستخدام صورة معامل ارتباط بيرسون تكون أقل من القيمة الفعلية للإرتباط بين المتغيرين. ولذلك يجب على الباحث التأكد من شكل توزيع البيانات ذات المتغيرين قبل اختيار مقياس العلاقة المناسب للبيانات . وبالطبع لا يتضح شكل العلاقة من مجرد النظر إلى البيانات . وإنما يجب أن يرسم الباحث شكلا انتشاريا يوضح له ما إذا كانت العلاقة خطية أم منحنية . فإذا كانت العلاقة منحنية لا يجوز استخدام معامل ارتباط بيرسون ، وإنما يجب استخدام نسبة الارتباط (η) .

ولتوضيح الخطوات التى يمكن أن يتبعها الباحث فى حساب نسبة الارتباط إذا كانت العلاقة بين متغيرين كل منهما من المستوى الفترى منحنية نعرض المثال الآتى :

نفترض أننا أردنا إيجاد العلاقة بين العمر الزمنى (س) ودرجات اختبار يقيس المعلومات العامة (ص) طبق على عينة تتكون من ٢٠٠ فرد من مختلف الأعمار .

فالخطوة الأولى : هى أن نكون جدولا انتشاريا للمتغيرين كما هو مبين بالجدول رقم (٦٢) بأن يمثل فئات العمر الزمنى على المحور الأفقى ، وفئات الدرجات على المحور الرأسى ، ونسجل تكرار كل زوج من أزواج فئات المتغيرين، وكذلك التكرار الكلى ($ت_ص$) لكل فئة من فئات درجات المتغير ص للأعمار المختلفة فى عمود مستقل ، والتكرار الكلى ($ت_س$) لكل فئة عمرية للدرجات المختلفة فى الاختبار فى صف مستقل .

المحور الرأسى درجات الاختبار (ص)	صَ	١٥ — ١٩	٢٠ — ٢٤	٢٥ — ٢٩	٣٠ — ٣٤	٣٥ — ٣٩	٤٠ — ٤٤	٤٥ — ٤٩	٥٠ — ٥٤	٥٥ — ٥٩	٦٠ — ٦٤	٦٥ — ٦٩	٧٠ — ٧٤	ت ص	صَ	ت صَ	ت صَ٢
		المحور الأفقى العمر (س)															
٨٥ — ٨٩	١٦					١								١	١٦	١٦	٢٥٦
٨٠ — ٨٤	١٥					١								١	١٥	١٥	٢٢٥
٧٥ — ٧٩	١٤				٢									٢	١٤	٢٨	٣٩٢
٧٠ — ٧٤	١٣			٤	٣		١	١						٩	١٣	١١٧	١٥٢١
٦٥ — ٦٩	١٢			٣	٣	٤		٣	١					١٤	١٢	١٦٨	٢٠١٦
٦٠ — ٦٤	١١			٣	٥	٤	٢	٥		١				٢٠	١١	٢٢٠	٢٤٢٠
٥٥ — ٥٩	١٠			٣	٤	٣	٤	٦	٣					٢٣	١٠	٢٣٠	٢٣٠٠
٥٠ — ٥٤	٩		١	١	٢	٣	٣	٤	٣	٥	٢		١	٢٥	٩	٢٢٥	٢٠٢٥
٤٥ — ٤٩	٨	١	١	٢	١	٢	٣	٥	٣	٧	٢	٢		٢٩	٨	٢٣٢	١٨٥٦
٤٠ — ٤٤	٧	١	١	٢	٢		٣	٣	٢	٤		٢		٢٠	٧	١٤٠	٩٨٠
٣٥ — ٣٩	٦	١	٢	٢	١		٢	٢	٢	٣	٣	١	٣	٢٢	٦	١٣٢	٧٩٢
٣٠ — ٣٤	٥	٢	٣					١		٢			٣	١١	٥	٥٥	٢٧٥
٢٥ — ٢٩	٤	١	٣						١		٢	١	٢	١٠	٤	٤٠	١٦٠
٢٠ — ٢٤	٣	٢	٢							١	١	١		٧	٣	٢١	٦٣
١٥ — ١٩	٢		٢							١	١			٤	٢	٨	١٦
١٠ — ١٤	١	١												١	١	١	١
٥ — ٩	صفر												١	١	صفر	صفر	صفر
ت س		٩	١٥	٢٠	٢٣	١٨	٣٠	١٨	١٥	٢٤	١١	٧	١٠	ن = ٢٠		مج ت صَ	مج ت صَ٢
سَ		صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١			١٦٤٨ =	١٥٢٩٨ =

جدول رقم (٦٢)

جدول انتشارى لأعمار عينة تتكون من ٢٠٠ طالب ودرجاتهم فى اختبار المعلومات

والطريقة المباشرة لحساب نسبة الارتباط (η) تعتمد على تعريف مربع نسبة الارتباط بأنها النسبة بين مجموع مربعات انحرافات متوسطات الأعمدة عن المتوسط العام لتوزيع المتغير (ص) والمجموع الكلى لمربعات انحرافات قيم المتغير ص عن هذا المتوسط . أى أن :

$$\eta^2_{\text{ص س}} = \frac{\text{مجـ ص}^2_{\text{م}}}{\text{مجـ ص}^2_{\text{ك}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (٦)$$

$$\cdot \; \eta_{\text{ص س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ص}^2_{\text{م}}}{\text{مجـ ص}^2_{\text{ك}}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (٧)$$

ويمكن الحصول على المجموع الكلى لمربعات انحرافات قيم المتغير ص عن متوسط هذه القيم (مجـ $\text{ص}^2_{\text{ك}}$) باستخدام البيانات الموضحة فى جدول الانتشار رقم (٦٢) كالآتى :

$$\text{مجـ ص}^2_{\text{ك}} = \text{مجـ ت ص}'^2 - \frac{(\text{مجـ ت ص}')^2}{\text{ن}}$$

$$= ١٥٢٩٨ - \frac{(١٦٤٨)^2}{٢٠٠}$$

$$= ١٥٢٩٨ - ١٣٥٧٩,٥٢ = ١٧١٨,٤٨ \; \cdot$$

ولكى نحصل على مجموع مربعات انحرافات متوسطات الأعمدة عن المتوسط العام لتوزيع المتغير ص أى مجـ $\text{ص}^2_{\text{م}}$ نكون جدولا كالآتى رقم (٦٣) :

(١) العمود	(٢) $ت_س$	(٣) مجص َ	(٤) $(مجص َ)^2$	(٥) $\frac{(مجص َ)^2}{ت_س}$
صفر	٩	٤٢	١٧٦٤	١٩٦,٠٠
١	١٥	٧٣	٥٣٢٩	٣٥٥,٢٧
٢	٢٠	٢٠٢	٤٠٨٠٤	٢٠٤٠,٢٠
٣	٢٣	٢٤٤	٥٩٥٣٦	٢٥٨٨,٥٢
٤	١٨	١٩٦	٣٨٤١٦	٢١٣٤,٢٢
٥	٣٠	٢٧٨	٧٧٢٨٤	٢٥٧٦,١٣
٦	١٨	١٥٩	٢٥٢٨١	١٤٠٤,٥٠
٧	١٥	١٢٣	١٥١٢٩	١٠٠٨,٦٠
٨	٢٤	١٧٣	٢٩٩٢٩	١٤٢٧,٠٤
٩	١١	٦٥	٤٢٢٥	٣٨٤,٠٩
١٠	٧	٤٣	١٨٤٩	٢٦٤,١٤
١١	١٠	٥٠	٢٥٠٠	٢٤٠,٠٠

مج $ت_س$ = ٢٠٠ ، مج (مجص َ) = ١٤٦٨ ، مج $\left[\frac{(مجص َ)^2}{ت_س}\right]$ = ١٤٤٤٨,٧١

جدول رقم (٦٣)

خطوات حساب مجـ $ص^2_م$

فإذا نظرنا إلى جدول رقم (٦٣) نجد أن العمود الأول يبين أرقام الأعمدة فى جدول الانتشار رقم (٦٢) . وهذه الأرقام هى قيم س المدونة فى الصف الأخير من هذا الجدول . والعمود الثانى يتكون من تكرار الأعمدة المختلفة المدونة أيضاً أمام $ت_س$ فى نفس الجدول . أما القيم الموضحة فى العمود الثالث وهى قيم مجـ صَ (حيث صَ المبينة فى العمود الثانى من جدول رقم ٦٢ هى انحرافات كل

فئة من فئات المتغير ص عن فئة افتراضية وهى الفئة ٥ — ٩ فى هذه الحالة ، لذلك وضعنا صفراً أمام هذه الفئة ، والرقم ١ أمام الفئة التالية وهى ١٠ — ١٤ ، وهكذا) فإننا نحصل عليها بإيجاد الانحرافات التى تناظر كل تكرار من تكرارات العمود المطلوب ، ثم نجمع هذه الانحرافات لكل عمود على حدة .

فمثلا إذا نظرنا إلى العمود الثالث فى جدول رقم (٦٢)، نجد أن التكرار الكلى لهذا العمود = ٩ . ثم نحصل على قيم صَ التى تناظر التكرارات التى يتكون منها هذا التكرار الكلى ٩ . فهذه التكرارات هى ١ ، ٢ ، ١ ، ٢ ، ١ ، ١ ، ١ . وبذلك تكون قيم صَ المناظرة لها هى : ١، ٤ مكررة مرة واحدة، ٣ ، ٥ مكررة مرتين ٦، ٧، ٨ مكررة مرة واحدة، ومجموع هذه القيم = ٤٢ ، وتكرر هذه العملية لجميع الأعمدة، وتدون مجموع قيم صَ لكل عمود فى العمود الثالث من جدول رقم (٦٣) . ثم نربع كل قيمة من قيم هذا العمود ونضع النتائج فى العمود رقم ٤ . ونقسم كل من هذه المربعات على تكرار العمود الخاص بها ، ثم نجمع النواتج .

ويمكن أن نحسب قيمة مجـ $\text{ص}^2_{\text{م}}$ باستخدام الصورة الآتية :

$$\text{مجـ ص}^2_{\text{م}} = \text{مجـ}\left[\frac{(\text{مجـ صَ})^2}{\text{ت}_{\text{س}}}\right] - \frac{[\text{مجـ}(\text{مجـ صَ})]^2}{\text{ن}}$$

$$= ١٤٤٤٨,٧١ - \frac{(١٠٤٨)^2}{٢٠٠}$$

$$= ١٤٤٤٨,٧١ - ١٠٥٧٩,٥٢$$

$$= ٠٨٦٩,١٩$$

وبهذا تكون نسبة الارتباط $(\eta) = \sqrt{\dfrac{٨٦٩,١٩}{١٧١٨,٤٨}}$

$$= \sqrt{٠,٥٠٠٥٧٨٤}$$

$$= ٠,٧١١$$

ويمكن تفسير نسبة الارتباط تفسيراً مماثلا لتفسير معامل الارتباط لبيرسون، وذلك بتربيع نسبة الارتباط لنحصل على η^2 ، وهى تدل على التباين المشترك بين المتغيرين . فإذا ربعنا ٠,٧١١ نحصل على مربع نسبة الارتباط وهذا يساوى ٠,٥٠٥٥ . أى أن حوالى ٥١٪ من تباين درجات اختبار المعلومات يمكن تفسيره بمعلومية العمر ، بمعنى أن هذا التباين يرجع إلى تباين العمر .

ويمكن استخدام الصورة الآتية لإيجاد مربع نسبة الارتباط مباشرة ، لأن البسط يمثل مجـ $\text{ص}^2_{\text{م}}$ ، والمقام يمثل مجـ $\text{ص}^2_{\text{ك}}$:

$$\text{مربع نسبة الارتباط} = \frac{\text{مجـ}\left[\frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}_{\text{س}}}\right] - \frac{\text{مجـ}(\text{ت ص})^2}{\text{ن}}}{\text{مجـ ت ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ت ص})^2}{\text{ن}}} \quad \ldots \quad (٨)$$

العلاقة بين نسبة الارتباط ومعامل ارتباط بيرسون :

سبق أن رأينا أن معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون بين المتغيرين س، ص يساوى معامل الارتباط بين ص ، س لنفس مجموعة البيانات . ولكن هذا لا ينطبق على نسبة الارتباط . فنسبة الارتباط بين س ، ص لا تساوى نسبة الارتباط بين ص ، س ، فهما نسبتان مختلفتان ، وبالطبع يمكن إيجاد نسبة الارتباط الثانية فى المثال السابق إذا استبدلنا الرمز س بالرمز ص فى المعادلة رقم (٨) ، وأجرينا ما يتطلبه ذلك من تعديلات فى الجدولين رقمى ٦٢ ، ٦٣ .

كما أن معامل ارتباط بيرسون يمكن أن يأخذ إحدى القيمتين + ١ أو - ١ أو أى قيمة أخرى تنحصر بينهما . أى أن هذا المعامل يحدد مقدار واتجاه العلاقة بين المتغيرين .

ولكن نسبة الارتباط ليست لها إشارة ، لأننا إذا تأملنا الشكل الانتشارى للمتغيرين ربما نجد العلاقة بينهما موجبة فى جزء ما من المدى الكلى للمتغيرين بينما نجد العلاقة سالبة فى أجزاء أخرى من هذا المدى . لذلك فإن نسبة الارتباط تقيس فقط درجة أو مقدار هذه العلاقة .

وتتأثر نسبة الارتباط بتذبذب متوسطات الأعمدة أو الصفوف فى جدول الانتشار إذ أن نسبة الارتباط تعتمد اعتماداً مباشراً على انحرافات متوسطات الأعمدة أو الصفوف عن المتوسط العام للمتغير ص . وهذا يجعل مقدارالارتباط الذى تدل عليه هذه النسبة أكبر إلى حد ما من قيمته الفعلية . فإذا كانت العلاقة بين المتغيرين منحنية فإن نسبة الارتباط تكون أكبر من قيمة معامل ارتباط بيرسون التى تحصل عليها من نفس مجموعة البيانات ، أما إذا كانت العلاقة بين المتغيرين خطية ، فإن الفرق بين قيمة كل من نسبة الارتباط ومعامل ارتباط بيرسون التى تحصل عليها من نفس مجموعة البيانات يمكن أن يتخذ دليلا على مدى الزيادة غير الفعلية فى مقدار الارتباط الناتج عن استخدام نسبة الارتباط . أما فى حالة العلاقة المنحنية فلا يمكن تحديد مقدار هذه الزيادة . ولذلك توصى الباحث بعدم استخدام نسبة الارتباط إلا إذا تأكد من أن العلاقة بين المتغيرين ليست خطية وأن العينة كبيرة بدرجة تسمح بجعل متوسطات الأعمدة أوالصفوف أكثر ثباتاً أو استقرارا ، لأن نسبة الارتباط ـ كما لاحظنا ـ تتأثر تأثراً ملحوظا بعدد الأعمدة أو الصفوف وكذلك بالتكرارات التى تكون التكرار الكلى لكل عمود أو صف . إذ لا يمكن أن يتضح انحناء العلاقة إذا كان عدد الأعمدة أو الصفوف قليلا ، ويقترح جليفورد Guilford أن يكون حجم العينة أكثر من ١٠٠ ، وعدد الأعمدة أو الصفوف يتراوح بين ٦ ، ١٢ إذا أراد الباحث

استخدام نسبة الارتباط كمقياس للعلاقة المنحنية بين متغيرين . أما إذا قل العدد عن ذلك فعليه إما أن يستخدم مقياس إحصائي آخر يسمى E (ويقرأ إبسلون) حيث يمكن باستخدامه أن يحصل على نسبة ارتباط غير متحيزة . ويمكن للباحث الرجـــوع إلى Peters and Van Voorhis لمزيد من التوضيح لهذا المقياس . أو يمكنه تحديد شكل العلاقة المتغيرين على صورة دالة رياضية ثم يحاول اختبار مدى مطابقة البيانات لهذه الدالة . وسوف نعرض لهذه الفكرة بالتفصيل في الفصل الخامس عشر عند مناقشتنا للانحدار غير الخطي .

ولا يفوتنا أن ننوه إلى أهمية نسبة الارتباط في تحليل التباين ، وهو ماسنعرض له في الجزء الثاني من الكتاب .

تمارين على الفصل الحادى عشر

١ — احسب نسبة الارتباط لمجموعة البيانات الآتية، وفسر القيمة الناتجة :

	أقسام المتغير الاسمى (س)			
	ا	ب	ﺟ	د
متوسط قيم المتغير (ص)	٣٦,٦٥	٣٣,٠٩	٣١,٠٩	٣٣,٠٥
عدد الحالات فى كل قسم	٢٢	٢٢	٢٢	٢٠

٢ — احسب نسبة الارتباط للبيانات الآتية:

الطالب	درجة الاختبار الأول	درجة الاختبار الثانى	الطالب	درجة الاختبار الأول	درجة الاختبار الثانى
١	٦٠	٦٠	١٠	٤٥	٤١
٢	٥٤	٦٨	١١	٤٣	٥٠
٣	٥٣	٤٠	١٢	٤١	٤٨
٤	٤٩	٥٢	١٣	٣٩	٣٦
٥	٤٩	٥١	١٤	٣٨	٤٨
٦	٤٧	٤٨	١٥	٣٢	٤٠
٧	٤٦	٥١	١٦	٣٢	٤٦
٨	٤٥	٣٢	١٧	٣٠	٣٧
٩	٤٥	٣٩			

٣ — احسب نسبة الارتباط بين المتغير الاسمى (س) الذى يشتمل على أربعة أقسام ، والمتغير الفترى (ص) ، وفسر القيمة الناتجة .

أقسام المتغير الاسمى (س)

المتغير الفترى (ص)

س٠	س١	س٢	س٣
٥	١٠	١٢	١٤
٤	٨	١١	١٢
٤	٨	١١	١٢
٣	٧	١٠	١٠
٢	٦	٩	
	٥	٨	
	٥		
	٣		

٤ — احسب نسبة الارتباط بين المتغير الاسمى (س) الذى يشتمل على خمسة أقسام والمتغير الفترى (ص) ، وفسر القيمة الناتجة .

أقسام المتغير (س)

المتغير (ص)

س١	س٢	س٣	س٤	س٥
٢	٢	٥	٧	٣
٤	٤	٥	٦	٢
٤	٤	٤	٤	٤
٢	٦	٥	٨	٤
٣	٣	٣		٢
٣	٧			٣
	٥			١
				٣

الفصل الثاني عشر

مقاييس العلاقة

إذا كان أحد المتغيرين من المستوى الرتبي والآخر من المستوى الفئوي

معامل الارتباط المتسلسل المتعدد لجاسبن

طريقة حساب معامل الارتباط المتسلسل المتعدد

مقاييس إحصائية أخرى

مقدمة :

سنعرض فى هذا الفصل والفصل التالى بعض مقاييس العلاقة عند ما يكون أحد المتغيرين من المستوى الرتبي ، والآخر من المستوى الفترى .

وفى الحقيقة لا يوجد مقياس وحيد يمكن استخدامه لوصف درجة الاقتران بين هذين النوعين من المتغيرات ، ويمكن أن يتغاضى الباحث عن الميزان أو المستوى الفترى لأحد المتغيرين ويعتبره من المستوى الرتبي ، ويوجد مقدار العلاقة بين متغيرين من المستوى الرتبي باستخدام المقياس الإحصائى المناسب ، وبالطبع سوف يكون مثل هذا المقياس أقل حساسية للعلاقة القائمة بين المتغيرين الأصليين . ولكن يوجد مقياسان إحصائيان يناسبان بوجه خاص الموقف البحثى الذى يتطلب إيجاد العلاقة بين متغيرين أحدهما من المستوى الرتبي والآخر من المستوى الفترى هما معامل الارتباط المتسلسل المتعدد Multiserial Correlation ، ومعامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقى Point Multiserial Correlation .

ولكننا سوف نقتصر فى هذا الفصل على مناقشة المقياس الأول ، ونلقى الضوء فقط على المقياس الثانى .

وقبل أن يلجأ الباحث إلى استخدام أحد هذين المقياسين فى تحليل بيانات بحثه يجب أن يتأكد من أن البيانات تحقق بعض الفروض التى يتطلبها كل منهما ، وأحد هذه الفروض يتعلق بالسعة النسبية لفترات المتغير الرتبي .

يؤكد فريمان أنه من الضرورى فى حالة استخدام معامل الارتباط المتسلسل المتعدد افتراض أن الفترات التى تفصل بين الرتب تتبع التوزيع الاعتدالى . وهذا يعنى أنه لكى تتحول الرتب إلى درجات على ميزان فترى يجب أن يفرض التوزيع الاعتدالى على البيانات الخاصة بالمتغير الرتبي . أما فى حالة استخدام معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقى فإنه يفترض أن الرتب فى حد ذاتها يفصل بينها فترات متساوية ، وبهذا يمكن معالجتها كما لو كانت الدرجات الناتجة عنها من المستوى الفترى .

ولكن يصعب فى معظم الحالات تحقق مثل هذا الفرض . فالباحث ربما يضطر إلى استخدام متغيرات من المستوى الرتبى لعدم تمكنه من التوصل إلى طريقة تجعل الفترات التى تفصل بين رتب أى من هذه المتغيرات متساوية ، وافتراض تساوى هذه الفترات بدلا من التأكد فعلا من تحققها يجعل تفسير المقياس الإحصائى المستخدم فى هذه الحالة غير واضح . ولذلك فإنه ربما يفضل استخدام معامل الارتباط المتسلسل المتعدد بدلا من معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقى فى مثل هذه الحالة .

وفى الحقيقة لايوجد رمز متفق عليه لكل من هذين المعاملين . ولكننا سنرمز لهما بالرمزين $ر_{م م}$ ، $ر_{م ح}$ على الترتيب .

معامل الارتباط المتسلسل المتعدد لجاسبن ($ر_{م م}$)

Jaspen's Coefficient of Multiserial Correlation

يمكن أن يستخدم الباحث معامل الارتباط المتسلسل المتعدد لجاسبن فى إيجاد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الرتبى ، والآخر من المستوى الفترى ، ولكنه يجب أن يتحقق من أن :

١ ـ هناك علاقة خطية بين المتغيرين .

٢ ـ المتغير الرتبى يمكن أن يتبع التوزيع الاعتدالى بقدر الإمكان لو كان فى استطاعته قياس هذا المتغير بقدر أكبر من الدقة . فإذا استطاع الباحث قياس أحد المتغيرات على ميزان فترى فإنه سوف يجد فى معظم الأحيان أن عدداً كبيراً من الملاحظات الخاصة بهذا المتغير تتوزع توزيعا اعتداليا . ولكن ربما لايكون هذا صحيحا فى بعض الحالات . فبعض الظواهر السلوكية يكون توزيعها على شكل حرف (J) ، ودخول الأفراد بالجنيه المصرى مثلا تتوزع توزيعا ملتويا . إلا أن كثيراً من الأشياء أو الصفات التى تتحرى الدقة فى قياسها نجدها تتبع التوزيع الاعتدالى .

وهنا ربما يتساءل الباحث عن كيفية معالجة بيانات بحثه إذا لم يستطع قياس

أحد المتغيرات التي يهتم بدراستها قياساً كمياً ، بل استطاع فقط أن يقوم بإجراء عملية ترتيب للملاحظات الخاصة بهذا المتغير ، وبالطبع لاترقى عملية الترتيب إلى مستوى عملية القياس من حيث الدقة .

فإذا استطاع الباحث افتراض أن المتغير المطلوب يتخذ شكل المنحنى الاعتدالي إذا أمكن قياسه على ميزان فترى ، عندئذ يمكن إجراء بعض التعديلات التي تثرى من فاعلية عملية القياس Scaling ، إذ يستطيع في هذه الحالة تحويل الميزان الرتبي للمتغير إلى ميزان فترى .

ولتوضيح ذلك يفترض مثلاً أننا طبقنا استبياناً لقياس الاتجاه نحو انفاق المال على عشرة من الطلاب ، وأمكننا ترتيب هؤلاء الطلاب في أربع مجموعات بالنسبة لشدة هذا الاتجاه ، ولنفترض أن النتائج كانت كالآتي (جدول رقم ٦٤) :

الرتبة	شدة الاتجاه	التكرار
٤	موافق بشدة	١
٣	موافق إلى حد ما	٥
٢	غير موافق إلى حد ما	٣
١	غير موافق على الإطلاق	١
المجموع		١٠

جدول رقم (٦٤)

ونلاحظ في هذا الجدول أننا استطعنا أن نرتب الطلاب بالنسبة لشدة الاتجاه نحو إنفاق المال إلا أن الفترات التي تفصل بين الرتب ليست متساوية ، فنحن نعلم أن الطلاب الذين يوافقون بشدة ربما ينفقون المال (أو على الأقل يكون اتجاههم اللفظي نحو انفاق المال) أكثر من الطلاب الذين يوافقون إلى حد ما ، ولكننا لانعلم مقدار الفرق بين المجموعتين .

وهنا ربما نفترض أننا إذا استطعنا قياس الاتجاه نحو إنفاق المال على ميزان فترى فإن التوزيع يكون اعتداليا، إذ أننا نتوقع أن معظم الطلاب يكون اتجاههم نحو إنفاق المال معتدلا ، وعدد قليل منهم يكون اتجاههم متطرفا أى إما مسرفين أو مقترين .

وقبولنا هـذا الافتراض يعنى أن كل طالب ينتمى إلى أحد أقسام شده الاتجاه ، وأن هـذه الأقسام التى يوضحها الجدول رقم (٦٤) غير موزعة توزيعا منتظما . ولكننا نستطيع التعبير عن التوزيع باستخدام نسب الطلاب الذين ينتمون إلى كل قسم من هذه الأقسام كما هو مبين بالجدول رقم (٦٥) الآتى :

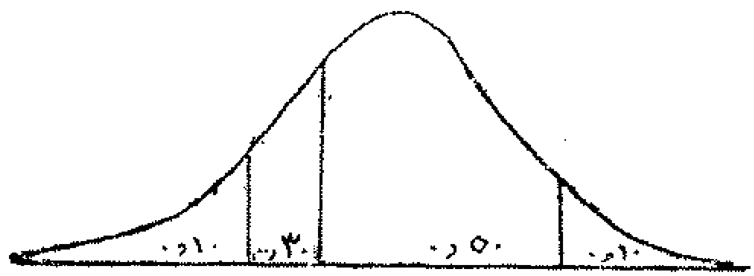
الرتبة	شدة الاتجاه	التكرار	النسبة
٤	موافق بشدة	١	٠,١٠
٣	موافق إلى حد ما	٥	٠,٥٠
٢	غير موافق إلى حد ما	٣	٠,٣٠
١	غير موافق على الإطلاق	١	٠,١٠
المجموع		١٠	١,٠٠

جدول رقم (٦٥)

وهنا يمكن تقسيم المساحة تحت المنحنى الاعتدالى المعيارى الذى عرضنا له فى الفصل السادس بالنسب المبينة فى هذا الجدول .

فباستخدام نسب المساحات تحت المنحنى الاعتدالى يمكن أن نعين لكل طالب درجة على الميزان الفترى الذى افترضناه ، وبذلك يمكننا معرفة نسبة الدرجات التى تزيد أو تقل عن درجة معينة إذا علمنا انحراف هذه الدرجة عن المتوسط . وإذا علمنا

نسب الدرجات التى تزيد أو تقل عن درجة معينة فإننا بالطبع نستطيع معرفة انحراف هــذه الدرجة عن المتوسط. لذلك قسمنا المنحنى الاعتدالى فى الشكل رقم (٥٠) إلى أربعة أجزاء بالنسب ٠,١٠ ، ٠,٣٠ ، ٠,٥٠ ، ٠,١٠ كالآتى :

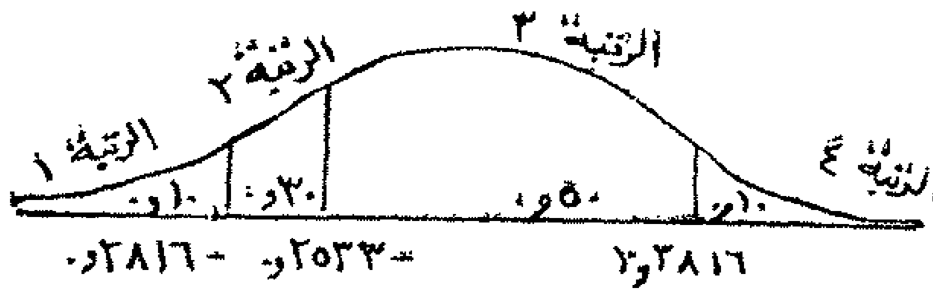


شكل رقم (٥٠)

فإذا رجعنا إلى جدول المساحات تحت المنحنى الاعتدالى (جدول ـ المبين بملحق الكتاب) نستطيع تحديد الدرجات المعيارية التى تناظر نقط تقسيم المنحنى أى النقط التى تفصل بين أجزاء المنحنى .

فمثلا يتضح من جدول المساحات أن الدرجة المعيارية (د) التى تقع دونها ٠,١٠ من الحالات تساوى — ١,٢٨١٦ ، فهذه إذن الدرجة المعيارية التى تفصل بين الرتبتين ١ ، ٢ . فكل طالب رتبته ١ تقل درجته المعيارية عن — ١,٢٨١٦ . وكل طالب رتبته ٢ أو ٣ أو ٤ تزيد درجته المعيارية عن هذه الدرجة .

ونستطيع أن نكرر هذه العملية بالنسبة لنقطتى التقسيم الأخريين ، وهذه النتائج مبينة بالشكل رقم (٥١) .



شكل رقم (٥١)

ومن هذا الشكل يتضح أننا استطعنا باستخدام خصائص المنحنى الاعتدالى أن نحدد الدرجات المعيارية التى تفصل بين الرتب المختلفة لشدة الاتجاه . فمثلا يتضح أن كل طالب رتبته ٤ يجب أن تزيد درجته المعيارية عن ١,٢٨١٦ .

ولكن نظرا لعدم دقة هذه الرتب للأسباب التى سبق أن ذكرناها فإننا لانستطيع أن نعرف مدى انحراف درجة كل طالب عن هذه الدرجة المعيارية . فكل مانستطيع أن نفعله هو أن نعين لكل رتبة من الرتب الأربع متوسط الدرجتين المعياريتين اللتين تحدان كلا من هذه الرتب على خط قاعدة المنحنى الاعتدالى . ويمكننا الاستفادة فى ذلك بخاصية أخرى من خصائص المنحنى الاعتدالى ، وهى أن هناك علاقة بين ارتفاع هذا المنحنى والدرجات المعيارية .

إذ يمكننا تحديد متوسط الدرجتين المعياريتين على خط القاعدة لأى جزء من أجزاء المنحنى الاعتدالى إذا علمنا الارتفاعين اللذين يحدان هذا الجزء .

والصورة العامة التى يمكن استخدامها لتحديد هذا المتوسط هى :

$$\bar{د} = \frac{ع_ق - ع_ع}{س} \quad .... \quad (١)$$

حيث $ع_ق$ ترمز إلى ارتفاع المنحنى الذى يحد الجزء المطلوب من أسفل (ويمكن الحصول عليه من جدول ب المبين بالملحق) .

، $ع_ع$ ترمز إلى ارتفاع المنحنى الذى يحد الجزء المطلوب من أعلى .

، س ترمز إلى نسبة الحالات التى تقع فى هذا الجزء .

، $\bar{د}$ ترمز إلى متوسط الدرجتين المياريتين للجزء المطلوب من المنحنى .

فإذا أردنا إيجاد الارتفاعين اللذين يحدان الرتبـــة ٤ ترجع إلى جدول ارتفاعات المنحنى الاعتدالى (جدول ب) ونبحث عن الارتفاع الذى يقع بعده ٠,١٠ من الحالات فنجد أنه يساوى ٠,١٧٥٥ ، والارتفاع الذى لا تقع دونه أى حالة من الحالات ، وهو بالطبع = صفر . أى أن ٠,١٧٥٥ ، صفر هما حدا هذا الجزء من المنحنى .

فإذا عوضنا فى الصورة رقم (١) السابقة نحصل على :

$$\bar{د}_٤ = \frac{ع_ق - ع_ع}{س}$$

$$= \frac{٠,١٧٥٥ - صفر}{٠,١٠}$$

$$= ١,٧٥٥$$

أى أن متوسط الدرجات المعيارية للطلاب الذين رتبة كل منهم ٤ يساوى ١,٧٥٥

وعند استخدام جدول الارتفاعات لتعيين حدى الرتبة ٣ يجب أن نتوخى الحذر . فنحن هنا نهتم بالارتفاع الذى تقع بعده ٠,٥٠ + ٠,١٠ أى ٠,٦٠ من الحالات . وبالرجوع إلى جدول الارتفاعات (ب) نجد أن القيم المدونة فيه لاتصل إلى هذه القيمة وإنما تصل إلى ٠,٥٠ فقط . لذلك يجب أن نبحث عن الارتفاع الذى تقع دونه ٠,٤٠ من الحالات ، فنجد أنه يساوى ٠,٣٨٦٣ . أى أن هذه القيمة هى $ع_{ع}$. وقد سبق أن حصلنا على $ع_{ق}$ وهى تساوى ٠,١٧٥٥

وبذلك تكون $\bar{د}_{٣} = \frac{٠,٣٨٦٣ - ٠,١٧٥٥}{٠,٥٠}$

$$= \frac{٠,٢١٠٨}{٠,٥٠}$$

$$= ٠,٤٢١٦$$

وهكذا بالنسبة للرتبتين ٢ ، ١ ـ

$$\bar{د}_{٢} = \frac{,١٧٥٥ - ٠,٣٨٦٣}{٠,٣٠}$$

$$= - \frac{٠,٢١٠٨}{٠,٣٠} = - ٠,٧٠٢٠$$

، $$\bar{د}_{١} = \frac{صفر - ٠,١٧٥٥}{٠,١٠}$$

$$= - \frac{٠,١٧٥٥}{٠,١٠}$$

$$= - ١,٧٥٥$$

وبذلك نكون قد حولنا جميع الرتب إلى الدرجات المعيارية المناظرة لها . أى أنه يكون قد تعين لكل طالب درجة معيارية تكافىء رتبته . وهذه الدرجات المعيارية تعتبر درجات تقريبية للدرجات المعيارية التى نتوقع الحصول عليها لو أننا استطعنا قياس الاتجاه نحو انفاق المال على ميزان فترى . وعلى الرغم من أنها قيم تقريبية ، إلا أنه يمكن اعتبـــارها مجموعة من الدرجات تفصل بينها فترات متساوية .

يفترض مرتمان أن اهتمامنا ينصب على إيجاد درجة الاقتران بين اتجاه المجموعة التى تتكون من عشرة طلاب نحو إنفاق المال وعدد مرات ذهاب الطالب إلى دور السينما كل أسبوع .

فهنا نستطيع إيجاد معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون لأن رتب شدة الاتجاه قد تحولت إلى درجات معيارية متساوية الفترات ، وبذلك يكون استخدام هذا المعامل مناسبا لهذه البيانات .

فإذا افترضنا أننا استطعنا الحصول على بيانات عن عدد مرات ذهاب كل طالب إلى دور السينما كل أسبوع ، فإننا يمكن أن نكون جدولا كالآتى رقم (٦٦) .

رتب الاتجاه نحو إنفاق المال	دَ المناظرة للرتب	ص عدد مرات الذهاب إلى دور السينما كل أسبوع
٤	١,٧٥٥	٤
٣	٠,٤٢١٦	٥
٣	٠,٤٢١٦	٤
٣	٠,٤٢١٦	٣
٣	٠,٤٢١٦	٣
٣	٠,٤٢١٦	٣
٢	-٠,٧٠٢٧	٢
٢	-٠,٧٠٢٧	٣
٢	-٠,٧٠٢٧	٢
١	-١,٧٥٥	١

جدول رقم (٦٦)

ويمكن حساب قيمة معامل ارتباط بيرسون بين قيم دَ المبينة بهذا الجدول وبين قيم ص أى عدد مرات الذهاب إلى دور السينما كل أسبوع من الجدول الآتى رقم (٦٧).

	ص	$ص^{2}$	$\bar{د}$	$\bar{د}^{2}$	ص $\bar{د}$
	٤	١٦	١,٧٥٥٠	٣,٠٨٠	٧,٠٢٠
	٥	٢٥	٠,٤٢١٦	٠,١٧٨	٢,١٠٨
	٤	١٦	٠,٤٢١٦	٠,١٧٨	١,٦٨٦
	٣	٩	٠,٤٢١٦	٠,١٧٨	١,٢٦٥
	٣	٩	٠,٤٢١٦	٠,١٧٨	١,٢٦٥
	٣	٩	٠,٤٢١٦	٠,١٧٨	١,٢٦٥
	٢	٤	٠,٧٠٢٧ —	٠,٤٩٤	١,٤٠٥ —
	٣	٩	٠,٧٠٢٧ —	٠,٤٩٤	٢,١٠٨ —
	٢	٤	٠,٧٠٢٧ —	٠,٤٩٤	١,١٠٥ —
	١	١	١,٧٥٥٠ —	٣,٠٨٠	١,٧٥٥
المجموع	٣٠	١٠٢	صفر	٨,٥٣٢	٧,٩٣٦

جدول رقم (٦٧)

$$ر = \frac{\text{مج ص}\,\bar{د} - \frac{(\text{مج ص})(\text{مج }\bar{د})}{ن}}{\sqrt{\left[\text{مج ص}^{2} - \frac{(\text{مج ص})^{2}}{ن}\right]\left[\text{مج }\bar{د}^{2} - \frac{(\text{مج }\bar{د})^{2}}{ن}\right]}} \quad \cdots\cdots (٢)$$

$$= \frac{٧,٩٣٦ - \frac{(٣٠)(\text{صفر})}{١٠}}{\sqrt{\left[١٠٢ - \frac{(٣٠)^{2}}{١٠}\right]\left[٨,٥٣٢ - \frac{(\text{صفر})^{2}}{١٠}\right]}}$$

$$= \frac{٧,٩٣٦}{\sqrt{(١٢)}\,(٨,٣٥٢)} = \frac{٧,٩٣٦}{١٠,١٣٠} = ٠,٧٨٣$$

أى أن معامل الارتباط = ٠,٧٨٣

ولكن هذه القيمة تحتاج إلى تصحيح نظراً لأن الدرجات المعيارية التى حصلنا عليها نتيجة لتحويل الرتب تعبر عن أقسام متسعة نسبيا بدلا من أن تعبر عن درجات غير مبوبة . فتبويب قيم المتغير فى أقسام متسعة يقلل من تباين توزيع المتغير .

ولذلك يجب أن نقسم معامل الارتباط السابق على الانحراف المعيارى للمتغير لتعويض النقص الذى حدث فى قيمة معامـــل الارتباط نتيجة لاتساع الأقسام . وفى هـذه الحالة يصبح معامل الارتباط بعد تصحيحه مساويا لمعامل الارتباط المتعدد المتسلسل الذى اقترحه جاسبن Jaspen . أى أن :

$$ر_{مم} = \frac{ر}{ع_د} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٣)$$

وبتطبيق هذه الصورة على البيانات السابقة نجد أن :

$$ر_{مم} = \frac{٠,٧٨٣}{٠,٩٢٤} = ٠,٨٥$$

ويجب أن يلاحظ الباحث أن تحويل الرتب إلى درجات معيارية يؤدى إلى تغيير تفسير معامل ارتباط بيرسون . فمعامل الارتباط الناتج لايتضمن الفرض الخاص بخطية العلاقة فقط ، ولكنه يتضمن أيضا فرض أن المتغير الرتبى يتوزع توزيعا اعتداليا لو أننا استطعنا قياسه على ميزان فترى .

ويمكن تفسير معامل الارتباط المتسلسل المتعدد فى ضوء نسبة التباين المشترك التى يجب أن نتوقعها لو أننا تمكنا بالفعل من قياس المتغير الرتبى قياساً كميا .

ففى هذا المثال $ر_{مم} = ٠,٨٥$ ، $ر^{٢}_{مم} = ٠,٧٢$

أى أننا نتوقع أن ٧٢٪ من التباين فى عدد مرات ذهاب طلاب هذه العينة إلى دور السينما كل أسبوع كان من الممكن أن تفسر بمعلومية اتجاههم نحو إنفاق المال لو أننا تمكننا بالفعل من قياس الاتجاه على ميزان فترى .

ملخص طريقة حساب معامل الارتباط المتسلسل المتعدد :

يتضح مما سبق أن معامل الارتباط المتسلسل المتعدد يجمع فى طريقة واحدة بين تحويل رتب المتغير الرتبى إلى درجات معيارية ، واستخدام معامل ارتباط بيرسون . ولذلك فهو يعتبر تعديلا لمعامل ارتباط بيرسون .

والصورة الرياضية العامة التى يمكن أن يستخدمها الباحث لإيجاد معامل الارتباط المتسلسل المتعدد $ر_{مم}$ هى :

$$ر_{مم} = \frac{\text{مجـ}\ \bar{ص}_{ق}\ (ع_{ق} - ع_{ع})}{ع_{ص}\ \text{مجـ}\ \frac{(ع_{ق} - ع_{ع})^{٢}}{س}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٤)$$

حيث $\bar{ص}_{ق}$ ترمز إلى متوسط قيم المتغير ص لمجموعة فرعية معينة من مجموعات المتغير الرتبى .

، $ع_{ق} - ع_{ع}$ ترمز إلى الفرق بين ارتفاعى المنحنى الاعتدالى اللذين يحدان المجموعة الفرعية من أسفل ومن أعلى .

، س ترمز إلى نسبة الحالات فى مجموعة فرعية معينة .

، $ع_{ص}$ ترمز إلى الانحراف المعيارى لجميع قيم المتغير ص .

والجدول الآتي رقم (٦٨) يوضح كيفية تطبيق الصورة السابقة رقم (٤) على المثال السابق :

الرتب	قيم ص	$\overline{ص}$ ف	س	عق	عع	عق − عع	(عق − عع)^٢	(عق − عع)^٢ / س	$\overline{ص}$ف (عق − عع)
٤	٤	٤	٠,١٠	٠,١٧٥٥	صفر	٠,١٧٥٥	٠,٠٣٠٨	٠,٣٠٨٠	٠,٧٠٢٠
٣	٣،٣،٣،٤،٥	٣,٦	٠,٥٠	٠,٣٨٦٣	٠,١٧٥٥	٠,٢١٠٨	٠,٠٤٤٤	٠,٠٨٨٨	٠,٧٥٨٩
٢	٢،٢،٣	٢,٣٣٣	٠,٣٠	٠,١٧٥٥	٠,٣٨٦٣	−٠,٢١٠٨	٠,٠٤٤٤	٠,١٤٨٠	−٠,٤٩١٨
١	١	١	٠,١٠	صفر	٠,١٧٥٥	−٠,١٧٥٥	٠,٠٣٠٨	٠,٣٠٨٠	−٠,١٧٥٥
المجموع			١,٠٠			صفر		٠,٨٥٢٨	٠,٧٩٣٦

جدول رقم (٦٨)
طريقة مختصرة لحساب معامل الارتباط المتسلسل المتعدد

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مج(ص - \overline{ص})^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{١٢}{١٠}} = \sqrt{١,٢} = ١,٠٩٥$$

$$ر_{ثم} = \frac{مج \overline{ص}_{ف} (ع_{ق} - ع_{ف})}{ع_{ص} \, \frac{مج (ع_{ق} - ع_{ف})^{٢}}{س}}$$

$$= \frac{٠,٧٩٣٦}{(١,٠٩٥)(٠,٨٥٢٨)} = \frac{٠,٧٩٣٦}{٠,٩٣٣٨} = ٠,٨٥$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام معامل ارتباط بيرسون بعد تصحيحه .

ولذلك يمكن استخدام هذه الصورة عندما يريد الباحث إيجاد معامل الارتباط المتسلسل المتعدد بافتراض أن هناك علاقة خطية بين المتغيرين ، وأن قيم المتغير الرتبي تتوزع توزيعاً اعتدالياً لو أنه استطاع قياس هذا المتغير على ميزان فترى .

والخلاصة أنه يمكن أن يحسب الباحث قيمة معامل الارتباط المتسلسل المتعدد إذا اتبع الخطوات الآتية :

١ — يوجد $\overline{ص}_{ف}$ أى متوسط قيم المتغير الفترى (ص) لكل مجموعة فرعية من الرتب التى يشتمل عليها المتغير الرتبي .

٢ — يرجع إلى جدول ارتفاعات المنحنى الاعتدالى لإيجاد الارتفاعات التى تحد كل مجموعة من المجموعات الفرعية .

٣ — يطرح الارتفاع الذى يحد المجموعة من أعلى من الارتفاع الذى يحد المجموعة من أسفل .

٤ — يحسب نسبة الحالات فى كل مجموعة .

٥ — يحسب الانحراف المعيارى للمتغير الفترى (ص) .

٦ — يوجد $ر_{م م}$ باستخدام الصورة الرياضية السابقة رقم (٣) .

مقاييس إحصائية أخرى :

يوجد عدد من المقاييس الإحصائية التى يمكن أن يستخدمها الباحث لإيجاد درجة الاقتران بين متغيرين أحدهما من المستوى الرتبى ، والآخر من المستوى الفترى وهى :

١ — معامل الارتباط الثنائى المتسلسل : وهو يعتبر حالة خاصة من معامل الارتباط المتسلسل المتعدد حيث يشتمل المتغير الرتبى على مجموعتين فقط من الرتب . ويختلف هذا المعامل عن معامل الارتباط المتسلسل المتعدد فى أنه يمكن حساب قيمته باستخدام صورة خاصة به تناسب الميزان الرتبى الذى يشتمل على رتبتين . ونظراً لأهمية هذا المقياس الإحصائى فى البحوث النفسية والتربوية وبخاصة فى مجال بناء الاختبارات والمقاييس المختلفة ، فإننا سنعرض له بالتفصيل فى الفصل القادم .

٢ — معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقى : ناقشنا هذا المعامل فى مستهل هذا الفصل ، وقلنا أن استخدام هذا المعامل يتطلب تحقق فرض أن الفترات التى تفصل بين رتب المتغير الرتبى تكون متساوية ونظراً لصعوبة تحقق هذا الفرض فى كثير من البحوث النفسية والتربوية ، فإنه لايستخدم إلا نادراً . وربما كان هذا هو سبب عدم مناقشتنا لطريقة حسابه فى هذا الفصل .

٣ ـــ معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي : ويعتبر هذا المعامل حالة خاصة من معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقي حيث يشتمل المتغير الرتبي على رتبتين فقط ، وينطبق على هذا المعـــامل ماينطبق على معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الحقيقي من مزايا وعيوب . ولكي نجعل الباحث على دراية بطبيعة هذا النوع من المعاملات فإننا سنعرض لهذا المعامل أيضا بالتفصيل في الفصل القادم .

تمارين على الفصل الثانى عشر

١ ـ أراد باحث إيجاد العلاقة بين الذكاء وقابلية التأثر بالتنويم الإيحائى ، فاختار عينة تتكون من ٣٢ فرداً من مستويات اجتماعية واقتصادية مختلفة تتراوح أعمارهم بين ١٦ ، ٣٢ عاماً وطبق على كل منهم اختبار ستانفورد بينيه للذكاء . ثم خصص لكل منهم جلسات فى التنويم الإيحائى ، وسجل استجاباتهم لمثيرات معينة . ثم عين لكل منهم درجة على مقياس قابلية التأثر بالتنويم الإيحائى .

واعتبر الباحث أن هذه الدرجات من المستوى الفترى بالرغم من معالجته لها على أنها من المستوى الرتبى . وفيما يلى درجات اختبار الذكاء لكل من الرتب الأربع للأفراد على مقياس التنويم الإيحائى .

الرتب فى مقياس قابلية التأثر

بالتنويم الإيحائى

١	٢	٣	٤
١٢٨	١٣٩	١٤٤	١٣٦
١١١	١٣٤	١٣٧	١٣١
١٠٤	١٣٣	١٣٤	١٢٦
١٠٣	١٣٢	١٣١	١١٦
١٠٣	١٣٠	١٢٩	
١٠١	١٢٩	١٢٦	
١٠١	١٢٣	١٢٢	
	١١٧	١١٧	
	١١٦	١١١	
	١١٢	١٠٩	
	١٠٦		

أحسب معامل الارتباط المتسلسل المتعدد بين المتغيرين فى هذا البحث ، وفسر القيمة الناتجة فى ضوء مفهوم التباين المشترك .

٢ — قام معلم بتصحيح أوراق اختبار ١٥ طالباً فى مادة الجغرافيا . وقدر لكل منهم درجة رقمية . بينما أعطى تقديراً كيفياً مثل ممتاز (ا) ، جيد جداً (ب) ، جيد (ح) ، مقبول (د) ، راسب (ه) للمشروع الذى قدمه كل طالب منهم . فإذا أراد المعلم إيجاد درجة العلاقة بين درجات الاختبار ، وتقديرات المشروع المبينة بالجدول الآتى :

تقدير المشروع	درجة الاختبار
ا	١٩
ا	١٨
ا	٢٢
ب	١٩
ب	٢٠
ب	١٨
ب	١٨
ح	١٦
ح	١٥
ح	١٢
ح	١٣
ح	١٦
د	٦
د	٨
ه	٥

احسب معامل الارتباط المتسلسل المتعدد بين نوعى الدرجات ، وفسر القيمة الناتجة ، مع ذكر الفروض التى يجب أن تتوفر فى هذه البيانات حتى يكون التفسير صحيحاً .

الفصل الثالث عشر

مقاييس العلاقة

إذا كان أحد المتغيرين أو كلاهما من النوع الثنائى

معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى

معامل فاى

معامل الارتباط الثنائى المتسلسل

معامل الارتباط الرباعى

مقـــدمة :

عرضنا فى الفصول السابقة المقاييس والطرق المختلفة التى يمكن أن يستخدمها الباحث فى إيجاد العلاقة بين متغيرين . وقد لاحظنا كيف أن اختلاف موازين أو مستويات قياس كل من المتغيرين يؤدى إلى اختلاف المقاييس الإحصائية التى تصف درجة الاقتران بينهما .

ولكن أحياناً يواجه الباحث مواقف بحثية مختلفة وبخاصة فى مجال بناء الاختبارات والمقاييس النفسية والتربوية يمكن تلخيصها فيما يلى :

١ ـــ ربما يود الباحث إيجاد العلاقة بين متغيرين أحدهما من النوع الثنائى Dichotomous ، أى أن المتغير يشتمل على قسمين منفصلين ، والآخر من النوع المتصل . فالمتغير الثنائى ربما يكون درجات الطلاب فى مفردة اختيار من متعدد وهى عادة الواحد الصحيح أو الصفر ، أو ربما يكون المتغير الثنائى هو درجات عبارة من عبارات استبيان يجيب عليها الفرد إما بنعم أو لا أو أوافق أو لا أوافق وهكذا . وفى كلتا الحالتين يكون المتغير المتصل هو الدرجة الكلية التى يحصل عليها الطالب أو الفرد فى الاختبار أو الاستبيان .

وأحياناً يكون المتغير الثنائى هو جنس الطالب أى ذكر أو أنثى أو المرحلة التعليمية التى يدرس بها مثل التعليم الثانوى أو التعليم الجامعى ، ويكون المتغير المتصل هو درجات الطالب فى اختبار ما .

٢ ـــ أو ربما يود الباحث فى أحيان أخرى إيجاد العلاقة بين متغيرين كل منهما من النوع الثنائى ، مثل العلاقة بين استجابة مجموعة من الطلاب بنعم أو لا على عبارتين من عبارات أحد الاستبيانات . فهنا يكون المتغير الثنائى الأول هو الإستجابة للعبارة الأولى بنعم أو لا ، والمتغير الثنائى الثانى هو الاستجابة للعبارة الثانية بنعم أو لا أيضاً . أو ربما يكون المتغير الثنائى الأول مثلا هو عدد الساعات

التى قضاها كل لاعب فى التدريب والتى تزيد أو تقل عن عدد معين من الساعات ، والمتغير الثنائى الثانى هو ما إذا كان اللاعب قد أصيب أثناء مباراة معينة أم لا . فهنا يكون المطلوب إيجاد العلاقة بين متغيرين من النوع الثنائى هما فترة التدريب والإصابة أثناء المباراة فى جميع هذه الحالات يحتاج الباحث إلى مقاييس إحصائية تناسب طبيعة هذا النوع من المتغيرات . وقد عرضنا فى الفصول السابقة بعض المقاييس التى تصلح فى مثل هذه الحالات ، ولكننا أردنا أن نجمع المقاييس الشائعة الاستخدام التى تعالج العلاقة بين المتغيرات الثنائية معاً فى هذا الفصل حتى يستطيع الباحث أن ينظر إلى هذه المقاييس نظرة أكثر شمولية ، وبذلك يتسنى له فحصها فحصاً مستنيرا قبل أن يختار من بينها القياس الذى يناسب متغيرات بحثه . بالإضافة إلى أن بعض هذه المقاييس يعتبر حالات خاصة من معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون ، والبعض الآخر يعطى تقديرا Estimate للقيمة المتوسطة لمعامل ارتباط بيرسون إذا افترضنا أن البيانات كان من الممكن أن تحقق شروطاً معينة .

ومن أمثلة النوع الأول :

١ — معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى .

٢ — معامل الارتباط الرباعى الحقيقى ويعرف باسم معامل فاى .

ومن أمثلة النوع الثانى :

١ — معامل الارتباط الثنائى المتسلسل .

٢ — معامل الارتباط الرباعى .

ويعتبر النوع الأول من المقاييس حالة خاصة من معامل ارتباط بيرسون ، ويستخدم عندما يكون أحد المتغيرين أو كلاهما من النوع الثنائى .

أما النوع الثانى من المقاييس فهو لا يعطى نفس قيم معامل ارتباط بيرسون وإنما يعطى أفضل تخمين لقيم هذا المعامل لعينة ما إذا اختلف شكل توزيع

البيانات عما هو عليه . بمعنى أن هـذه المقاييس تعتمد على فروض خاصـة بطبيعة السمات التي يمثلها المتغير لم تنعكس في الطريقة التي جمعت ودونت بها البيانات الخاصة بهذا المتغير . ولذلك فإن قيم المعاملات الناتجة عن استخدام هذه المقاييس لا تساوي القيم الناتجة عن استخدام معامل ارتباط بيرسون بدلا منها .

وعلى وجه التحديد فإن النوع الثاني من المقاييس هو بمثابة تقدير لقيم معامل ارتباط بيرسون إذا كانت البيانات التي وضعت على الصورة الثنائية من الممكن قياسها على ميزان متصل .

وسوف نهتم في هذا الفصل بإبراز الأساس المنطقي لكل من هذين النوعين من المقاييس ، والعلاقة بينهما ، والفروض التي يجب أن تتحقق في البيانات حتى يمكن استخدام أي منهما . وكذلك نعرض الطرق المختلفة لحساب كل من هذه المقاييس .

مقاييس النوع الأول :

(أولا) معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي :

Point Biserial Correlation.

أحياناً يحتاج الباحث إلى إيجاد درجة العلاقة بين متغيرين أحدهما من النوع الثنائي والآخر من المستوى الفتري . وهنا ربما يواجه الباحث إحـــدى الحالتين الآتيتين :

١ — الحالة التي يكون فيها المتغير الثنائي من نوع المتغير الثنائي الحقيقي . والمثال الشائع لهذا النوع من المتغيرات هو الجنس (أي ما إذا كان الفرد ذكراً أم أنثى) .

٢ — الحالة التي يعتبر فيها المتغير الثنائي بمثابة مقياس لسمة توزيعها من النوع المتصل ، ولكن تم جمع البيانات الخاصة بهذا المتغير وتدوينها على هــذه

الصورة الثنائية إما لغرض التبسيط أو لعدم وجود مقياس أكثر دقة لقياس السمة .

ومثال ذلك الإجابة على مفردات اختبار اختيار من متعدد (فالإجابة على كل مفردة إما أن تكون صحيحة أو خطأ) ، وهنا يفترض أن توزيع درجات السمة التي يقيسها الاختبار من النوع المتصل . ولكن ينظر عادة إلى التوزيع الثنائي لمثل هذا النوع من المفردات على أنه متغير ثنائي حقيقي ، والدرجة الكلية في الاختبار على أنها متغير متصل للسمة التي يقيسها الاختبار .

ويقتصر عادة في القياس النفسي والتربوي على استخدام مثل هذا النوع من توزيعات مفردات الاختبارات في تقسيم الطلاب إلى مجموعتين أو التنبؤ باستجاباتهم للمفردات بوجه عام .

وتختلف طريقة إيجاد العلاقة بين متغيرين في الحالة الأولى عنها في الحالة الثانية . فطريقة إيجاد معامل الارتباط في الحالة الأولى تعتبر إحدى الحالات الخاصة لمعامل ارتباط بيرسون ، أما طريقة إيجاد معامل الارتباط في الحالة الثانية فهي تعتبر بمثابة تقدير لمعامل ارتباط بيرسون . ونظراً لأننا نعرض هنا مقاييس النوع الأول فإننا سوف نبدأ بمناقشة الحالة الأولى .

ويسمى معامل الارتباط الذي يستخدم في إيجاد درجة العلاقة بين متغيرين أحدهما من النوع الثنائي الحقيقي والآخر من النوع المتصل « معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي » ، وهو يعتبر حالة خاصة من معامل الارتباط المتسلسل المتعدد الذي عرضنا له في الفصل السابق . وهنا يفترض أن توزيع المتغير الثنائي يكون منتظماً في كل من قسمي المتغير بمعنى أنه عند تقسيم الطلاب إلى مجموعتين إحداهما مجموعة الناجحين والأخرى مجموعة الراسبين مثلا ، فإننا

نكون قد افترضنا ضمناً أن جميع طلاب المجموعة الأولى متكافئون في النجاح وجميع طلاب المجموعة الثانية متكافئون في الرسوب .

ويستخدم معامل ارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي في كثير من الأحيان في تحليل مفردات الاختبارات حيث نوجد معامل الارتباط بين درجات كل مفردة في الاختبار والدرجة الكلية في الاختبار بغرض تحديد مدى اتساق درجات الطلاب في كل مفردة مع درجاتهم في الاختبار ككل . ويمكن إجراء ذلك بأن نبين لكل طالب أجاب إجابة صحيحة على المفردة الرقم ١ ، ولكل طالب أجاب إجابة خطأ على المفردة الرقم صفر ، ثم نوجد معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون ، فيكون الناتج هو معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي . وبالطبع يمكن أن نستخدم أوزاناً تختلف عن الواحد الصحيح والصفر ونحصل على نفس النتيجة لأن معامل الارتباط الناتج لا يعتمد على هذه الأوزان — ولكن يفضل استخدام الواحد الصحيح والصفر لتبسيط العمليات الحسابية .

ونستطيع التوصل إلى صورة رياضية أبسط من صورة معامل ارتباط بيرسون لحساب معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي .

ويمكننا اشتقاق هذه الصورة من صورة معامل ارتباط بيرسون بطريقة جبرية مباشرة . ولذلك فإن الصورتين متكافئتان .

وهذه الصورة هي :

$$ر_{ش ح} = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}}{ع_س} \sqrt{ص_1 ص_0} \quad \dots (1)$$

حيث $ر_{ث ح}$ ترمز إلى معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي .

، $\bar{س}_1$ ترمز إلى متوسط توزيع قيم المتغير المتصل (س) المجموعة التي حصلت على الواحد الصحيح في المتغير الثنائي .

، $\bar{س}$ ترمز إلى متوسط توزيع قيم المتغير المتصل (س) التي حصلت على الصفر في المتغير الثنائي .

، $ع_س$ ترمز إلى الانحراف المعياري للمتغير المتصل .

، $ص_1$ ترمز إلى نسبة الأفراد في المجموعة الكلية الذين حصلوا على الواحد الصحيح في المتغير الثنائي .

، $ص_.$ ترمز إلى نسبة الأفراد في المجموعة الكلية الذين حصلوا على الصفر في المتغير الثنائي .

ويجب أن يلاحظ الباحث أن هذه الصورة تكافىء صورة معامل ارتباط بيرسون إذا استخدمنا ن في حساب قيمة $ع_س$ بدلا من ن — ١ . أي تستخدم الصورة :

$$ع_س = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

ولكي نوضح للباحث كيف أن الصورتين متكافئتان نعرض المثال الآتي :

نفترض أننا أردنا إيجاد الارتباط بين الدرجة الكلية في اختبار اختيار من متعدد (س) ودرجة إحدى مفردات الاختبار (ص) المجموعة تتكون من ثمانية طلاب ، وهذه الدرجات مبينة بالجدول الآتي (رقم ٦٩) .

المتغير المتصل س	س٢	المتغير الثنائي ص	ص٢	س ص
١	١	١	١	١
١	١	١	١	١
٢	٤	صفر	صفر	صفر
٦	٣٦	١	١	٦
٦	٣٦	١	١	٦
٧	٤٩	صفر	صفر	صفر
٨	٦٤	صفر	صفر	صفر
٩	٨١	صفر	صفر	صفر
المجموع ٤٠	٢٧٢	٤	٤	١٤

جدول رقم (٦٩)

الارتباط بين متغيرين احدهما من النوع الثنائي
والآخر من النوع المتصل

فإذا حسبنا معامل ارتباط بيرسون باستخدام الدرجات الخام مباشرة نجد أن:

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س} \times \text{مج ص}}{\sqrt{\left[\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2\right]\left[\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2\right]}}$$

$$= \frac{8 \times 14 - 40 \times 4}{\sqrt{(8 \times 272 - 1600)\,(8 \times 4 - 16)}}$$

$$= -\frac{48}{24 \times 4} = -0{,}50$$

والآن نوجد معامل الارتباط الثنائي المتسلسل الحقيقي لنفس مجموعة البيانات باستخدام الصورة رقم (١) السابقة .

ولتطبيق هذه الصورة يمكن أن يتبع الباحث الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : يوجد $\overline{س}_1$ أى متوسط الدرجات الكلية فى الاختبار للمجموعة التى حصلت على الواحد الصحيح فى المفردة كالآتى :

$$\overline{س}_1 = \frac{١ + ١ + ٦ + ٦}{٤} = \frac{١٤}{٤} = ٣,٥$$

والخطوة الثانية : يوجد $\overline{س}_.$ أى متوسط الدرجات الكلية فى الاختبار للمجموعة التى حصلت على الصفر فى المفردة كالآتى :

$$\overline{س}_. = \frac{٢ + ٧ + ٨ + ٩}{٤} = \frac{٢٦}{٤} = ٦,٥$$

والخطوة الثالثة : يوجد $ع_س$ أى الانحراف المعيارى للدرجات الكلية فى الاختبار باستخدام الصورة :

$$ع_س = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن}}$$

وهذا يتطلب تكوين جدول كالآتى :

س	س — $\overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$
١	— ٤	١٦
١	— ٤	١٦
٢	— ٣	٩
٦	+ ١	١
٦	+ ١	١
٧	+ ٢	٤
٨	+ ٣	٩
٩	+ ٤	١٦
المجموع ٤٠ $\overline{س}$ = ٥٥	صفر	٧٢

أى أن $ع_س = \sqrt{\frac{٧٢}{٨}} = \sqrt{٩} = ٣$

والخطوة الرابعة : يوجد $ص_١$ وهى نسبة الطلاب الذين حصلوا على الواحد الصحيح فى المفردة .

$$ص_١ = \frac{٤}{٨} = ٠,٥٠$$

والخطوة الخامسة : يوجد $ص_٠$ وهى نسبة الطلاب الذين حصلوا على الصفر فى المفردة .

$$ص_٠ = \frac{٤}{٨} = ٠,٥٠$$

والخطوة السادسة : يطبق الصورة السابقة رقم (١) لإيجاد معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى كالآتى :

$$ر_{ثح} = \frac{٣,٥ - ٦,٥}{٣} \sqrt{(٠,٥٠)(٠,٥٠)}$$

$$= - ١ \times ٠,٥٠ = - ٠,٥٠ \ .$$

ويلاحظ أنها تساوى قيمة معامل ارتباط بيرسون كما ذكرنا .

صورة ثانية لحساب $ر_{ثح}$:

يمكن أن يستخدم الباحث صورة أخرى لحساب $ر_{ثح}$ بدلا من الصورة رقم(١) السابقة إذا أراد تبسيط العمليات الحسابية بدرجة أكبر ، وهذه الصورة هى :

$$ر_{ثح} = \frac{\bar{س}_١ - \bar{س}}{ع_س} \sqrt{\frac{ص_١}{ص_٠}} \quad ... (٢)$$

حيث $\overline{س}$ ترمز إلى متوسط درجات المتغير المتصل (س) .
وبقية الرموز كما هي معرفة فى الصورة رقم (١) .

صورة ثالثة لحساب $ر_{ث ح}$:

يمكن استخدام الصورة الآتية لحساب $ر_{ث ح}$ بدلا من الصورتين (١ ، ٢) السابقتين .

وتتميز هذه الصورة بأنه يمكن التعويض فيها مباشرة بالقيم المدونة فى الجدول رقم (٦٩) ، ويمكن اشتقاق هذه الصورة بطريقة مباشرة من الصورة المستخدمة لإيجاد معامل ارتباط بيرسون من الدرجات الخام . وهذه الصورة هى :

$$ر_{ث ح} = \frac{\overline{س}_1 - \overline{س}_\cdot}{\sqrt{\frac{ن}{ن_1 \, ن_\cdot}} \sqrt{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}} \quad \cdots\cdots (٣)$$

حيث ن ترمز إلى عدد أزواج القيم أو الملاحظات .
، $ن_1$ ترمز إلى عدد قيم المتغير الثنائى التى تساوى الواحد الصحيح .
، $ن_\cdot$ ترمز إلى عدد قيم المتغير الثنائى التى تساوى الصفر .
، $ن = ن_1 + ن_\cdot$
، $\overline{س}_1$ ، $\overline{س}_\cdot$ سبق تعريفهما فى الصورة رقم (١) السابقة .

فإذا عوضنا فى هذه الصورة بالقيم المبينة بالجدول رقم (٦٩) نجد أن :

$$ر_{ث ح} = \frac{٣,٥ - ٦,٥}{\sqrt{\frac{٨}{(٤)\,(٤)}} \sqrt{٢٧٢ - \frac{١٦٠٠}{٨}}}$$

$$= \frac{- ٣}{\sqrt{\frac{١}{٢}} \sqrt{٧٢}} = \frac{- ٣}{\sqrt{٣٦}} = - \frac{٣}{٦}$$

$$= - ٠,٥٠$$

ونلاحظ أنها نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام الصورة رقم (١) .

ويمكن إيجاد معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى إذا كان المتغير الثنائى من النوع الاسمى مثل متغير الجنس، وعندئذ يمكن أن نعين مثلا الرقم ١ للذكور، والرقم صفر للإناث .

تفسير معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى :

يجب أن يلاحظ الباحث أن قيمة المعامل ر$_{\text{ث ح}}$ تعتمد على قيمة كل من النسبتين ص$_1$ ، ص$_2$ ، فأكبر وأصغر قيمة للمقدار ر$_{\text{ث ح}}$ عندما تكون ص$_1$ = ص$_2$ = ٠,٥٠ تختلف عن أكبر وأصغر قيمة له إذا كانت ص$_1$ = ٠,٢٠ ، ص$_2$ = ٠,٨٠ مثلا . فإذا تساوى توزيع الافراد على قسمى المتغير الثنائى (أى إذا كانت ص$_1$ = ص$_2$) ولم يكن هناك تداخل بين المجموعتين ، فإن ر$_{\text{ث ح}}$ يمكن أن تنحصر بين ± ٠,٧٩٨ . أما فى الحالات المتطرفة التى تشتمل فيها إحدى المجموعتين على ٩٠٪ من الأفراد مثلا فإن قيمة ر$_{\text{ث ح}}$ يمكن أن تنحصر بين ± ٠,٥٨ حتى إذا لم يكن هناك تداخل بين المجموعتين .

وبالرغم من أنه يمكن التنبؤ بدرجة تامة بقيم متغير ثنائى بمعلومية قيم متغير متصل إذا لم يكن هناك تداخل بين توزيعى كل من المتغيرين ، إلا أنه لايمكن التنبؤ بدرجة تامة بقيم متغير متصل بمعلومية قيم متغير ثنائى. إذ لابد من حدوث بعض الأخطاء عند التنبؤ بقيم متغير مداه متسع بمعلومية متغير له قيمتين فقط . ولذا فإن معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى يمكن تفسير قيمته على أنها مقياس لدرجة العلاقة بين المتغيرين .

ولكن لايجب أن يتعدى ذلك إلى التفسيرات الأخرى الممكنة لمعامل ارتباط بيرسون مثل التنبؤ ، على الرغم من أن المعامل ر$_{\text{ث ح}}$ يعتبر حالة خاصة من معامل ارتباط بيرسون .

طريقة حساب رث ح إذا كانت البيانات مجمعة فى جدول توزيع تكرارى :

إذا كان لدى الباحث مجموعة كبيرة من الدرجات وأراد إيجاد معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى فإنه ربما يكون من الأفضل تبويب هذه الدرجات فى جدول توزيع تكرارى، ويوجد المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات المتغير المتصل باستخدام طريقة الانحرافات التى عرضنا لها فى الفصلين الثالث والرابع ، ثم يطبق إحدى الصور الثلاث السابقة لإيجاد رث ح .

ولتوضيح ذلك نفترض أن الباحث أراد أن يصمم اختباراً تحصيليا بحيث يكون لكل مفردة فى الاختبار القدرة على تمييز الطلاب الأقوياء والطلاب الضعاف فى التحصيل . فهذا يتطلب منه إيجاد معامل التمييز لكل مفردة عن طريق حساب معامل الارتباط بين درجات الطلاب فى إحدى مفردات الاختبار (عادة تكون الإجابة على المفردة إما صحيحة أو خطأ ، أى يعتبر توزيع درجات كل مفردة من النوع الثنائى) ، ودرجاتهم فى الاختبار ككل (وتوزيع هذه الدرجات من النوع المتصل) ، والجدول الآتى رقم (٧٠) يوضح نتائج تحليل إحدى مفردات مثل هذا الاختبار :

(١) فئات درجات الاختبار (س)	(٢) عدد الإجابات الصحيحة على المفردة (ت١)	(٣) عدد الإجابات الخطأ على المفردة (ت٠)	(٤) تكرار فئات درجات الاختبار (ت)	(٥) الانحراف عن المتوسط سَ	(٦) ت سَ	(٧) ت سَ٢	(٨) ت١ سَ
٧٠ — ٧٤	٣	صفر	٣	+ ٥	١٥	٧٥	١٥
٦٥ — ٦٩	٦	١	٧	+ ٤	٢٨	١١٢	٢٤
٦٠ — ٦٤	٦	٢	٨	+ ٣	٢٤	٧٢	١٨
٥٥ — ٥٩	٥	٤	٩	+ ٢	١٨	٣٦	١٠
٥٠ — ٥٤	٦	٢	٨	+ ١	٨	٨	٦
٤٥ — ٤٩	٧	٦	١٣	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٠ — ٤٤	٦	٨	١٤	— ١	— ١٤	١٤	— ٦
٣٥ — ٣٩	٣	٦	٩	— ٢	— ١٨	٣٦	— ٦
٣٠ — ٣٤	٣	٩	١٢	— ٣	— ٣٦	١٠٨	— ٩
٢٥ — ٢٩	١	٤	٥	— ٤	— ٢٠	٨٠	— ٤
٢٠ — ٢٤	صفر	١٢	١٢	— ٥	— ٦٠	٣٠٠	صفر
المجموع	٤٦	٥٤	١٠٠		— ٥٥	٨٤١	٤٨

جدول رقم (٧٠)

خطوات حساب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى بين درجات احدى مفردات الاختبار ودرجات الاختبار ككل لمجموعة من الطلاب

وبالنظر إلى هذا الجدول نجد أن العمود الاول يتكون من فئات الدرجات الكلية فى الاختبار . والعمود الثانى يتكون من عدد الإجابات الصحيحة على المفردة . فمثلا إذا افترضنا أن الدرجة الكلية التى حصل عليها أحد الطلاب فى الاختبار هى ٧٢ ، وأن هذا الطالب أجاب على هذه المفردة إجابة صحيحة فإننا نضع علامة فى هذا العمود أمام الفئة ٧٠ — ٧٤ ، وهكذا بالنسبة لبقية الطلاب. أما إذا حصل طالب على الدرجة الكلية ٣٦ فى الاختبار ، وأجاب إجابة خطأ على المفردة فإننا نضع علامة فى العمود الثالث أمام الفئة ٣٥ — ٣٩ وهكذا .

وفى الحقيقة فإن إجراء هذه العمليات هو بمثابة رسم شكل انتشارى كما هو الحال عند حساب معامل ارتباط بيرسون ، ولكننا نستخدم هنا متغيرين أحدهما من النوع المتصل (على المحور السينى) والآخر من النوع الثنائى (على المحور الصادى) .

أما العمود الرابع فهو يشتمل على تكرار كل فئة من فئات المتغير س ، ومجموع هذا العمود يساوى المجموع الكلى لعدد الطلاب .

وبعد ذلك نبدأ فى حساب الانحراف المعيارى ومتوسط الدرجات الكلية فى الاختبار . والأعمدة رقم ٥ ، ٦ ، ٧ توضح خطوات حساب كل منهما . ونظراً لاننا نحتاج إلى متوسط درجات الطلاب الذين أجابوا على المفردة إجابة صحيحة فإننا أضفنا العمود رقم ٨ وهو يتكون من حواصل ضرب القيم المتناظرة فى العمودين الثانى والخامس .

ولإيجاد $ر_{ث ح}$ نطبق الصورة رقم (٢) السابقة . وقد اخترنا هذه الصورة لنوضح للباحث كيفية تطبيقها نظراً لاننا قد استخدمنا الصورتين رقمى ١ ، ٢ فيما سبق .

ولذلك يجب أولا إيجاد قيمة كل من $\overline{س_١}$ ، $\overline{س}$ بطريقة الانحرافات التى عرضناها فى الفصل الثالث . ولكننا لن نعيد تفاصيلها هنا ، وعلى الباحث أن يرجع إلى هذا الفصل إذا تطلب الأمر ذلك .

$$\bar{\text{س}}_{1} = ٤٧ + \frac{٤٨}{٤٦}\,(٥) = ٤٧ + ٥,٢$$

$$= ٥٢,٢$$

$$،\ \bar{\text{س}}_{\circ} = ٤٧ + \frac{-٥٥}{١٠٠}\,(٥)$$

$$= ٤٧ + (-\,٢,٧٥)$$

$$= ٤٤,٢$$

ويجب ثانياً إيجاد الانحراف المعيارى للمتغير س بالطريقة التى عرضنا بها في الفصل الرابع .

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مج ت ح}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}}\right)^{2}} \times \text{ف}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٤١}{١٠٠} - \left(\frac{-٥٥}{١٠٠}\right)^{2}} \times ٥$$

$$= \sqrt{٨,٤١ - ٠,٣٠٢٥} \times ٥$$

$$= \sqrt{٨,١٠٧٥} \times ٥$$

$$= ٢,٨٤ \times ٥ = ١٤,٢$$

ثم نوجد ص$_{1}$ ، ص$_{\circ}$ كالآتى :

$$\text{ص}_{1} = \frac{٤٦}{١٠٠} = ٠,٤٦$$

$$،\ \text{ص}_{\circ} = \frac{٥٤}{١٠٠} = ٠,٥٤$$

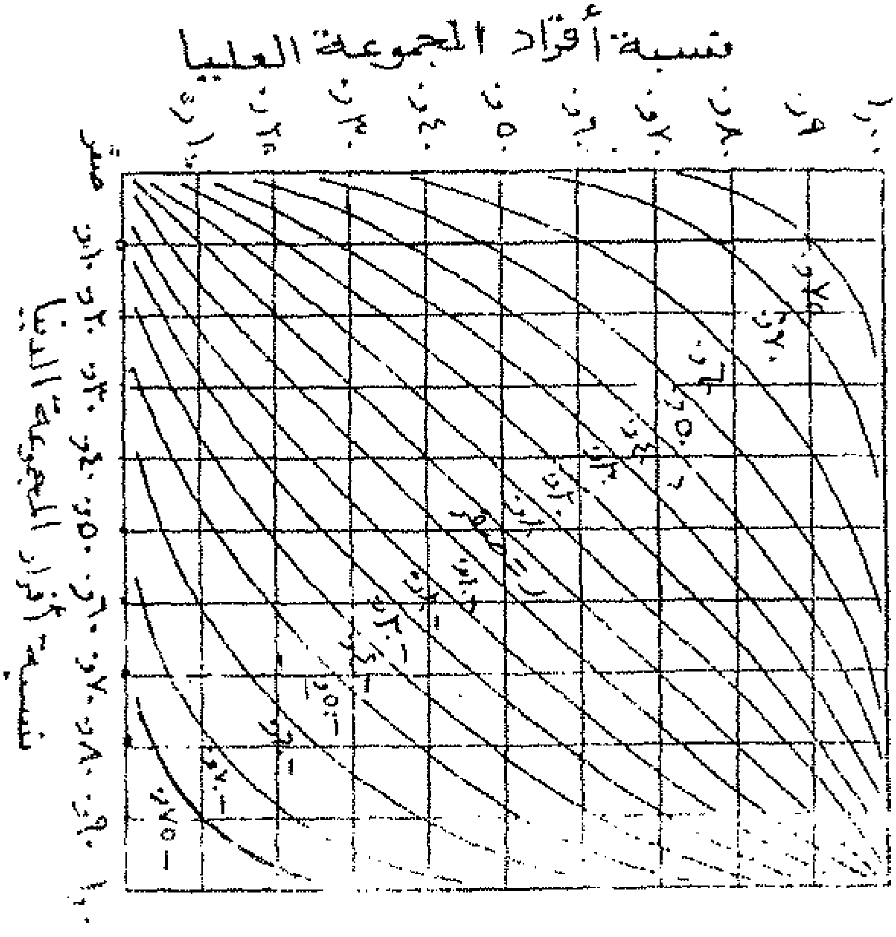
وبذلك تكون :

$$\text{ر}_{\text{ث ح}} = \frac{٥٢,٢ - ٤٤,٢}{١٤,٢}\ \sqrt{\frac{٠,٤٦}{٠,٥٤}}$$

$$= \sqrt{\frac{٨}{١٤,٢}} \quad ٠,٨٥١٨٥١$$

$$= ٠,٥٦٣ \times ٠,٩٢٣ = ٠,٥٢$$

وفى الحقيقة إذا كان الاختبار يتكون من عدد كبير من المفردات ، فإن هذه الطريقة تصبح غير عملية . ولذلك من الأفضل أن يلجأ الباحث فى هذه الحالة إلى إحدى الحاسبات الالكترونية ، أو يمكنه الحصول على قيمة تقديرية لمعامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى باستخدام الشكل البيانى الآتى الذى صممه دينجمان Dingman ، وهو مبين بالشكل الآتى (رقم ٥٩) :



شكل رقم (٥٩)

تقدير قيم المعامل ر ث ح إذا انقسم المتغير الثنائى عند نقطة الوسيط

(شكل دينجمان)

ويمكن أن يستخدم الباحث هذا الشكل إذا انقسم المتغير الثنائى عند نقطة الوسيط .

وبالنظر إلى هذا الشكل نجد أن نسبة الطلاب الأقوياء فى التحصيل الذين أجابوا إجابة صحيحة على مفردة معينة مبينة على المحور الرأسى ، ونسبة الطلاب الضعاف فى التحصيل الذين أجابوا إجابة خطأ على المفردة مبينة على المحور الأفقى.

فإذا أراد الباحث إيجاد القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى رث ح عليه أن يحدد كلا من النسبتين أولا ، ثم يرجع إلى الشكل ويوجد نقطة تقاطع العمودين المرسومين أحدهما من النقطة على المحور الأفقى التى تمثل نسبة الأفراد الضعاف فى التحصيل ، والآخر من النقطة على المحور الرأسى التى تمثل نسبة الأفراد الأقوياء فى التحصيل ، فتكون نقطة التقاطع هى رث ح .

ولتوضيح ذلك نحاول الحصول على قيمة تقديرية للمعامل رث ح من البيانات الموضحة بجدول رقم (٧٠) . وهنا لا بد أن نحسب قيمة الوسيط للمتغير س فنجده يساوى ٤٤ تقريباً . وبالنظر إلى العمود رقم ٢ فى الجدول نجد أن هناك ٣٣ طالباً تفوق درجاتهم هذه القيمة ، ولذلك فإن نسبة هؤلاء الطلاب الأقوياء فى التحصيل $= \frac{٣٣}{٤٦} =$ ٠٫٧٢ .

وكذلك بالنظر إلى العمود رقم ٣ فى الجدول نجد أن هناك ١٥ طالباً تقل درجاتهم عن قيمة الوسيط ، ولذلك فإن نسبة هؤلاء الطلاب الضعاف فى التحصيل $= \frac{١٥}{٥٤} =$ ٠٫٢٨ .

وبالرجوع إلى شكل رقم (٥٢) نوجد نقطة تقاطع العمودين المرسومين من

النقطتين ٠,٧٢ ، ٠,٢٨ على المحورين الرأسى والأفقى على الترتيب ، فنجد أن القيمة التقديرية للمعامل ر ث ح تساوى ٠,٥٣ تقريباً ، وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

(ثانياً) معامل الارتباط الرباعى الحقيقى (معامل فاى)

Fourfold or Phi Coefficient

يعتبر معامل الارتباط الرباعى الحقيقى الذى يعرف باسم معامل فاى ويرمز له بالحرف اليونانى ϕ إمتداد لمعامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى إلى الحالة التى يكون فيها كل من المتغيرين من النوع الثنائى الحقيقى .

وفى الحقيقة توجد مواقف بحثية قليلة فى العلوم السلوكية يكون فيهما أحد المتغيرين أو كلاهما من النوع الثنائى الحقيقى . ولكن إذا تطلب الأمر من الباحث إيجاد درجة العلاقة بين متغيرين من هذا النوع ، مثل العلاقة بين الجنس والانتماء إلى أحد حزبين ، أو العلاقة بين استجابة الفرد إما بنعم أو لا على إحدى عبارات استبيان واستجابته على مفردة صواب وخطأ مثلا ، فإنه يمكن للباحث أن يستخدم فى مثل هذه المواقف معامل فاى ϕ .

ونظراً لأن معامل فاى هو عبارة عن معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون شأنه شأن معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى ، فإنه يمكن حساب معامل فاى باستخدام صورة الدرجات الخام المستخدمة فى حساب معامل ارتباط بيرسون المذكورة فى الفصل السادس ، غير أننا نستخدم هنا القيمتين العدديتين صفر ، ١ لتمثيل كل من المتغيرين الثنائيين . ويمكن اتخاذ هاتين القيمتين أساسا لاشتقاق صورة أخرى لحساب معامل فاى من معامل ارتباط بيرسون حيث يمكن باستخدامها تبسيط العمليات الحسابية .

ولتوضيح طريقة اشتقاق هذه الصورة نفترض أننا حصلنا على استجابات مجموعة تتكون من ٢٠٠ طالب لكل من مفردتين من نوع الصواب والخطأ . ونفترض أننا اعتبرنا الاستجابات على إحـــدى المفردتين هي المتغير س ، والاستجابات على المفردة الأخرى هي المتغير ص ، وأن الاستجابة الصحيحة تأخذ القيمة ١ ، والاستجابة الخطأ تأخذ القيمة صفر . وبذلك يكون لدينا متغيران س ، ص كل منهما من النوع الثنائي .

وفي مثل هذه الحالة تكون أزواج القيم الممكنة (س ، ص) هي : (١،صفر)، (١ ، ١) ، (صفر ، صفر) ، (صفر ، ١) كما هو مبين بالجدول الآتي رقم (٧١) :

		ص: صفر	١
س	١	(١ ، صفر)	(١ ، ١)
	صفر	(صفر ، صفر)	(صفر ، ١)

جدول رقم (٧١)
أزواج القيم الممكنة (س،ص) لمتغيرين كل منهما من النوع الثنائي

ومن الجدول نلاحظ أنه بالنسبة للمفردة الأولى (المتغير س) : مجـ س = $ن_1$.

أي أن عدد الطلاب الذين كانت استجاباتهم صحيحة على المفردة = $ن_1$ ، وأن :

$$\bar{س} = \frac{ن_1}{ن} = م_1$$

أي أن نسبة الطلاب الذين كانت استجاباتهم صحيحة على المفردة = $م_1$.

ونلاحظ أيضاً أن مجـ $س^2$ = $ن_1$.

وقد بينا في الفصل السابع أن :

$$\text{مج} \left(\text{س} - \overline{\text{س}} \right)^2 = \text{مج}\,\text{س}^2 - \frac{(\text{مج}\,\text{س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \text{ن}_1 - \frac{\text{ن}_1^2}{\text{ن}}$$

ويمكن التوصل إلى نتائج مماثلة بالنسبة للاستجابات على المفردة الثانية (المتغير ص)، أى أن :

$\text{مج}\,\text{ص} = \text{ن}_2$ ، $\text{مج}\,\text{ص}^2 = \text{ن}_2$ ، $\overline{\text{ص}} = \text{م}_2$

حيث ن_2 ترمز إلى عدد الطلاب الذين كانت استجاباتهم صحيحة على المفردة الثانية .

و م_2 ترمز إلى نسبة الطلاب الذين كانت استجابتهم صحيحة على هذه المفردة .

ويكون لدينا أيضاً :

$$\text{مج} \left(\text{ص} - \overline{\text{ص}} \right)^2 = \text{مج}\,\text{ص}^2 - \frac{(\text{مج}\,\text{ص})^2}{\text{ن}}$$

$$= \text{ن}_2 - \frac{\text{ن}_2^2}{\text{ن}}$$

ونحتاج الآن إلى إيجاد مجموع حواصل ضرب أزواج القيم (س ، ص) .

فإذا نظرنا مرة أخرى إلى الجدول رقم (٧١) نجد أن س ص = صفر للأزواج المرتبة (١ ، صفر) ، (صفر ، صفر) ، (صفر ، ١) .

أى أن قيمة س ص تعتمد فقط على قيمة الزوج (١ ، ١) .

فإذا رمزنا لعدد الطلاب الذين كانت استجاباتهم صحيحة لكل من المفردتين أى الزوج (١ ، ١) بالرمز ن_{21} ، فإنه كما بينا فى الفصل السابع :

$$\text{مج}(\text{س} - \overline{\text{س}})(\text{ص} - \overline{\text{ص}}) = \text{مج س ص} - \frac{(\text{مج س})(\text{مج ص})}{\text{ن}}$$

$$= \text{ن}_{١٢} - \frac{\text{ن}_{١}\,\text{ن}_{٢}}{\text{ن}}$$

ولكن معامل ارتباط بيرسون :

$$\text{ر} = \frac{\text{مج س ص} - \frac{(\text{مج س})(\text{مج ص})}{\text{ن}}}{\sqrt{\left[\text{مج س}^{٢} - \left(\frac{\text{مج س}}{\text{ن}}\right)^{٢}\right]\left[\text{مج ص}^{٢} - \left(\frac{\text{مج ص}}{\text{ن}}\right)^{٢}\right]}}$$

وبالتعويض بالمقادير الخاصة بالمتغير الثنائي فى هذه الصورة نجد أن :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن}_{١٢} - \frac{\text{ن}_{١}\,\text{ن}_{٢}}{\text{ن}}}{\sqrt{\text{ن}_{١} - \frac{\text{ن}_{١}^{٢}}{\text{ن}}}\ \sqrt{\text{ن}_{٢} - \frac{\text{ن}_{٢}^{٢}}{\text{ن}}}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على ن نحصل على :

$$\text{ر} = \frac{\text{م}_{١٢} - \text{م}_{١}\,\text{م}_{٢}}{\sqrt{\text{م}_{١} - \text{م}_{١}^{٢}}\ \sqrt{\text{م}_{٢} - \text{م}_{٢}^{٢}}}$$

حيث $\text{م}_{١٢}$ ترمز إلى نسبة الطلاب الذين كانت استجاباتهم صحيحة على كل من المفردتين .

فإذا فرضنا أن $\text{ك}_{١} = ١ - \text{م}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢} = ١ - \text{م}_{٢}$

فإن : $ر = \dfrac{م_{12} - م_{1}\,م_{2}}{\sqrt{م_{1}\,ك_{1}}\,\sqrt{م_{2}\,ك_{2}}}$

وهذا المعامل الذى حصلنا عليه هو معامل فاى φ . أى أن :

$$φ = \dfrac{م_{12} - م_{1}\,م_{2}}{\sqrt{م_{1}\,ك_{1}}\,\sqrt{م_{2}\,ك_{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٤)$$

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الصورة افترض أن القيم المبينة فى الجدول رقم (٧٢) هى أعداد الطلاب فى كل خلية من خلايا الجدول رقم (٧١) .

(ص)
استجابة المفردة الثانية

استجابة المفردة الأولى (س)	صفر	١	
١	٤٠	٦٠	١٠٠
صفر	٨٠	٢٠	١٠٠
	١٢٠	٨٠	٢٠٠

جدول رقم (٧٢)

ومن الجدول يتضح أن : $م_{1} = \dfrac{١٠٠}{٢٠٠} = ٠,٥٠$

، $م_{2} = \dfrac{٨٠}{٢٠٠} = ٠,٤٠$

، $م_{12} = \dfrac{٦٠}{٢٠٠} = ٠,٣٠$

وبالتعويض فى الصورة رقم (٤) السابقة نجد أن :

$$\phi = \frac{(٠,٤٠)(٠,٥٠) - (٠,٣٠)}{\sqrt{(٠,٦٠)\ (٠,٤٠)}\ \sqrt{(٠,٥٠)\ (٠,٥٠)}}$$

$$= ٠,٤١$$

وبالطبع يستطيع الباحث ملاحظة ما أدت إليه هذه الصورة من تبسيط للعمليات الحسابية بدرجة كبيرة . ولحسن الحظ فإنه يمكن زيادة تبسيط صورة معامل فاى كالآتى :

لنفترض أن الحروف أ ، ب ، جـ ، د المبينة فى الجدول رقم (٧٢) الآتى يمثل كل منها تكرار أحد أزواج القيم المبينة فى الجدول رقم (٧١) :

	ص		
س	صفر	١	
١	أ	ب	أ + ب
صفر	جـ	د	جـ + د
	أ + جـ	ب + د	ن

جدول رقم (٧٢)

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

مج س = مج س² = أ + ب

، مج ص = مج ص² = ب + د

، مج س ص = ب

، ن = أ + ب + جـ + د .

فإذا عوضنا عن هذه المقادير فى الصورة رقم (٤) نجد أن :

$$\phi = \frac{\text{ب} - \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{ب}+\text{د})}{\text{ن}}}{\sqrt{(\text{ا}+\text{ب}) - \frac{(\text{ا}+\text{ب})^2}{\text{ن}}}\ \sqrt{(\text{ب}+\text{د}) - \frac{(\text{ب}+\text{د})^2}{\text{ن}}}}$$

أى أن :

$$\phi = \frac{\text{ب جـ} - \text{ا د}}{\sqrt{(\text{ا}+\text{جـ})(\text{ب}+\text{د})(\text{ا}+\text{ب})(\text{جـ}+\text{د})}} \quad \ldots\ (٥)$$

ويمكن تطبيق هذه الصورة على المثال السابق كالآتى :

$$\phi = \frac{(٦٠)(٨٠) - (٤٠)(٢٠)}{\sqrt{(١٢٠)\ (٨٠)\ (١٠٠)\ (١٠٠)}}$$

$$= ٠,٤١$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام الصورة رقم (٤) .

تفسير معامل فاى :

رأينا فيما سبق أن معامل فاى هو عبارة عن ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون فى حالة المتغيرات الثنائية . كما ذكرنا فى الفصل السابع أن قيم معامل ارتباط بيرسون تنحصر بين −١ ، +١ أو تساوى أيا منهما إذا كان توزيع كل من المتغيرين س ، ص متماثلا وله نفس الشكل . ولكن التوزيع التكرارى للمتغيرات الثنائية يكون متماثلا إذا كانت $\text{م}_1 = \text{ك}_1 = ٠,٥٠$ فقط ، أى عندما تكون نسبة الأفراد الذين حصلوا على الواحد الصحيح تساوى نسبة الأفراد الذين

حصلوا على الصفر . ويمكن أن تصل قيمة معامل فاى إلى — ١ أو + ١ إذا كانت $م_١ = م_٢ = ٠,٥٠$ لكل من المتغيرين . وهذا يحدث إذا وقعت التكرارات جميعها إما فى الخليتين ا ، ء أو فى الخليتين ب ، حـ من خلايا الجدول رقم (٧٣) .

ويمكن أن تصل قيمة معامل فاى إلى + ١ ولكن لا تصل قيمته إلى — ١ إذا كانت $م_١ = م_٢$ بشرط أن كلا منهما لا تساوى ٠,٥٠ . أما إذا كانت $م_١ = ك_٢$ فإن قيمة معامل فاى تصل إلى — ١ ولكن قيمته لا تصل إلى + ١ .

وإذا كانت قيمة معامل فاى أقل من الواحد الصحيح ، فإن أقصى قيمة يصل إليها تعتمد على مقدار اختلاف التكرارات الهامشية أى ا + ب ، ا + حـ ، ب + ء ، حـ + ء فى الجدول رقم (٧٣) . فكلما زاد مقدار هذا الاختلاف قلت هذه القيمة القصوى ، وهذا يحدث أيضاً فى حالة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى . إذ تعتمد أقصى قيمة يصل إليها هذا المعامل على قيم كل من $ص_١$ (أى نسبة الأفراد الذين حصلوا على الواحد الصحيح فى المتغير الثنائى) ، $ص_٠$ (أى نسبة الأفراد الذين حصلوا على الصفر فى نفس المتغير) .

من هذا يتضح أن قيم معامل فاى لا تصل إلى أى من القيمتين — ١ أو + ١ إلا تحت شروط معينة . وتتأثر قيمه بالطريقة التى يتم بها تقسيم كل من المتغيرين الثنائيين | يوضح جيلفورد ذلك ببعض الحالات الخاصة المبينة بالجداول الآتية رقم (٧٤) حيث تكون $م_١ = ٠,٥٠$ فى جميع الحالات بينما تتغير قيم $م_٢$.

(أ)

	صفر	١	
ص ١	صفر	٥٠	٥٠
ص صفر	٥٠	صفر	٥٠
	٥٠	٥٠	١٠٠

س

ϕ = +١,٠

(ب)

	صفر	١	
ص ١	٥٠	صفر	٥٠
ص صفر	صفر	٥٠	٥٠
	٥٠	٥٠	١٠٠

س

ϕ = −١,٠

(جـ)

	صفر	١	
ص ١	صفر	٥٠	٥٠
ص صفر	٢٥	٢٥	٥٠
	٢٥	٧٥	١٠٠

س

ϕ = ٠,٥٨

(د)

	صفر	١	
ص ١	صفر	٥٠	٥٠
ص صفر	١٠	٤٠	٥٠
	١٠	٩٠	١٠٠

س

ϕ = ٠,٣٣

(هـ)

	صفر	١	
ص ١	٥	٤٥	٥٠
ص صفر	٢٠	٣٠	٥٠
	٢٥	٧٥	١٠٠

س

ϕ = ٠,٣٥

جدول رقم (٧٤)
بعض جداول الاقتران الرباعى توضح مدى اعتماد
قيم معامل فاى على التكرارات الهامشية

فعندما تنقسم التكرارات انقساماً متعادلا فى كل من قسمى المتغير ص لايكون معامل الارتباط تاماً إلا إذا انقسمت أيضاً التكرارات انقساماً متعادلا فى كل من قسمى المتغير س كما هو موضح بالجدولين (ا ، ب) . أما إذا انقسمت التكرارات فى قسمى المتغير س بنسبة ٧٥ : ٢٥ ، فإن أقصى قيمة يصل إليها معامل فاى هى ٠,٥٨ كما هو موضح بالجدول (جـ) . وإذا انقسمت التكرارات فى قسمى المتغير س بنسبة ٩٠ : ١٠ ، فإن أقصى قيمة يصل إليها معامل فاى هى ٠,٣٣ كما هو موضح بالجدول (د) . أما إذا نظرنا إلى الجدول (هـ) فإننا نجد

التكرارات قد انقسمت فى قسمى المتغير س بنسبة ٢٥:٧٥، ولكن معامل فاى لم تصل قيمته إلى القيمة القصوى ٥٨ , ٠ بل أصبحت ٣٥ , ٠ ، ويمكن تفسير هذه القيمة فى ضوء أقصى قيمة تصل إليها φ بالنسبة للتكرارات الهامشية التى أدت إليها إذا كان الباحث يود معرفة قوة العلاقة بين المتغيرين س ، ص .

أما إذا كان يود التنبؤ بقسم معين بمعلومية قسم آخر أو أقسام أخرى فإنه يجب أن يعتمد على قيمة φ التى حصل عليها فعلا لأن هذه القيمة تكون أكثر واقعية فى هذه الحالة .

ويعتمد تفسير معامل فاى على ميزان قياس كل من المتغيرين ، فعند حساب معامل فاى ليس من الضرورى أن تكون مجموعة الملاحظات الخاصة بكل من المتغيرين مرتبة . فمعامل فاى يصلح إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الاسمى أو المستوى الرتبى .

وقد ذكرنا أن معامل فاى يمكن اعتباره معامل ارتباط بين متغيرين عندما تكون قيمة أحدهما بالواحد الصحيح وقيمة الآخر صفر . فإذا كان هناك ترتيب معين لقسمى كل متغير منهما يعنى أن الواحد الصحيح يقترن بقسم أعلى من القسم الذى يقترن به الصفر فى المتغير أو الخاصية ا ، وكذلك فى المتغير أو الخاصية ب ، فإن إشارة معامل فاى عندئذ يصبح لها دلالة . إذ يمكن فى مثل هذه الحالة تفسير الإشارة الموجبة على أنها تعنى أن القسم الأعلى فى المتغير أو الخاصية ا يقترن بالقسم الأعلى فى المتغير أو الخاصية ب . أما الإشارة السالبة فتعنى أن القسم الأعلى فى أحد المتغيرين يقترن بالقسم الأدنى فى المتغير الآخر .

أى أن تفسير معامل فاى يشبه إلى حد كبير تفسير معامل ارتباط بيرسون . ولهذا السبب يطلق على معامل فاى اسم معامل الارتبـــاط الرباعى الحقيقى .

Fourfold Point Correlation

أما إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الاسمى فإن إتجاه العلاقة (أى العلاقة الموجبة أو السالبة) يصبح لا معنى له .

تحديد أقصى قيمة يصل إليها معامل فاى :

نظراً لأهمية معامل فاى فى البحوث النفسية والتربوية وبخاصة فى مجال بناء الاختبارات ، فإننا يجب أن نوضح بشىء من التفصيل حدود قيم معامل ϕ التى عرضنا لها منذ قليل . إذ يمكن بوجه عام إيجاد أقصى قيمة لمعامل فاى لأى توفيقة من توافيق نسب التكرارات الهامشية باستخدام الصورة الآتية :

$$\text{أقصى قيمة لمعامل فاى} = \sqrt{\left(\frac{\text{م}_{\text{هـ}}}{\text{ك}_{\text{هـ}}}\right)\left(\frac{\text{ك}_{\text{ى}}}{\text{م}_{\text{ى}}}\right)} \quad \dots (٦)$$

حيث $\text{م}_{\text{ى}} \geq \text{م}_{\text{هـ}}$

وترمز $\text{م}_{\text{ى}}$ إلى أكبر نسبة تكرار هامشى فى جدول الاقتران الرباعى .

، $\text{م}_{\text{هـ}}$ إلى أكبر نسبة تكرار هامشى للمتغير الآخر التى تناظر $\text{م}_{\text{ى}}$.

فإذا كان لدينا مفردتى اختبار من نوع الصواب والخطأ مثلا ، فإن $\text{م}_{\text{ى}}$ هى نسبة طلاب المجموعة الكلية الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة الأولى ، $\text{م}_{\text{هـ}}$ هى نسبة الطلاب الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة الثانية . أو ربما نعتبر $\text{م}_{\text{ى}}$ هى نسبة طلاب المجموعة الكلية الذين أجابوا إجابة خطأ على المفردة الأولى ، $\text{م}_{\text{هـ}}$ هى نسبة طلاب المجموعة الكلية الذين أجابوا إجابة خطأ على المفردة الثانية .

فإذا كانت $\text{م}_{\text{ى}} = \text{م}_{\text{هـ}}$ فإن أقصى قيمة لمعامل فاى تساوى الواحد الصحيح ، وهـذا يعنى أنه إذا كانت نسبة التكرارات الهامشية متساوية فإن قيمة معامل فاى يمكن أن تصل إلى الواحد الصحيح .

وإذا طبقنا الصورة رقم (٦) على القيم المبينة بجدول رقم (٧٤ جـ ، هـ) نجد أن :

$$\text{أقصى قيمة لمعامل فاى} = \sqrt{\frac{(٠,٢٥)\ (٠,٥٠)}{(٠,٧٥)\ (٠,٥٠)}} = \sqrt{\frac{١}{٣}}$$

$$= ٠,٥٨$$

وتبسيطاً للعمليات الحسابية التى يتطلبها استخدام الصورة رقم (٦) يمكن أن يرجع الباحث إلى جدول (د) المبين بالملحق فى آخر الكتاب للحصول على قيم $\sqrt{\frac{م}{ك}}$ ، $\sqrt{\frac{ك}{م}}$ إذ أنه يمكن تجزئة الصورة رقم (٦) إلى جزأين هما :

$\sqrt{\frac{م_{هـ}}{ك_{هـ}}}$ ، $\sqrt{\frac{ك_{ى}}{م_{ى}}}$ ، وحاصل ضربهما يعطى أقصى قيمة لمعامل فاى .

مقاييس النوع الثانى :

(أولا) معامل الارتباط الثنائى المتسلسل Biserial Correlation :

ذكرنا أنه توجد بعض المواقف البحثية فى العلوم السلوكية يفترض فيها أن السمات التى يقيسها كل من المتغيرين يكون توزيعها من النوع المتصل الذى يأخذ شكل المنحنى الاعتدالى . غير أن درجات أحـــد المتغيرين يكون قد تم قياسها وتدوينها على شكل توزيع ثنائى إما بغرض التبسيط أو لعدم وجود مقاييس أكثر دقة لقياس السمة .

فى مثل هذه الحالة يمكن إيجاد درجة العلاقة بين متغيرين باستخدام معامل الارتباط الثنائى المتسلسل . ولكن يجب أن يراعى الباحث أن تكون نقطة تقسيم المتغير الثنائى بالقرب من وسيط توزيع هـــذا المتغير والصورة التى

يمكن استخدامها لإيجاد معامل الارتباط الثنائي المتسلسل والذي سنرمز له بالرمز $ر_ث$ هي :

$$ر_ث = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{ع_س} \left(\frac{ص_1 ص_2}{ل} \right) \quad \cdots\cdots \quad (٧)$$

حيث $\bar{س}_1$ ترمز إلى متوسط توزيع قيم المتغير المتصل س للمجموعة التي حصلت على الواحد الصحيح في المتغير الثنائي (المجموعة العليا) .

، $\bar{س}_2$ ترمز إلى متوسط توزيع قيم المتغير المتصل س للمجموعة التي حصلت على الصفر في المتغير الثنائي (المجموعة الدنيا) .

، $ع_س$ ترمز إلى الانحراف المعياري للمتغير المتصل س .

، $ص_1$ ترمز إلى نسبة الأفراد في المجموعة الكلية الذين حصلوا على الواحد الصحيح في المتغير الثنائي (أي نسبة أفراد المجموعة العليا) .

، $ص_2$ ترمز إلى نسبة الأفراد في المجموعة الكلية الذين حصلوا على الصفر في المتغير الثنائي (أي نسبة أفراد المجموعة الدنيا) .

، ل ترمز إلى الإحداثي الرأسي للمنحنى الاعتدالي المعياري (ارتفاع المنحنى) الذي يقسمه إلى جزأين يشتمل أحدهما على نسبة $ص_1$ من الأفراد ، ويشتمل الآخر على نسبة $ص_2$ منهم .

فإذا كانت $\bar{س}_1 = \bar{س}_2$ ، فإن معامل الارتباط الثنائي المتسلسل = صفر .

ويكون معامل الارتباط موجبا إذا كانت $\bar{س}_1$ أكبر من $\bar{س}_2$ ، ويكون سالبا إذا كانت $\bar{س}_1$ أقل من $\bar{س}_2$.

وتيسيراً للباحث عند إجراء العمليات الحسابية يمكنه إيجاد قيمة النسبة $\frac{ص_١ ص_٠}{ل}$ مباشرة باستخدام الجدول (هـ) المبين بالملحق فى آخر الكتاب .

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الصورة نفترض أن عدد الطلاب الذين التحقوا بالدراسات العليا فى إحدى الكليات ١٠٠ طالب ، حصل ٤٠ طالبا منهم على درجة الماجستير بينما لم يحصل بقية الطلاب على هذه الدرجة . ونفترض أيضا أن متوسط نسبة ذكاء مجموعة الطلاب الذين حصلوا على درجة الماجستير ١٢٠ بينما كان متوسط نسبة ذكاء الطلاب الذين لم يحصلوا على الدرجة هو ١١٠ ، والانحراف المعيارى لنسب الذكاء يساوى ١٥ . والمطلوب إيجاد معامل الارتباط الثنائى المتسلسل بين متغير الحصول على الدرجة العلمية (المتغير الثنائى) ، ومتغير الذكاء (المتغير المتصل) .

فى هذا المثال يمكن اعتبار أن الحصول على الدرجة العلمية هو متغير ثنائى يفسر القدرة الأكاديمية ، وهى بالطبع متغير متصل (وربما تتوزع توزيعا اعتداليا) ، وبذلك يمكن إيجاد $ر_ث$.

فالخطوة الأولى :

$$\text{نوجد } ص_١ = \frac{٦٠}{١٠٠} = ٠,٦ \text{ ، } ص_٠ = \frac{٤٠}{١٠٠} = ٠,٤$$

والخطوة الثانية : ارجع إلى جدول (هـ) المبين بملحق الكتاب لنحصل على قيمة $\frac{ص_١ ص_٠}{ل}$ المناظرة لقيمتى $ص_١ = ٠,٦$ ، $ص_٠ = ٠,٤$ فنجد أنها تساوى ٠,٦٢١

والخطوة الثالثة : نطبق الصورة رقم (٧) لإيجاد رش كالآتى :

$$ر_{ش} = \frac{\overline{س_1} - \overline{س}}{ع_{س}} \left(\frac{ع_{س_1} ص_1}{ل} \right)$$

$$= \frac{١٢٠ - ١١٠}{١٥} (٠,٦٢١)$$

$$= ٠,٤١$$

ويمكن أيضا أن يستخدم الباحث الصورة الآتية لحساب قيمة رش بدلا من الصورة السابقة ، إذ أنها تبسط العمليات الحسابية إذا لم يعتمد الباحث على الجدول (هـ) المبين بملحق الكتاب وبخاصة إذا كان المطلوب حساب قيمة رش من جدول توزيع تكرارى . وهذه الصورة هى :

$$ر_{ش} = \frac{\overline{س_1} - \overline{س}}{ع_{س}} \times \frac{ص_1}{ل} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٨)$$

حيث $\overline{س}$ ترمز إلى متوسط درجات المتغير المتصل ، وبقية الرموز معرفة فى الصورة السابقة رقم (٧) .

طريقة حساب رش إذا كانت البيانات مجمعة فى جدول توزيع تكرارى :

إذا حصل الباحث على مجموعة من البيانات الخاصة بأحد الاختبارات وأراد إيجاد معامل الارتباط الثنائى المتسلسل بين درجات كل مفردة على حدة والدرجة الكلية فى الاختبار فإنه يفضل تجميع هذه البيانات فى جدول توزيع تكرارى جدول رقم (٧٥) — كالآتى :

(١) فئات الدرجات	(٢) الانحراف عن المتوسط (سَ)	(٣) تكرار درجات المجموعة العليا (ت١)	(٤) ت١ سَ	(٥) تكرار فئات الدرجات الكلية فى الاختبار (ت)	(٦) ت سَ	(٧) ت سَ٢
٤٠ — ٤٩	— ٥	صفر	صفر	٢	— ١٠	٥٠
٥٠ — ٥٩	— ٤	١	— ٤	٧	— ٢٨	١١٢
٦٠ — ٦٩	— ٣	٣	— ٩	٧	— ٢١	٦٣
٧٠ — ٧٩	— ٢	١٠	— ٢٠	٢١	— ٤٢	٨٤
٨٠ — ٨٩	— ١	٢٧	— ٢٧	٤٨	— ٤٨	٤٨
٩٠ — ٩٩	صفر	٣٠	صفر	٤٦	صفر	صفر
١٠٠ — ١٠٩	+ ١	٢٦	+ ٢٦	٣٣	+ ٣٣	٣٣
١١٠ — ١١٩	+ ٢	٢١	+ ٤٢	٢٤	+ ٤٨	٩٦
١٢٠ — ١٢٩	+ ٣	٧	+ ٢١	٧	+ ٢١	٦٣
١٣٠ — ١٣٩	+ ٤	٥	+ ٢٠	٥	+ ١٠	٨٠
المجموع		١٣٠	٤٩	٢٠٠	— ٢٧	٦٢٩

جدول رقم (٧٥)

خطوات حساب ر ث للبيانات المجمعة

فإذا نظرنا إلى هذا الجدول نلاحظ أننا حسبنا انحرافات كل من توزيعى درجات المجموعة العليا والدرجات الكلية فى الاختبار أى سَ عن متوسط فرضى يقع فى الفئة ٩٠ — ٩٩ . ونقصد بالمجموعة العليا الطلاب الذين حصلوا على الواحد الصحيح فى المتغير الثنائى ، أى أجابوا إجابة صحيحة على المفردة .

فإذا حسبنا كلا من المتوسطين $\overline{س_١}$ ، $\overline{س}$ ، والانحراف المعيارى $ع_س$ للدرجات الكلية فى الاختبار بنفس الطريقة التى اتبعناها عند حساب قيمة $ر_{ث ح}$ البيانات المجمعة نجد أن :

$$\overline{س_١} = ٩٨,٢٨ \quad ، \quad \overline{س} = ٩٣,١٥$$

$$ع_س = ١٧,٦٨ \quad ، \quad ص_١ = \frac{١٣}{٢٠٠} = ٠,٦٥$$

وبالرجوع إلى جدول (ب) المبين بملحق الجداول فى نهاية الكتاب نوجد ارتفاع المنحنى الاعتدالى الذى يقسمه إلى جزأين يشتمل أحدهما على ٠,٦٥ من الحالات ، ويشتمل الآخر على ٠,٣٥ من الحالات ، فنجد أن : ل = ٠,٣٧٠٤

وبتطبيق الصورة رقم (٨) للحصول على قيمة $ر_ث$ نجد أن :

$$ر_ث = \frac{\overline{س_١} - \overline{س}}{ع_س} \times \frac{ص_١}{ل}$$

$$= \frac{٩٨,٢٧ - ٩٣,١٥}{١٧,٦٨} \times \frac{٠,٦٥}{٠,٣٧٠٤}$$

$$= ٠,٤٩٥ \text{ تقريبا .}$$

وبالطبع يمكن أن يستخدم الباحث الصورة رقم (٧) التى تتطلب حساب $\frac{س}{ع}$ بدلا من س والرجوع إلى الجدول (هـ) المبين بالملحق للحصول على قيمة $\frac{ص}{ل}$ ثم التعويض بالقيم التى يحصل عليها فى هذه الصورة .

متى يستخدم الباحث معامل الارتباط الثنائى المتسلسل :

نظراً لأن معامل الارتباط الثنائى المتسلسل (رث) يستخدم لتقدير قيمة معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون ، لذلك يجب أن تحقق البيانات نفس الفروض التى يتطلبها استخدام معامل ارتباط بيرسون . أى أنه يجب أن تكون العلاقة بين المتغيرين خطية . بالإضافة إلى وجوب تحقق فرض خاص بالمعامل رث ، وهو أن توزيع قيم المتغير الثنائى يكون اعتداليا لو أن هذا المتغير قد أمكن قياسه كمتغير متصل .

ولكن يجب أن يراعى الباحث أن هذا الفرض ينطبق على شكل توزيع المجتمع الأصل الذى تستمد منه عينة البحث وليس على شكل توزيع العينة ذاتها، إذ ربما يختلف شكل توزيع العينة قليلا عن الاعتدالية بينما يكون شكل توزيع المجتمع الأصل اعتداليا .

والتعويض بقيم ص، ، ص، ، ل فى أى من الصورتين ٧ ، ٨ المستخدمتين فى حساب قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل يعنى ضمنا أن المتغير الثنائى يتخذ شكل التوزيع الاعتدالى . ولذلك إذا اختلف شكل توزيع هذا المتغير عن شكل التوزيع الاعتدالى اختلافا ملحوظا ، فإن قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل لا تكون تقديرا صحيحا لمعامل ارتباط بيرسون .

وفى الحقيقة إذا اتخذ هذا المتغير شكل التوزيع الثنائى المنوال مثلا فإنه ربما تزيد قيمة رث المحسوبة باستخدام إحدى الصورتين ٧ أو ٨ عن الواحد الصحيح . فالتوزيعات الثنائية المنوال وغيرها من التوزيعات غير الاعتدالية تحدث نتيجة

لعدم تجانس العينات ، ومثال ذلك العينة التى تشتمل على كل من الذكور والإناث .

كما يجب على الباحث أن ينظر بعين الاعتبار إلى توزيع المتغير المتصل . فإذا كان هذا التوزيع ملتويا التواء شديدا فإن ذلك يدل أحيانا على انحناء العلاقة بين المتغيرين . ولكن ليس من الضرورى أن يكون التوزيع اعتداليا ، بل يجب أن يكون أحادى المنوال ومتماثل إلى حد ما كما هو الحال فى معامل ارتباط بيرسون. فن المعلوم أن قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل تزيد عن الواحد الصحيح فى حالة التوزيعات الملتوية أو غير المتماثلة .

لذلك لا يفضل استخدام معامل ارتباط بيرسون إلا إذا كان حجم العينة كبيرا وتوافر لدى الباحث الوقت اللازم لحساب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل . ويجب أن يراعى الباحث أن قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل تكون دائما أكبر من قيمة معامل ارتباط بيرسون المحسوبة من نفس مجموعة البيانات . فمعامل الارتباط الثنائى المتسلسل يعتمد على الفرق بين متوسطين ، وهذا الفرق لا يكون مستقرا بدرجة كافية إلا إذا كانت البيانات التى يستخدمها الباحث مستمدة من عينة حجمها مناسب . فمثلا إذا كان حجم العينة ١٠٠٠ فرد ، وكان التكرار الذى يشتمل عليه أحد قسمى المتغير الثنائى ١ ٪ فقط من هذا العدد ، فإن معنى هذا أن الباحث سوف يعتمد على ١٠ فرد فقط فى حساب متوسط هذا القسم . ولا يكفى هذا العدد بالطبع لتقدير الفرق بين المتوسطين تقديرا بعيدا عن التذبذب وفى الحقيقة أن قيم معامل الارتباط الثنائى المتسلسل أقل ثباتا من قيم كل من معامل ارتباط بيرسون ، ومعامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى . ومعنى هذا أن قيمته تتذبذب من عينة إلى أخرى بدرجة أكبر من تذبذب قيمة أى من المعاملين الآخرين .

متى يلجأ الباحث إلى التقسيم الثنائى لأحد المتغيرات :

عندما يقاس المتغير ص على ميزان متدرج (أى متصل) ، ولكن يظهر

شيء من عدم الانتظام في هذا التدرج مما يجعل استخدام معامل ارتباط بيرسون غير مناسب ، فإنه يمكن للباحث في هذه الحالة استخدام معامل الارتباط الثنائي المتسلسل . ومن أمثلة ذلك التوزيعات المبتورة Truncated Distributions ، أو إذا كان المتغير ص يتكون من عــــدد قليل جدا من الأقسام ، وكانت الفترات على ميزان القياس غير متساوية . أو إذا كان توزيع قيم المتغير ص في العينة ملتويا التواء شديدا نتيجة لعدم دقة القياس . وربما يبدو أن هناك تناقض عندما قلنا أنه يجب أن يتحقق الباحث من فرض اعتدالية توزيع المتغير المتصل قبل استخدام ر‌ش في حين أننا قلنا أيضا أنه يمكن استخدام ر‌ش في حالة التوزيعات الملتوية . ولكن يجب أن يتذكر الباحث أنه يمكن أن يكون توزيع العينة ملتويا ومع هذا ربما يكون توزيع المجتمع الأصل الذى استمدت منه العينة اعتداليا . فالعبرة هنا بتوزيع المتغير في المجتمع الأصل وليس بتوزيعه في العينة موضع البحث .

العلاقة الرياضية بين المعامل ر‌شح ، المعامل ر‌ش :

إذا اضطر الباحث إلى حساب قيمة المعامل ر‌شح في الحالات التى تتطلب استخدام المعامل ر‌ش ، فإن القيمة الناتجة سوف تكون أقل من قيمة المعامل ر‌ش لنفس مجموعة البيانات . وفى الحالات التى لا يكون فيها توزيع المتغير المتصل اعتداليا حيث يفضل استخدام المعامل ر‌شح فإن ر‌ش تعطى تقديرا لدرجة الارتباط أقل من حقيقته . وفى الواقع توجد علاقة رياضية بين كل من المعاملين ر‌شح ، ر‌ش لنفس مجموعة البيانات وهى :

$$ر_{ش} = \frac{\sqrt{ص_{١}\,ص_{٠}}}{ل} \times ر_{شح} \qquad \cdots\cdots \qquad (٩)$$

أى أن $\frac{ر_{ث ح}}{ر_ث} = \frac{ل}{\sqrt{ص_١ ص_٠}}$ ...... (١٠)

وتراوح هذه النسبة بين ١,٢٥ (عندما $ص_١ = ٠,٥٠$) إلى ٣,٧٣ (عندما $ص_١ = ٠,٩٩$)، ويمكن التأكد من ذلك بالرجوع إلى جدول (ه) المبين بالملحق فى آخر الكتاب .

ويوصى جيلفورد Guilford أنه إذا تأكد الباحث دون أدنى شك أن التوزيع من النوع الثنائى الحقيقى فإنه يجب عليه استخدام $ر_{ث ح}$. أما إذا تأكد أن المتغير الثنائى يتخذ شكل المنحنى الاعتدالى فإنه يمكن استخدام $ر_ث$. وإذا لم يكن متأكدا من شكل توزيع المتغير الثنائى فإنه يمكنه استخدام $ر_{ث ح}$ ولكن عليه أن يفسر قيمته بالاستعانة بالجدول (ه) .

فمثلا إذا كان التوزيع متصلا ولكنه لا يتخذ شكل المنحنى الاعتدالى ، وحصل الباحث على قيمة تقترب من الحد الذى يوضحه جدول (ه) للعامل $ر_{ث ح}$ فإنه يمكنه عندئذ القول بأن الارتباط الحقيقى بين المتغيرين تقترب قيمته من الواحد الصحيح بدرجة أكبر من اقتراب قيمة $ر_{ث ح}$ التى حصل عليها بالفعل . أما إذا زادت قيمة $ر_{ث ح}$ التى حصل عليها باستخدام قيمة معينة من قيم $ص_١$ عن هذا الحد ، فإن هذا ربما يكون دليلا على عدم صحة فرض أن المتغير من النوع الثنائى الحقيقى . أى أنه عندما يكون التوزيع من النوع الثنائى الحقيقى يمكن أن تصل قيمة $ر_{ث ح}$ إلى الواحد الصحيح . ولكن كثيرا من التوزيعات لا تكون عادة من هذا النوع ، إذ ربما لا تكون ثنائية أو متصلة . وإذا كانت

متصلة ربما لاتكون أحادية المنوال ، ولذلك فإن على الباحث التحقق من مثل هذه الحالات باستخدام جدول (هـ) .

وإذا قام الباحث بحساب قيمة ر ث ح بينما كان يجب عليه حساب قيمة ر ث فإنه يمكنه إيجاد قيمة ر ث ح المناظرة لقيمة ر ث باستخدام إحدى الصورتين رقم ٩ أو ١٠ ، وكذلك العكس .

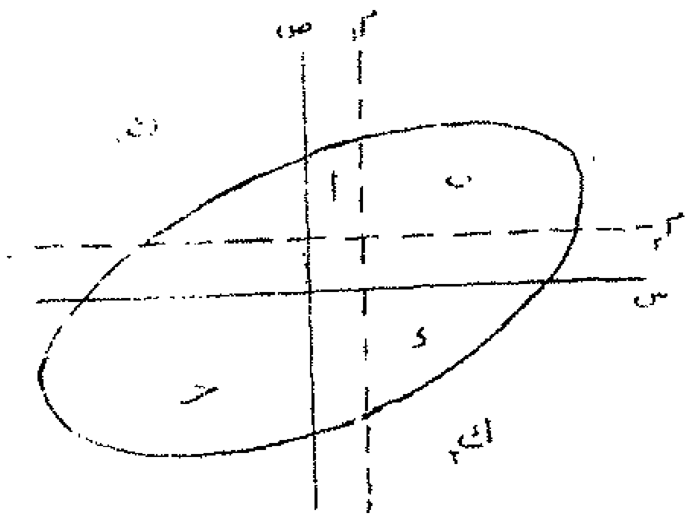
(ثانيا) معامل الارتباط الرباعى :

Tetrachoric Correlation

رأينا مما سبق أن الباحث يمكنه إيجاد العلاقة بين متغيرين أحدهما من النوع الثنائى والآخر من النوع المتصل باستخدام معامل الارتباط الثنائى المتسلسل بدلا من معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى إذا افترض أن المتغير الثنائى هو متغير متصل ، وكذلك يمكن إيجاد العلاقة بين متغيرين كل منهما من النوع الثنائى باستخدام معامل الارتباط الرباعى بدلا من معامل الارتباط الرباعى الحقيقى (أى معامل فاى) إذا افترض أن كلا من المتغيرين الثنائيين متصل . ولذلك يستخدم معامل الارتباط الرباعى لتقدير قيمة معامل ارتباط بيرسون لمجموعة معينة من البيانات ، فهو مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين متصلين أمكن قياس كل منهما على ميزان ثنائى .

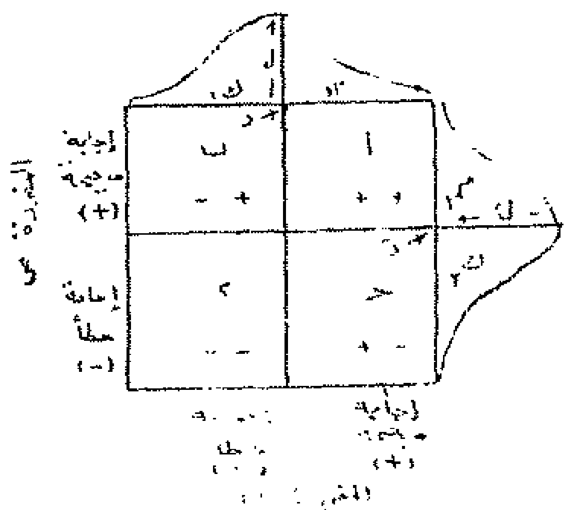
وتوجد بعض المواقف البحثية التى تتطلب إيجاد مثل هذه العلاقة ، مثل إيجاد العلاقة بين درجات مفردتى اختبار اختيار من متعدد أو صواب وخطأ ، حيث تكون الإجابة إما صحيحة أو خطأ ، أو إيجاد العلاقة بين عبارتين من عبارات استبيان أو مقياس للاتجاه أو للشخصية ، حيث تكون الإجابة إما موافق أو غير موافق ، أو نعم أو لا .

ويمكن تصور مثل هذه المواقف بأن نفترض أن لدينا الجدول الرباعى الممثل بالشكل الانتشارى المعتاد (شكل رقم ٥٣) الذى ينتج عن تقسيم كل من المتغيرين تقسيما ثنائيا .



شكل رقم (٥٣)
تقسيم نظرى لمتغيرين من النوع الثنائى

و بالنظر إلى هذا الشكل نجد أن المحورين س ، ص يمثلان محورى الإحداثيات ، والمحورين م١ ، م٢ يمثلان محورى تقسيم المتغيرين ، والرموز ا ، ب ، جـ ، د تدل على التكرارات أو النسب الناتجة عن هذا التقسيم. و يمكن أن نعيد توضيح هذه الرموز فى الجدول الرباعى الآتى (رقم ٧٦) الذى اقترحه جيلفورد



جدول رقم (٧٦)
جدول الاقتران بين متغيرين يفترض
ان توزيع كل منهما اعتدالي

حيث $م_1$ ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة س.

، $م_2$ ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة ص .

، $ك_1$ ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة خطأ على المفردة س .

، $ك_2$ ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة خطأ على المفردة ص .

، ا ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة صحيحة على كل من المفردتين س ، ص .

، ب ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة س ، ولكنهم أجابوا إجابة خطأ على المفردة ص .

، جـ ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة صحيحة على المفردة ص ، ولكنهم أجابوا إجابة خطأ على المفردة س .

، د ترمز إلى نسبة الأفراد الذين أجابوا إجابة خطأ على كل من المفردتين س ، ص

، د ، دَ ترمزان إلى الدرجات المعيارية على خط قاعدة المنحنى الاعتدالى المعيارى عند نقط تقسيم الحالات فى كل من التوزيعين .

، ل ، لَ ترمزان إلى ارتفاعى المنحنيين الاعتداليين اللذين يناظران د ، دَ .

والمطلوب تقدير شكل التوزيع الانتشارى للمتغيرين الذى يمكن أن نحصل منه على هذه التكرارات أو النسب .

الفروض التى يجب أن تتحقق فى البيانات إذا أراد الباحث استخدام معامل الارتباط الرباعى :

يعتمد استخدام معامل الارتباط الرباعى على فرض أن توزيع كل من المتغيرين س ، ص — اللذين حصل منهما الباحث على التكرارات فى الجدول الرباعى — يتخذ شكل المنحنى الاعتدالى .

كما يجب اعتبار أن كلا منهما متغير متصل ، وأن العلاقة بينهما خطية .

ولتوضيح ذلك نعرض فيما يلى مثالا يبين استخدام معامل الارتباط الرباعى إذا تحققت هذه الفروض فى البيانات .

يفترض جيلفورد أننا طلبنا من مجموعة مكونة من ٩٣٠ طالبا الاستجابة بنعم أو لا لعبارتين من عبارات مقياس الشخصية . والجدول الآتى رقم (٧٧) يبين أعداد الطلاب الذين استجابوا استجابات واحدة لكل من العبارتين (الخليتين ا ، د) ، وأعداد الطلاب الذين استجابوا استجابات مختلفة لكل من العبارتين (الخليتين ب ، جـ) .

(العبارة الأولى)

العبارة الثانية		نعم	لا	المجموع	النسبة
	نعم	٣٧٤ (ا)	١٦٧ (ب)	٥٤١	٠,٥٨٢ (م٢)
	لا	١٨٦ (جـ)	٢٠٣ (د)	٣٨٩	٠,٤١٨ (ك١)
	المجموع	٥٦٠	٣٧٠	٩٣٠	١,٠٠٠
	النسبة	٠,٦٠٢ (م١)	٠,٣٩٨ (ك١)	١,٠٠٠	

جدول رقم (٧٧)

جدول رباعى يمكن باستخدامه حساب معامل الارتباط الرباعى

فإذا كان الارتباط بين المتغيرين موجبا تاما ، فإن جميع التكرارات سوف تقع فى الخليتين ا ، د . وإذا كان الارتباط بينهما سالبا تاما ، فإن جميع التكرارات سوف تقع فى الخليتين ب ، ج . أما إذا كان الارتباط = صفرا فإن التكرارات سوف تتوزع توزيعا متعادلا فى الخلايا الأربع . وهنا يمكن للباحث أن يدافع عن تحقق فرض اتصال واعتدالية توزيع كل من المتغيرين فى هذا المثال على أساس أنه لا يحتمل أن تكون درجة تأكد جميع الطلاب الذين استجابوا « بنعم » لأى من العبارتين متساوية . وكذلك لايحتمل أن تكون درجة عدم تأكد جميع الطلاب الذين استجابوا « بلا » لأى من العبارتين متساوية .

ولكن هناك احتمال كبير أن استجابات الطلاب لأى من العبارتين تمثل متصلا من السلوك يمتد من التأكد التام فى أحد الطرفين إلى عدم التأكد بالمرة فى الطرف الآخر . وهذا يؤدى إلى ترجيح احتمال أن يكون توزيع كل من المتغيرين من النوع المتصل وليس من النوع الثنائى .

ويرى جيلفورد Guilford ، وثورنديك Thorndike أننا يمكن تبرير اعتدالية مثل هذا التوزيع المتصل اعتماداً على أن توزيع كثير من السمات النفسية يكون أحادى المنوال وقريب من الاعتدالية .

معادلة معامل الارتباط الرباعى :

تحتاج طريقة حساب معامل الارتباط الرباعى إلى جهد ووقت كبيرين لأنها تتطلب حل المعادلة الآتية التى تشتمل على قوى مختلفة لمعامل الارتباط الرباعى الذى سنرمز له بالرمز ر ر وهى :

$$\text{ر}_{\text{ر}} + \text{ر}_{\text{ر}}^{2} \frac{\text{د د}'}{2} + \text{ر}_{\text{ر}}^{3} \frac{(\text{د}^{2} - 1)(\text{د}'^{2} - 1)}{6} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\text{ا د} - \text{ب ج}}{\text{ل ل}' \text{ن}^{2}} \quad \cdots \quad (11)$$

وقد اقتصرنا فى هذه المعادلة على القوى الثلاث الأولى للمعامل $\text{ر}_{\text{ر}}$. وجميع الرموز التى تشتمل عليها المعادلة سبق تعريفها فى الجدول رقم (٧٦) . ويمكن حساب قيم ل ، د ، ل َ ، دَ باستخدام النسب م_{1} ، ك_{1} ، م_{2} ، ك_{2} المبينة بهذا الجدول .

طرق تقدير معامل الارتباط الرباعى :

نظرا لصعوبة حل المعادلة رقم(١١) السابقة فقد حاول علماء القياس والإحصاء التوصل إلى طرق أبسط لتقدير قيم معامل الارتباط الرباعى دون الحاجة إلى حل هذه المعادلة . وبعض هذه الطرق جبرية والبعض الآخر يعتمد على جداول تيسر الحصول على قيمة هذا المعامل لمجموعات مختلفة من البيانات .

وسوف نعرض إحدى هذه الطرق الجبرية ، كما سنذكر نوعين من الجداول التى يمكن أن يرجع اليهما الباحث إذا أراد أن يحصل على قيم تقديرية لمعاملات الارتباط الرباعى .

(أولا) الطريقة الجبرية :

تسمى هذه الطريقة بطريقة جيب تمام النسبة التقريبية ط . وربما يرجع الباحث إلى الفصل الأول من الباب الأول فى هذا الكتاب لمراجعة النسب المثلثية للزوايا إذا احتاج ذلك . ويمكن أن نحصل باستخدام هذه الطريقة على قيم تقريبية لمعامل الارتباط الرباعى إذا قورنت بالقيم التى نحصل عليها باستخدام معادلة معامل الارتباط الرباعى رقم (١١) .

والصورة الرياضية لهذه الطريقة هى :

$$\text{ر}_{\text{ر}} = \text{جتا} \left(\text{ط} \times \frac{\sqrt{\text{ب جـ}}}{\sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب جـ}}} \right) \quad \ldots\ldots \quad (١٢)$$

حيث ا ، ب ، جـ ، د ترمز إلى التكرارات المبينة فى خلايا الجدول الرباعى رقم (٧٦) .

ولكى يجرى الباحث العمليات الحسابية يمكنه أن يعتبر ط بالتقدير الدائرى = ١٨٠° . وبذلك يمكن كتابة الصورة رقم (١٢) كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{ر}} = \text{جتا} \left(\frac{١٨٠^{\circ} \sqrt{\text{ب جـ}}}{\sqrt{\text{ا د}} + \sqrt{\text{ب جـ}}} \right) \quad \ldots\ldots \quad (١٣)$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{\text{ب جـ}}$ نجد أن :

$$\text{ر}_{\text{ر}} = \text{جتا} \left(\frac{١٨٠^{\circ}}{١ + \sqrt{\frac{\text{ا د}}{\text{ب جـ}}}} \right) \quad \ldots\ldots \quad (١٤)$$

ويجب أن يتذكر الباحث أن الرمزين ا ، د يمثلان الحالات المتماثلة فى كل من المتغيرين س ، ص مثل (+ ، +) أو (− ، −) أو (نعم ، نعم) أو (لا ، لا) ... إلخ . أما ب ، جـ فهما يمثلان الحالات غير المتماثلة فى كل من المتغيرين مثل (+ ، −) أو (− ، +) أو (نعم ، لا) أو (لا ، نعم) ... إلخ .

وبالتعويض عن قيم ا ، ب ، جـ ، د فى الصورة رقم (١٤) ، فإن المقدار الذى بين القوسين يعطى قيمة عددية يمكن اعتبارها زاوية يوجد جيب تمامها (أى جتا الزاوية) باستخدام جدول النسب المثلثية (يمكن للباحث الرجوع إلى أحد الجداول الرياضية) .

أى أن جيب تمام الزاوية يعتبر بمثابة تقدير لمعامل الارتباط الرباعى .

وتنحصر قيمة الزاوية بين صفر° (إذا كانت ب = صفرا أو جـ = صفرا أو كل من ب ، جـ = صفرا) ، ١٨٠° (إذا كانت ا = صفرا أو د = صفرا ، أو كل من ا ، د = صفرا) .

فعندما تكون الزاوية = صفرا يكون معامل الارتباط مساويا للواحد الصحيح (لأن حتا صفر° = ١) ، وعندما تكون الزاوية = ١٨٠° يكون معامل الارتباط مساويا — ١ (لأن حتا ١٨٠° = — ١) . وعندما تكون ب جـ = ا د فإن الزاوية = ٩٠° ، ويكون معامل الارتباط المقدر عندئذ مساويا للصفر (لأن حتا ٩٠° = صفر) .

فإذا طبقنا الصورة رقم (١٤) على الجدول رقم (٧٧) نجد أن :

$$\text{ر}_{\text{ر}} = \text{حتا} \left(\frac{{}^\circ\text{١٨٠}}{\text{١} + \sqrt{\frac{(\text{٢٧٤})(\text{٢٠٣})}{(\text{١٦٧})(\text{١٨٦})}}} \right)$$

$$= \text{حتا} \left(\frac{{}^\circ\text{١٨٠}}{\text{١} + \text{٢,٤٤٤٧}} \right) = \text{حتا } {}^\circ\text{٧٠ } {}'\text{٢٤}$$

وهذه تقرأ جيب تمام الزاوية ٧٠ درجة ، ٢٤ دقيقة ويرمز للدقيقة بشرطة مائلة فوق العدد ، والدرجة = ٦٠ دقيقة) .

وبالكشف فى جدول النسب المثلثية عن جيب تمام هذه الزاوية نجد أنها تساوى ٠,٣٤٣

أى أن ر_ر المقدرة بهذه الطريقة = ٠,٣٤٣

ويلاحظ أنه إذا كانت الزاوية محصورة بين ٩٠° ، ١٨٠° (أى زاوية منفرجة) ، فإن معامل الارتباط يكون فى هذه الحالة سالبا (لأن جيب تمام الزاوية المحصورة بين ٩٠° ، ١٨٠° يكون سالبا) . ويمكن أن يلاحظ الباحث ذلك إذا وجد أن ب جـ أكبر من ا د . وقبل الكشف فى جدول النسب المثلثية يجب على الباحث أن يطرح الزاوية من ١٨٠° ، ويكشف فى جدول جيب التمام عن الزاوية الناتجة ، ثم يضع إشارة سالبة أمام القيمة التى يحصل عليها .

وتيسيراً على الباحث يمكنه أن يستخدم جدول (و) المبين بالملحق فى آخر الكتاب لإيجاد القيم التقريبية لمعامل الارتباط الرباعى مباشرة مقربة إلى رقمين عشريين ، وذلك بأن يحسب أيا من النسبتين $\frac{\text{ا د}}{\text{ب جـ}}$ أو $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ا د}}$ التى يكون ناتجها أكبر من الواحد الصحيح ، ثم يوجد قيمة معامل الارتباط الرباعى المناظرة لها من الجدول مباشرة دون أن يلجأ إلى إجراء أى عمليات حسابية أو مثلثية أخرى

فإذا رجعنا إلى المثال المبين بجدول رقم (٧٧) نجد أن النسبة $\frac{\text{ا د}}{\text{ب جـ}}$ تساوى ٢,٤٤٤ .

وبالرجوع إلى الجدول (هـ) المبين بملحق الكتاب نجد أن هذا العدد ينحصر بين ٢,٤١٢١ ، ٢,٤٩٠ ، والقيمة التقديرية لمعامل الارتباط الرباعى المناظرة تساوى ٠,٣٤ ، وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها فيما سبق .

وهنا لا يجب أن يفوتنا أن نوضح للباحث أن تقدير قيم معامل الارتباط الرباعى باستخدام طريقة جيب تمام النسبة التقريبية ط يكون تقديراً دقيقاً إلى حد كبير إذا كان كل من المتغيرين المتصلين تم تقسيمهما تقسيماً ثنائياً عند النقطة التى تمثل وسيط كل منهما .

فكلما ابتعدت قيمة كل من م$_1$ ، م$_2$ عن ٠,٥٠ ، واختلفت قيمة كل منهما عن الأخرى ابتعدت قيمة معامل الارتباط الرباعى المقدرة بهذه الطريقة عن القيمة الفعلية لمعامل الارتباط الرباعى وبخاصة إذا كانت قيمة ر$_ر$ مرتفعة . وغالباً تكون القيمة المقدرة أكبر من القيمة الفعلية .

فمثلا إذا كانت م$_1$ = ٠,٥٠ ، م$_2$ = ٠,٨٤ ، فإنه عندما تكون ر$_ر$ = ٠,٧٩ ، فإن القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الرباعى = ٠,٩٠ تقريبا .

أما إذا انحصرت قيم $م_١$ ، $م_٢$ بين ٠,٤٠ ، ٠,٦٠ ، فإنه عندما تكون $ر_ر$ = ٠,٥٠ ، فإن أكبر اختلاف بين هذه القيمة والقيمة المقدرة باستخدام هذه الطريقة = ٠,٠٤ تقريبا ، وتكون أيضا القيم الناتجة أكبر من قيم $ر_ر$ الفعلية .

ويمكن أن يتحكم الباحث فى كثير من الأحيان فى نقطة تقسيم كل من المتغيرين بحيث يجعل $م_١$ = $م_٢$ = ٠,٥٠ تقريبا . فإذا لم يستطع ذلك فمن الأفضل ألا يستخدم هذه الطريقة ، وإنما يمكنه استخدام إحدى الطرق البيانية التى ينسب بعضها إلى ثيرستون Thurstone ، والبعض الآخر إلى هيز Hays . وتعتمد هذه الطرق على مجموعات من التخطيطات والأشكال البيانية التى تساعد الباحث فى إيجاد قيم تقديرية لمعامل الارتباط الرباعى . ويمكن الرجوع إلى قائمة المراجع فى نهاية الكتاب إذا أراد الباحث الاطلاع على هذه الطرق البيانية .

(ثانيا) <u>إيجاد قيم تقريبية لمعامل الارتباط الرباعى بمعلومية قيم معامل فاى (ϕ)</u> :

يمكن الحصول على قيمة تقريبية لمعامل الارتباط الرباعى إذا قام الباحث أولا بحساب قيمة معامل فاى لمجموعة البيانات ثم يستخدم الصورة الآتية لإيجاد قيمة معامل الارتباط الرباعى التى تناظر قيمة معامل فاى وهى :

$$ر_ر = حا (\phi \times ٩٠°) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٥)$$

ويمكن أن يستعين الباحث بالجدول (ل) المبين بملحق الكتاب لإيجاد قيم $ر_ر$ المناظرة لقيم ϕ مباشرة باستخدام هذه الصورة دون إجراء أى عمليات حسابية .

فمثلا إذا كان لدينا الجدول الرباعى الآتى رقم (٧٨) :

	س = ٠	س = ١
ص = ١	أ = ٢	ب = ٤
ص = ٠	جـ = ٢	د = ١

جدول رقم (٧٨)

فإنه يمكن أن يحسب معامل فاى باستخدام الصورة رقم (٥) وهى :

$$\phi = \frac{\text{ب جـ} - \text{أ د}}{\sqrt{(\text{أ} + \text{ب})(\text{جـ} + \text{د})(\text{أ} + \text{جـ})(\text{ب} + \text{د})}}$$

$$= \frac{١٢ - ٢}{\sqrt{(٦)(٤)(٥)(٥)}} = \frac{١٠}{٢٤,٥} = ٠,٤١$$

وبالرجوع إلى الجدول (ل) المبين بالملحق نبحث عن قيمة $ر_ر$ المناظرة لقيمة ϕ = ٠,٤١ نجد أنها تساوى ٠,٦٠ .

وهنا يجب أيضا أن نؤكد أن هذه الطريقة تعطى قيمة تقديرية معقولة للمعامل $ر_ر$ إذا كان كل من المتغيرين المتصلين قد تم تقسيمه تقسيما ثنائيا عند النقطة التى تمثل وسيط كل منهما شأنها شأن الطريقة الجبرية السابقة .

العلاقة بين معامل الارتباط الرباعى ، ومعامل فاى ، ومعامل ارتباط بيرسون :

نلاحظ مما سبق أن هناك علاقة بين معامل الارتباط الرباعى ($ر_ر$) ، ومعامل فاى (ϕ) تحددها الصورة الرياضية :

$$ر_ر = \text{حا}(\phi \times ٩٠^\circ)$$

وبذلك يمكن تحت شروط معينة تقدير قيمة معامل الارتباط الرباعى بمعلومية قيمة معامل فاى . ولكن يمكن أن يعطى معامل الارتباط الرباعى الذى استخدم فى حسابه إحدى الطرق الجبرية تقديراً جيداً لمعامل ارتباط بيرسون إذا تحققت بعض الفروض التى يرتكن إليها معامل الارتباط الرباعى . ولا تعتمد قيمة معامل الارتباط الرباعى اعتماداً كبيراً على تساوى التكرارات الهامشية فى جدول الاقتران كما هو الحال فى معامل فاى .

وتكون قيمة معامل الارتباط الرباعى أكبر من قيمة معامل فاى فى جميع الحالات فيما عدا الحالة التى تكون فيها قيمة كل منهما تساوى الصفر (أى عندما ا = ب ، جـ = د) . ومن الجدير بالذكر أنه إذا كانت إحدى خلايا الجدول الرباعى تحتوى على الصفر ، فإن قيمة معامل الارتباط الرباعى تكون غير محددة .

ويمكن استخدام معامل الارتباط الرباعى عندما يكون كل من المتغيرين من النوع الثنائى الحقيقى ، أو يمكن تقسيم كل من المتغيرين الاصليين تقسيماً ثنائياً بطريقة اعتبارية ، فى حين أن معامل فاى لا يصلح إلا فى الحالة الأولى فقط .

ونظراً لسهولة تقدير قيمة معامل الارتباط الرباعى كما رأينا سواء بالطرق الجبرية أو بالطرق البيانية ، فإن هذا ربما يعطى انطباعاً لدى الباحث بأنه يمكنه استخدام هذا المعامل بدلا من معامل الارتباط الثنائى المتسلسل أو معامل ارتباط بيرسون .

ولكن هذا الانطباع خاطىء لأن قيم معامل الارتباط الرباعى أقل ثباتا من قيم معامل ارتباط بيرسون أو معامل الارتباط الثنائى المتسلسل . أى أن أخطاء العينات تكون أكبر فى حالة معامل الارتباط الرباعى .

وحتى إذا أمكن تقسيم المتغيرين عند النقطة التى تمثل وسيط كل منهما فإن

أخطاء العينات فى هذه الحالة تزيد بنسبة ٥٠٪ عنها فى حالة استخدام معامل ارتباط بيرسون .

أى أن استخدام الباحث لمعامل الارتباط الرباعى فى الحالات التى يحسن فيها استخدام معامل ارتباط بيرسون يعنى أن الباحث يفقد أكثر من نصف البيانات التى لديه ، وبذلك تقل المعلومات التى يمكن أن يستمدها من هذه البيانات .

كما أنه كلما ابتعدت نقطة تقسيم المتغيرين عن النقطة التى تمثل وسيط كل منهما كلما زادت أخطاء العينات إلا إذا استخدم الباحث عينة كبيرة بدرجة تسمح بالثقة فى قيمة معامل الارتباط الرباعى ، وهذا أيضاً له مثالبه من حيث الجهد والوقت .

ولذلك يوصى كثير من علماء القياس والإحصاء فى الوقت الحاضر بعدم استخدام معامل الارتباط الرباعى والاستعاضة عنه بمعامل فاى .

بعض الحالات التى لا يجوز أن يستخدم فيها الباحث معامل الارتباط الرباعى :

فيما يلى بعض الحالات التى لا يجوز أن يستخدم فيها الباحث معامل الارتباط الرباعى :

١ — إذا كانت نقطة تقسيم أى من المتغيرين متطرفة . كأن تكون نسبة الحالات فى كل من قسمى أحد المتغيرين ٩٥ إلى ٥ أو ٨٠ إلى ١٠ مثلاً ، فذلك يقلل من الثقة فى قيمة معامل الارتباط الرباعى .

٢ — إذا اشتملت خلية واحدة من خلايا الجدول الرباعى على الصفر .
ولتوضيح ذلك يعرض جيلفورد الجداول م ، ن ، ل رقم (٧٩) الآتية :-

(م)

صفر	٢٠٠	٢٠٠
١١٠	٩٠	٢٠٠
١١٠	٢٩٠	٤٠٠

(ن)

١١٠	٨٠	١٩٠
صفر	١٥٠	١٥٠
١١٠	٢٣٠	٣٤٠

(هـ)

١٥	٨٥	١٠٠
١٠٥	٩٥	٢٠٠
١٢٠	١٨٠	٣٠٠

جدول رقم (٧٩)

حالات لا يجوز فيها استخدام معامل
الارتباط الرباعى

فإذا حسبنا معامل الارتباط الرباعى للجدول (م) نجده يساوى ١ (لاحظ أن الخلية ا = صفر) .

أما إذا حسبنا معامل الارتباط الرباعى للجدول (ن) نجده يساوى + ١ بالرغم من أن ربع الحالات تقريبا تناقض الارتباط التام (٩٠ حالة من بين ٤٠٠ فى الجدول م ، ٨٠ حالة من بين ٤٠٠ فى الجدول ن) .

وبالرغم من ندرة حدوث مثل هذه الحالات إلا أنه ربما يصادفها الباحث .

وبالمثل الجدول (هـ) يعطى تقديراً خاطئا لمعامل الارتباط الرباعى . فبالرغم من عدم وجود تكرار يساوى الصفر ، إلا أن أحد التكرارات صغير جداً (وهو التكرار ١٥) بالنسبة للتكرارات الأخرى فى الجدول .

وربما نستنتج من هذه الجداول الرباعية أن هناك علاقة غير خطية بين المتغيرين إذا أمكن تجزئة الأقسام العريضة التى تشتمل عليها إلى أقسام أكثر تحديداً . وبالطبع إذا لم يتحقق فرض العلاقة الخطية بين المتغيرين ، فإن قيمة $ر_ر$ ستعطى تقديراً متحيزاً لمعامل الارتباط .

ولكن ليس معنى هذا أننا قد برهنا على عدم خطية العلاقة باستخدام هذه الجداول الثلاثة ، وإنما يعنى أنها ربما تعطينا انطباعا بذلك .

تمارين على الفصل الثالث عشر

١ — فيما يلى توزيع الدرجات الكلية لعينة تتكون من ٢٠٠ فرد فى أحد الاستفتاءات ، وكذلك عدد الأفراد الذين أجابوا « نعم » وعدد الأفراد الذين أجابوا « لا » فى إحدى مفردات الاستفتاء فى كل فئة من فئات الدرجات الكلية .

فئات الدرجات الكلية	نعم	لا
٢٥ — ٢٩	صفر	١
٣٠ — ٣٤	صفر	١
٣٥ — ٣٩	١	صفر
٤٠ — ٤٤	صفر	٣
٤٥ — ٤٩	١	٥
٥٠ — ٥٤	٤	٨
٥٥ — ٥٩	٦	١٠
٦٠ — ٦٤	١٢	١٣
٦٥ — ٦٩	١٨	٩
٧٠ — ٧٤	٢٠	٥
٧٥ — ٧٩	٣١	٣
٧٠ — ٨٤	٢٢	١
٨٥ — ٨٩	١٨	١
٩٠ — ٩٤	٦	صفر
٩٥ — ٩٩	١	صفر
المجموع	١٤٠	٦٠

(ا) إحسب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى بين درجات مفردة الاستبيان والدرجات الكلية .

(ب) احسب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل بين درجات مفردةالاستبيان والدرجات الكلية .

(جـ) قارن بين القيمتين اللتين حصلت عليهما فى ا ، ب . وأيهما يفضل استخدامه فى هذه الحالة ؟

٢ — احسب معامل فاى (ϕ) ، ومعامل الارتباط الرباعى للبيانات الآتية ، وفسر كلا من القيمتين اللتين تحصل عليهما .

	إجابة صحيحة	إجابة خطأ
المجموعةالمرتفعةالتحصيل	٦٥	٣٥
المجموعة الضعيفةالتحصيل	٣٥	٧٥

٣ — فيما يلى استجابات مجموعة تتكون من ١٢ طالباً لكل مفردة من مفردات اختبار وعددها خمس .

الطالب

المفردة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	١	١	صفر	١	صفر	١	١	١	١	١	صفر	١
٢	١	١	١	صفر	١	صفر	صفر	١	١	١	١	صفر
٣	١	صفر	١	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٤	١	١	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٥	١	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	٥	٤	٣	٣	٣	٢	٢	٢	٢	٢	١	١

احسب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل الحقيقى بين درجات كل مفردة والدرجة الكلية فى الاختبار .

١ — فى إحدى الدراسات طلب أحد الباحثين من مجموعتين إحداهما تتكون من ١٠٠ زوجة ترى كل منهن أنها موفقة فى زواجها ، والأخرى تتكون من ١٠٠ زوجة ترى كل منهن أنها غير موفقة فى زواجها الإجابة على السؤال الآتى :

« هل كنت سعيدة فى طفولتك ؟ »

إجابة السؤال	حالة الزواج	
	موفق	غير موفق
نعم	٧٠	٤٠
لا	٣٠	٦٠

أوجد قيمة معامل الارتباط بين كل من المتغيرين الثنائيين ، وفسر القيمة الناتجة .

٥ — طبق اختبار اختيار من متعدد على ١٠٠ طالب، وفيما يلى بيانات تشتمل على عدد الإجابات الصحيحة ، وعدد الإجابات الخطأ على مفردتين من مفردات الاختبار .

المفردة (س)	المفردة (ص)	
	إجابة صحيحة	إجابة خطأ
إجابة صحيحة	٣٠	٣٠
إجابة خطأ	١٠	٣٠

(ا) احسب قيمة معامل فاى (ϕ) لهذه البيانات .

(ب) اوجد قيمة تقديرية لمعامل الارتباط الرباعى مستعينا بقيمة معامل فاى التى حصلت عليها .

(ﺟ) احسب قيمة معامل الارتباط الرباعى بدون الاستعانة بقيمة معامل فاى .

(د) قارن بين القيمتين اللتين حصلت عليهما فى ب ، ﺟ .

الفصل الرابع عشر

الانحدار الخطى البسيط

التنبؤ والارتباط

صورة العلاقة الخطية

الانحدار الخطى للمتغير ص على المتغير س

طريقة المربعات الصغرى

معادلتا خطى الانحدار باستخدام الدرجات الخام

معادلتا خطى الانحدار باستخدام طريقة الانحرافات

العلاقة بين الانحدار والارتباط

معادلتا خطى الانحدار باستخدام معامل الارتباط

معادلتا خطى الانحدار باستخدام الدرجات المعيارية .

الخطأ المعيارى للتنبؤ .

مقدمة :

عرضنا فى الفصلين السابقين مقاييس العلاقة بين متغيرين ، وقد أشرنا إلى أن معامل الارتباط هو مجرد مقدار يقيس درجة اقتران متغير بمتغير آخر . وقلنا أن هذا الاقتران ليس معناه أن أحد المتغيرين يسبب المتغير الآخر . فاكتشاف أن هناك علاقة بين متغيرين ربما يدل فقط على أن هناك عامل ثالث مسئولا عن هذه العلاقة .

ولكن أحيانا يهتم الباحث باتجاه العلاقة بين متغير ومتغير آخر برغم عدم معرفته المعرفة الكافية بالعامل المسبب لكل من المتغيرين . فإذا وجدنا أن هناك علاقة موجبة بين تقديرات طلاب إحدى الكليات فى نهاية السنة الأولى وتقديراتهم فى السنة النهائية ، فإنه ربما يكون من المنطقى أن نستنتج أن أداء الطلاب فى نهاية السنة الأولى يسهم فى أدائهم فى السنة النهائية . إذ من غير المعقول أن نستنتج أن أداء الطلاب فى السنة النهائية يسهم فى أدائهم فى السنة الأولى (فالسبب لا يسبق الأثر أو النتيجة من الناحية الزمنية) ، بالرغم من أن الأسباب النهائية لتباين الأداء ربما ترجع إلى التفاعل المعقد بين العوامل الوراثية والظروف البيئية المختلفة للطلاب .

وموضوع الانحدار Regression يعتبر من الموضوعات الإحصائية التى تتناول إحدى المشكلات الهامة وهى مشكلة التنبؤ Prediction . فالباحث النفسى أو التربوى كثيراً مايهتم بالتنبؤ بمتغير باستخدام متغير آخر أو أكثر . ويسمى المتغير المنبىء بالمتغير المستقل ، والمتغير أو المتغيرات المتنبأ به أو بها بالمتغير التابع أو المتغيرات التابعة . فمثلا ربما يود باحث تربوى أن يتنبأ بالأداء المدرسى لتلميذ بمعلومية درجاته فى اختبار للذكاء . أو ربما يود باحث فى علم النفس الصناعى أن يتنبأ بأداء أحد الأفراد فى عمل ما بمعلومية أدائه فى بطارية من اختبارات الاستعدادات .

أو ربما يود باحث فى علم النفس الكلينيكى أن يتنبأ بقابلية المريض للعلاج باستخدام المعلومات التى يجمعها عن المريض قبل بدء العلاج .

ويمكن أن ننظر إلى مشكلات التنبؤ وبالتالى الانحدار الخطى البسيط من وجهتين :

الوجهة الأولى :

عندما يحاول الباحث التنبؤ بالأداء المستقبلى لفرد ما بمعلومية أدائه فى الماضى، فهنا لا يحاول الباحث أن يستنتج أن أداء الفرد فى الماضى هو سبب أدائه المستقبلى، وإنما يود أن يتوصل إلى بعض مؤشرات صادقة تفيده فى التنبؤ بأداء الفرد المستقبلى ، وهذا لا يعنى بالضرورة أن هذه المؤشرات تسبب الأداء المستقبلى . ومثال ذلك التنبؤ بأداء الطلاب فى كلية الطب مثلا باستخدام درجاتهم فى امتحان الثانوية العامة أو باستخدام درجات اختبار فى الاستعداد العلمى . فهنا يكون الاهتمام منصبا على التوصل إلى مقياس للأداء السابق يمكن استخدامه فى التنبؤ بالنجاح فى كلية الطب ، فالهدف هنا تطبيقى عملى وهو الأداء المستقبلى .

أما الوجهة الثانية :

عندما يستخدم الباحث متغيرات منبئة (مستقلة) Predictor Variables يمكن أن يتحكم فيها بمعنى أن يكون له سيطرة على إحداث تغييرات مقصودة فيها، وعندئذ يمكن للباحث قياس المتغير المتنبأ به وهو المتغير التابع الذى يكون نتيجة للمتغير المستقل . وهنا يفترض الباحث أن المتغير المستقل هـــو الذى سبب المتغير التابع .

فمثلا إذا تحكم الباحث فى عدد المثيرات التى يجب أن يستجيب لها شخص فى تجربة لقياس زمن الرجع فإنه ربما يتنبأ بحدوث زيادة خطية فى المتغير التابع — وهو زمن الرجع — تبعا للزيادة الخطية فى المتغير المستقل — وهو عدد المثيرات .

أو ربما يفترض باحث آخر وجود علاقة خطية بين الحكم الشخصى على طول خط مستقيم (المتغير التابع) والطول الفيزيائى لهذا الخط أى الطول الحقيقى (المتغير المستقل) .

وفى جميع هذه الحالات يود الباحث أن يتنبأ بقيمة متغير ما — يسمى المتغير التابع أو المتغير ص — بمعلومية متغير آخر — يسمى المتغير المستقل أو المتغير س — تكون قيمه معلومة .

والانحدار الخطى هو أسلوب إحصائى يفيد فى عمليات التنبؤ ، وهو يتصل اتصالا وثيقا بمفهوم الارتباط الخطى الذى عرضنا له فى الفصل السابع من هذا الكتاب . فإذا كان معامل الارتباط بين متغيرين صفراً فإن هذا يعنى عادة انعدام العلاقة بين المتغيرين .

أى أننا لا نستطيع التنبؤ بقيم أحد المتغيرين باستخدام قيم المتغير الآخر أكثر من مجرد التخمين العشوائى . أما إذا كان هناك ارتباط بين المتغيرين يختلف عن الصفر فإن هذا يعنى أننا إذا علمنا شيئا عن أحد المتغيرين فإنه يمكننا التنبؤ بشىء ما عن المتغير الآخر أكثر من مجرد التخمين العشوائى ، والعكس بالعكس .

وكلما زادت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط بين المتغيرين ، كلما أمكننا التنبؤ بأحد المتغيرين باستخدام المتغير الآخر بدرجة أكبر من الدقة . فإذا كان معامل الارتباط بينهما — ١ أو + ١ عندئذ نستطيع التنبؤ بدرجة تامة ..

وفى الحقيقة أنه لا يمكن تفسير معامل الارتباط بين متغيرين بصورة مرضية دون الاستعانة بمفهوم الانحدار . وسوف نقتصر فى هذا الفصل على مناقشة الانحدار الخطى البسيط الذى يشتمل على متغير مستقل واحد ومتغير تابع واحد ، ونرجىء مناقشة الانحدار غير الخطى والانحدار المتعدد إلى الفصول التالية .

التنبؤ والارتباط :

لإلقاء الضوء على العلاقة بين مفهومى التنبؤ والارتباط نعرض المثال الآتى :
نفترض أننا نود التنبؤ بدرجة طالب ما فى اختبار آخر العام فى أحـــد المواد الدراسية . فإذا كانت المعلومات الوحيدة المتاحة لدينا هى متوسط درجات فصله فى هذا الاختبار وهو ٧٥ (ن = ٧٥) فإن أفضل تخمين هو أنه سوف يحصل على الدرجة ٧٥ فى الاختبار . ولـكن عادة يكون متاحا لدينا معلومات أخرى مثل درجة الطالب فى اختبار نصف العام فى نفس المادة ولتكن ٦٢ . فكيف نستخدم هـذه المعلومة فى التنبؤ بأدائه بدرجة أفضل فى اختبار آخر العام ، فإذا علمنا أن متوسط أداء طلاب الفصل فى اختبار نصف العام هو ٧٠ (س = ٧٠) ، فربما نستنتج أنه نظرا لأن الطالب قد حصل على درجة أقل من المتوسط فى اختبار نصف العام ، فإنه يحتمل أن يحصل على درجة أقل من المتوسط فى اختبار آخر العام ، وربما يبدو من ذلك أن التنبؤ فى هذه الحالة أفضل إلى حد ما من التنبؤ السابق .

ولكن هل يمكن أن نصل إلى تنبؤ أفضل من ذلك ؟

بالطبع معرفتنا أن درجة الطالب فى اختبار نصف العام تقل عن المتوسط لا تعطى صورة دقيقة لمركزه النسبى فى اختبار آخر العام .

ولكن إذا علمنا الانحراف المعيارى لدرجات اختبار نصف العام ، فإنه يمكننا تحويل درجة الطالب فى هذا الاختبار إلى درجة معيارية . فإذا افترضنا أن الانحراف المعيارى لاختبار نصف العام هو ٤ ($ع_{س}$ = ٤) ، ونظرا لأن الطالب قد حصل على درجة فى هذا الاختبار تقل عن المتوسط بقدر انحرافين معياريين ($\frac{٦٢ - ٧٠}{٤}$ = — ٢) فهل يمـكننا التخمين بأنه ربما يحصل على درجة فى

اختبار آخر العام تقل عن المتوسط بقدر انحرافين معياريين أيضاً ؟ بمعنى أنه إذا كانت ع = ٧ فهل نستطيع أن نتنبأ بأن درجته فى اختبار آخر العام هى ٥٩ أى (٧٥ – ٢ × ٨ = ٥٩) ؟ .

بالطبع تكون الإجابة لا ، لأن هناك معلومة هامة غير متوفرة لدينا وهى معامل الارتباط بين درجات اختبار نصف العام ودرجات اختبار آخر العام . ولهذا فإنه يمكننا فقط التنبؤ بالدرجة ٥٩ فى اختبار آخر العام إذا كان الارتباط بين الاختبارين تاما (عندما ر = + ١) . ولكن إذا افترضنا أن معامل الارتباط بينهما كان صفرا فإنه لا يمكننا أن نتنبأ بالدرجة ٥٩ ولكن نعود مرة أخرى إلى التنبوين بأن الدرجة المتنبأ بها فى اختبار آخر العام هى المتوسط ٥٥ أى ($\bar{ص}$) .

والخلاصة أنه إذا كانت ر = صفر ، فإن أفضل تنبؤ يكون هو المتوسط ٧٥ أى (ص) . وعندما ر = + ١ فإن أفضل تنبؤ يكون ٥٩ . وإذا كانت ر تنحصر بين صفر ، + ١ فإن الدرجة المتنبأ بها سوف تقع بين ٥٩ ، ٧٥ . أما إذا كان معامل الارتباط ر = – ١ فان أفضل تنبؤ للدرجة سوف يكون ٩١ .

من هذا يتضح أهمية معامل الارتباط فى فهم عملية التنبؤ . ولتطبيق معامل الارتباط بصورة أكثر وضوحاً فى التنبؤ يجب أن نضعه فى إطاره الصحيح أى فى إطار مفهوم الانحدار الخطى .

وقبل أن نناقش مفهوم الانحدار نجد أنه من الضرورى أن نقدم فكرة عن معادلة الخط المستقيم لما لها من أهمية فى اشتقاق معادلات خطوط الانحدار .

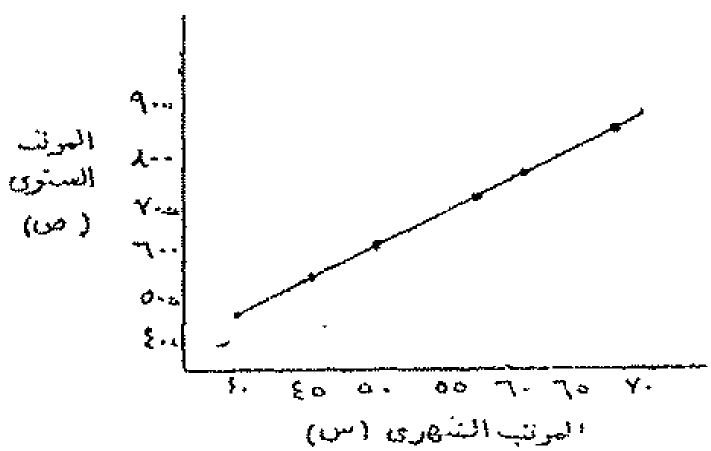
الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم :

لتبسيط المناقشة نجد أنه من الأفضل أن نقدم مثالا لمتغيرين مرتبطين ارتباطا تاما وهما المرتب الشهرى والمرتب السنوى . فالجدول رقم (٨٠) يوضح المرتب الشهرى والمرتب السنوى بالجنيهات لمجموعة تتكون من ثمانية عمال فى أحد المصانع .

العامل	المرتب الشهرى	المرتب السنوى
١	٤٠	٤٨٠
٢	٤٥	٥٤٠
٣	٥٠	٦٠٠
٤	٥٧,٥	٦٩٠
٥	٦٠	٧٢٠
٦	٦٢,٥	٧٥٠
٧	٦٥	٧٨٠
٨	٦٧,٥	٨١٠

جدول رقم (٨٠)

المرتب الشهرى والمرتب السنوى لمجموعة تتكون من ثمانية عمال



شكل رقم (٥٣)

التمثيل البيانى للمرتب الشهرى

والمرتب السنوى لمجموعة تتكون من ثمانية عمال

وبالنظر إلى هذا الشكل يتضح أننا مثلنا المرتب الشهرى على المحور الأفقى (السينى) ، والمرتب السنوى على المحور الرأسى (الصادى) . كما يتضح أن العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية ، ويمر الخط المستقيم بنقطة الأصل .

صورة العلاقة الخطية :

يمكن التعبير عن العلاقة بين المرتب الشهرى والمرتب السنوى بالصورة الرياضية :

ص = ١٢ س

فإذا عوضنا عن (س) بأى قيمة لمرتب شهرى يمكننا الحصول على القيمة المناظرة لها (ص) للمرتب السنوى .

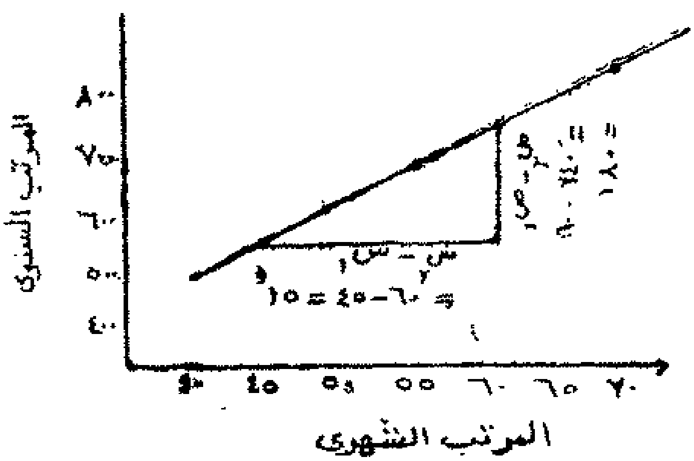
فإذا كان المرتب الشهرى لأحد العمال ١٠٠ جنيه

يكون مرتبه السنوى = ١٢ × ١٠٠ = ١٢٠٠ جنيه .

ويمكن إضافة مقدار ثابت إلى المعادلة السابقة ص = ١٢ س . هذا المقدار الثابت ربما يعبر عن مكافأة إنتاج تشجيعية منحهـــا المصنع للعمال ولتكن ٢٠ جنيها شهريا ، وبذلك تصبح المعادلة كالآتى :

ص = ٢٠ + ١٢ س

ويلاحظ أن هذه المعادلة تحتوى على مقدارين ثابتين هما ٢٠ ، ١٢ . وهى تمثل معادلة خط مستقيم كما هو مبين بالشكل رقم (٥٢) الآتى :



شكل رقم (٤٥)

العلاقة بين المرتب الشهرى والمرتب السنوى لمجموعة تتكون من ثمانية عمال مضافا اليه مكافأة تشجيعية مقدارها ٢٠ جنيها

من هذا الشكل يتضح أن المستقيم يقطع جزءا من محور الصادات طوله ٢٠ (المقدار الثابت الأول) ،

$$\text{وميله} = ١٢ = \frac{\text{فرق احداثيين صاديين}}{\text{فرق احداثيين سينيين}}$$

ومن هذا يمكن أن نستنتج أن الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى :

$$ص = ا + ب\, س$$

حيث س ، ص يمثلان المتغيرين .

، ا ، ب مقداران ثابتان لمجموعة معينة من البيانات .

وتمثل ا الجزء الذى يقطعه المستقيم من محور الصادات .

وتمثل ب ميل الخط المستقيم .

وتتحدد معادلة الخط المستقيم إذا علمنا قيمة كل من ا ، ب . وعندئذ يمكن إيجاد قيمة ص المناظرة لقيمة معلومة من قيم س .

ويلاحظ أنه يمكن استخدام المعادلة السابقة في التنبؤ بالمتغير ص بمعلومية قيم معينة للمتغير س . وعندما يكون معامل الارتباط مساويا للواحد الصحيح (كما هو الحال في المثال السابق) يكون التنبؤ تاما .

الانحدار الخطي للمتغير ص على المتغير س :

يندر في البحوث النفسية والتربوية أن نحصل على معاملات ارتباط تامة نظراً لأن عملية القياس في هذه البحوث تكون معرضة دائماً للخطأ . فإذا رسمنا شكلا انتشاريا لأزواج من القيم التي نحصل عليها في إحدى التجارب فإن النقط لاتكون عادة واقعة على مستقيم معين أو منحنى معهد معروف ، بل نلاحظ أنها تفتقد شيئا من الانتظام يتوقف على الدقة في قياس كل من متغيرى التوزيع ، كما يتوقف على مقدار العلاقة بين هذين المتغيرين .

في مثل هذه الحالات ، أي حينما لاتقع نقط التوزيع على خط مستقيم معين أو منحنى معين ، نحاول حينئذ أن نبحث عن أحسن خط يكون أقرب ما يمكن من أغلب النقط ، اى نبحث عن أقرب خط يشير إلى الاتجاه العام الذى يتخذه أحد المتغيرين بالنسبة للمتغير الآخر بحيث يكون من المعقول اعتباره ممثلا للعلاقة بين المتغيرين ، ويسمى هذا الخط بخط أحسن مطابقة The Best Fitting Line أو بخط الانحدار Regression Line لأن النقط تكون متراكمة حوله وتميل إلى أن تنحدر واقعة عليه .

وتتضمن فكرة الانحدار فروضا ثلاثة :

الأول : أن هناك خطأ في قياس أحد المتغيرين أو كليهما .

والثاني : أن كلا من المتغيرين لايكون متأثراً فقط بالآخر بل يكون متأثراً أيضاً بعوامل أخرى خارجية .

والثالث : أنه بالرغم من أخطاء القياس وتأثير العوامل الخارجية فهناك قانون مثالي يربط بين المتغيرين . أى أننا نفترض أنه لولا وجود هذه الأخطاء

وهذه العوامل الخارجية لارتبط المتغيران بمعادلة جبرية تمثل خطاً مستقيماً يهدأ هو خط الانحدار . وعلى هذه الأسس نستطيع اعتبار أن خط الانحدار هو خط يمثل العلاقة الحقيقية بين المتغيرين .

ولكن ماذا نعني بخط أحسن مطابقة ؟

لعل الباحث يتذكر أنه عند مناقشتنا للمتوسط الحسابي والانحراف المعياري في الفصلين الثالث والرابع ذكرنا أن المتوسط هو تلك النقطة في التوزيع التي تجعل مجموع مربعات انحرافات قيم التوزيع عنها أقل ما يمكن (وتسمى هذه الخاصية بالمربعات الصغرى Least Sum Squares) . فعند تطبيق طريقة المربعات الصغرى على مفهومي الارتباط والانحدار يمكن تعريف خط أحسن مطابقة بأنه ذلك الخط الذي يجعل مجموع مربعات الانحرافات عنه أقل ما يمكن ، ويسمى هذا الخط بخط الانحدار .

طريقة المربعات الصغرى :

Method of Least Squares

لنبحث الآن عن كيفية تحديد خط الانحدار المناسب لمجموعة من البيانات ذات المتغيرين ، وهو ما يطلق عليه أحياناً توفيق خطوط الانحدار Fitting Regression Line to Data . ولإجراء ذلك نبدأ برسم شكل انتشاري بأن نعين لكل زوج مرتب من الملاحظات أو القياسات الخاصة بالمتغيرين موضع البحث نقطة في الشكل البياني .

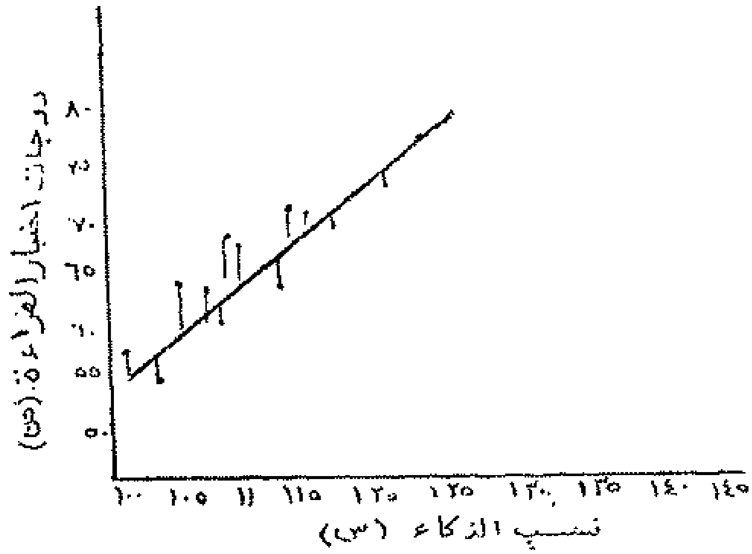
ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا مجموعة من البيانات الموضحة في جدول رقم (٨١) وهي عبارة عن نسب الذكاء ودرجات اختبار في القراءة لمجموعة تتكون من ١٨ طالبا كالآتي :

رقم الطالب	نسب الذكاء (س)	درجات اختبار القراء (ص)
١	١١٨	٦٦
٢	٩٩	٥٠
٣	١١٨	٧٣
٤	١٢١	٦٩
٥	١٢٣	٧٢
٦	٩٨	٥٤
٧	١٣١	٧٤
٨	١٢١	٧٠
٩	١٠٨	٦٥
١٠	١١١	٦٢
١١	١١٨	٦٥
١٢	١١٢	٦٣
١٣	١١٣	٦٧
١٤	١١١	٥٩
١٥	١٠٦	٦٠
١٦	١٠٢	٥١
١٧	١١٣	٧٠
١٨	١٠١	٥٧
المجموع	٢٠٢٤	١١٥٥

جدول رقم (٨١)

نسب ذكاء ودرجات اختبار فى القراءة لمجموعة تتكون من ١٨ طالبا

والشكل الانتشارى لهذه البيانات موضح بالشكل رقم (٥٤) الآتى :



شكل رقم (٥٥)
شكل انتشارى للبيانات الموضحة بجدول رقم (٨١)

فبالرغم من عدم انتظام النقط فى الشكل السابق إلا أننا نلاحظ أن درجات اختبار القراءة تميل إلى الزيادة بزيادة نسب الذكاء .

فإذا علمنا على سبيل المثال نسب ذكاء أحد الطلاب ، فكيف نتنبأ بدرجته فى اختبار القراءة ؟

و بالطبع يصعب ذلك بمجرد النظر إلى الشكل رقم (٥٥) لعدم انتظام البيانات ، إذ لا يوجد تناظر تام بين مجموعتى الدرجات . وهنا ربما نحاول البحث عن خط أفضل مطابقة للبيانات ، هذا الخط المستقيم يعتبر بمثابة التغير فى قيم أحد المتغيرين نتيجة لتغير قيم المتغير الآخر .

أى أن هذا الخط يصف النزعة العامة فى البيانات على أساس جميع القيم المعطاة ، وبذلك يمكن بمعلومية نسبة ذكاء أحد الطلاب التنبؤ بدرجته فى اختبار القراءة

باستخدام خصائص هذا الخط المستقيم . فإذا كنا بصدد التنبؤ بقيمة المتغير (ص) بمعلومية المتغير (س) ، فإن طريقة المربعات الصغرى تمكننا من تحديد الخط المستقيم الذى يجعل مجموع مربعات انحرافات جميع النقط عنه (أى مجموع مربعات المسافات الموازية لمحور الصادات من كل نقطة إلى الخط المستقيم) نهاية صغرى. وهذا الخط يسمى خط انحدار ص على س .

ورسم هذا الخط بمجرد النظر هو أسهل طريقة لإيجـــاد خط الانحدار ، إلا أنها طريقة ذاتية قد تعطى نتائج تختلف باختلاف الباحث ، كما أنها لا تصلح فى الحالات التى لا تظهر فيها النزعة العامة للبيانات ، أى فى الحالات التى لا يطمئن فيها الباحث إلى اختيار خط بالذات دون غيره . كما أن هذه الطريقة لا تحدد للباحث مدى الخطأ فى اعتبار الخط الذى اختاره ممثلا للعلاقة بين المتغيرين .

ولذا يكون من الضرورى اختيار طريقة موضوعية لإيجاد خط الانحدار .

ولقد رأينا أن الشرط الأساسى فى اختيار هذا الخط هو أن يكون الفرق أو الانحراف الكلى بين قيم التوزيع (والتى تسمى بالقيم المشاهدة) وبين القيم المثالية المناظرة لها على خط الانحدار (وتسمى بالقيم النظرية) أقل ما يمكن . ولكن يمكن فى الحقيقة أن نعثر على خطوط كثيرة تجعل المجموع الجبرى لهذه الفروق أو الانحرافات مساويا للصفر ، وذلك لإمكان تعادل الفروق الموجبة مع الفروق السالبة ، ولا نستطيع حينئذ أن نميز أى هذه الخطوط هو الأفضل . ولذلك نستخدم مربعات هذه الفروق بدلا من الفروق نفسها حيث لا يمكن أن يحدث تعادل لأنها تكون جميعاً موجبة فى هذه الحالة . والشرط إذن لتوفيق خط الانحدار هو أن يكون مجموع مربعات هذه الفروق أقل ما يمكن . وهذا الشرط لا يتوفر إلا فى خط واحد هو الذى نستطيع اعتباره أفضل من غيره فى تمثيل العلاقة المطلوبة .

وهذا الشرط يمنحنا طريقة موضوعية لايجاد خطوط الانحدار ويعتبر بمثابة قاعدة عامة لإيجاد هذه الخطوط . وهذه القاعدة تسمى بقاعدة المربعات الصغرى ويمكن صياغتها كالآتى :

« أفضل خط مطابقة لمجموعة من النقط هو ذلك الخط الذى يجعل مجموع مربعات انحرافات هذه النقط المناظرة لها على هذا الخط نهاية صغرى » .

وأول خطوة يجب أن يتخذها الباحث فى بحثه عن خط الانحدار هو الكشف عما إذا كان هذا الخط مستقيما (معادلته من الدرجة الأولى كما رأينا فيما سبق) أو خطا منحنيا (له معادلة عامة) . ويمكن أن يتبين الباحث شكل خط الانحدار بالتأمل فى الشكل الانتشـــارى إذ غالباً ما يوحى هذا الشكل بالخط المطلوب .

والخطوة الثانية هى أن يستخدم الباحث طريقة المربعات الصغرى لتحديد قيم الثوابت فى معادلة الخط الذى يختاره على ضوء الخطوة الأولى .

وسنناقش فيما يلى هذه الطريقة فى أبسط الحالات وهى حالة الانحدار الخطى البسيط ، ونرجىء مناقشة الانحدار غير الخطى إلى الفصل التالى .

إيجاد معادلة خط انحدار ص على س باستخدام الدرجات الخام :

يستخدم خط انحدار ص على س للتنبؤ أو لتقدير قيم ص غير المعلومة التى تناظر قيم س التى تكون معلومة .

ولذلك يجب أن نميز بين قيم ص المشاهدة أو الملاحظة والتى رمزنا لها بالرمز ص ، وقيم ص المتنبأ بها أو التى نود تقـــديرها وسنرمز لهـا بالرمز صم

فاذا نظرنا إلى الشكل رقم (٥٤) نجد أن كل قيمة من قيم س يناظرها قيمة من قيم ص ، كما يناظرها قيمة صم تمثل بنقطة على خط الانحدار .

وانحراف أو ابتعاد أى نقطة عن خط الانحدار تمثل الفرق بين ص ، $ص_م$ ، أى أن مقدار المسافة $ص - ص_م$ الموازية لمحور الصادات تمثل هذا الانحراف.

وطريقة مربعات الانحرافات الصغرى تحدد خط الانحدار بحيث يجعل مجموع مربعات هذه الفروق نهاية صغرى ،
أى يجعل : $مج (ص - ص_م)^٢$ نهاية صغرى .

وسوف نرمز لميل خط انحدار ص على س بالرمز $ب_{ص س}$ ، والنقطة التى يقطع فيها خط الانحدار محور الصادات بالرمز $أ_{ص س}$ ، وبذلك تكون معادلة خط انحدار ص على س هى :

$$ص_م = ب_{ص س} س + أ_{ص س} \qquad (١)$$

ويمكن حساب قيمة كل من الثابتين $ب_{ص س}$ ، $أ_{ص س}$ باستخدام الصور الآتية :

$$ب_{ص س} = \frac{ن مج س ص - مج س مج ص}{ن مج س^٢ - (مج س)^٢} \qquad (٢)$$

$$= \frac{مج س ص - ن \bar{س} \bar{ص}}{مج س^٢ - ن \bar{س}^٢} \qquad (٣)$$

$$، أ_{ص س} = \frac{مج ص - ب_{ص س} مج س}{ن} \qquad (٤)$$

$$= \bar{ص} - ب_{ص س} \bar{س} \qquad (٥)$$

حيث :

مجـ س   هي مجموع قيم س

، مجـ ص   هي مجموع قيم ص .

، مجـ س ص   هي مجموع حواصل ضرب قيم س ، ص المتقابلة .

، مجـ س^{٢} هي مجموع مربعات قيم س.

، $\overline{س}$ هي متوسط قيم س

، $\overline{ص}$ هي متوسط قيم ص

و بالطبع فإن إثبات هذه الصور الجبرية يحتاج إلى استخدام بعض الرياضيات العالية وهذا خارج عن نطاق هذا الكتاب التزاما بما ذكرناه في المقدمة ، وهو أننا لا نفترض أن كل باحث نفسي وتربوي يكون ملما إلماما كافيا بأسس وقواعد الرياضيات العالية . فما يهمنا هنا هو كيف يستخدم الباحث هذه الصور في تحليل بيانات بحثه .

ويمكن توضيح ذلك بتطبيق الصور رقم ٢ ، ٤ ، ١ السابقة على البيانات الموضحة بالجدول رقم (٨١) السابق للحصول على معادلة خط انحدار ص (درجات اختبار القراءة) على س (نسب الذكاء) .

ويمكن تلخيص ذلك في الخطوات الآتية :

١ — نجمع قيم س

٢ — نجمع قيم ص

٣ — نربع قيم س

٤ — نوجد مجموع حواصل ضرب قيم س ، ص المتقابلة .

٥ — نجمع حواصل ضرب قيم س ص المتقابلة .

١ رقم الطالب	٢ نسب الذكاء (س)	٣ درجات اختبار القراءة (ص)	٤ س^{٢}	٥ س ص	٦ درجة اختبار القراءة المتوقعة صم
١	١١٨	٦٦	١٣٩٢٤	٧٧٨٨	٦٨
٢	٩٩	٥٠	٩٨٠١	٤٩٥٠	٥٥
٣	١١٨	٧٣	١٣٩٢٤	٨٦١٤	٦٨
٤	١٢١	٦٩	١٤٦٤١	٨٣٤٩	٧٠
٥	١٢٣	٧٢	١٥١٢٩	٨٨٥٦	٧١
٦	٩٨	٥٤	٩٦٠٤	٥٢٩٢	٥٤
٧	١٣١	٧٤	١٧١٦١	٩٦٩٤	٧٧
٨	١٢١	٧٠	١٤٦٤١	٨٤٧٠	٧٠
٩	١٠٨	٦٥	١١٦٦٤	٧٠٢٠	٦١
١٠	١١١	٦٢	١٢٣٢١	٦٨٨٢	٦٣
١١	١١٨	٦٥	١٣٩٢٤	٧٦٧٠	٦٨
١٢	١١٢	٦٣	١٢٥٤٤	٧٠٥٦	٦٤
١٣	١١٣	٦٧	١٢٧٦٩	٧٥٧١	٦٥
١٤	١١١	٥٩	١٢٣٢١	٦٥٤٩	٦٣
١٥	١٠٦	٦٠	١١٢٣٦	٦٣٦٠	٦٠
١٦	١٠٢	٥٩	١٠٤٠٤	٦٠١٨	٥٧
١٧	١١٣	٧٠	١٢٧٦٩	٧٩١٠	٦٥
١٨	١٠١	٥٧	١٠٢٠١	٥٧٥٧	٥٧
المجموع	٢٠٢٤	١١٥٥	٢٢٨٩٧٨	١٣٠٨٠٦	

جدول رقم (٨٢)

خطوات حساب معادلة انحدار ص على س

ومن الجدول رقم (٨٢) يتضح أن :

مجـ س ص = ١٣٠٨٠٦

مجـ س = ٢٠٢٤

مجـ ص = ١١٥٥

مجـ س^{2} = ٢٢٨٩٧٨

ن = ١٨

باستخدام الصورة رقم (٢) لحساب ميل خط انحدار ص على س :

$$\text{ب}_{\text{ص س}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}}$$

$$= \frac{\text{١٨} \times \text{١٣٠٨٠٦} - \text{٢٠٢٤} \times \text{١١٥٥}}{\text{١٨} \times \text{٢٢٨٩٧٨} - (\text{٢٠٢٤})^{2}}$$

$$= \text{٠,٦٧٠٨}$$

وباستخدام الصورة رقم (٤) لإيجاد الجزء الذى يقطعه خط الانحدار من محور الصادات .

$$\text{أ}_{\text{ص س}} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{ب}_{\text{ص س}}\ \text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{١١٥٥} - \text{٠,٦٧٠٨} \times \text{٢٢٠٤}}{\text{١٨}}$$

$$= -\ \text{١١,٢٥}$$

وبذلك تكون معادلة خط انحدار ص على س هى :

$$ص_م = ٠,٦٧٠٨ س - ١١,٢٥$$

ويمكن استخدام هذه المعادلة فى التنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س . ويبين العمود رقم ٦ فى الجدول رقم (٨٢) السابق درجات اختبار القراءة المتنبأ بها باستخدام قيم ص بعد التعويض بهذه القيم فى معادلة خط الانحدار التى حصلنا عليها .

إيجاد معادلة خط انحدار س على ص باستخدام الدرجات الخام :

أوجدنا فيما سبق معادلة خط انحدار ص على س . وقد حددنا هذا الخط بحيث يجعل مجموع مربعات المسافات المبينة بالشكل الانتشارى الموازية لمحور الصادات من النقط إلى خط الانحدار نهاية صغرى . وقد كانت المشكلة المطروحة هي التنبؤ بأقل قدر ممكن من الخطأ بدرجات اختبار القراءة بمعلومية نسب الذكاء . أما إذا كنـــا نريد التنبؤ بنسب الذكاء بمعلومية درجات اختبار القراءة إذا افترضنا أن نسب الذكاء هى قيم دقيقة وأن درجات اختبار القراءة قد تعرضت للخطأ عند قياسها، فإننا يجب أن نستخدم خط انحدار مختلف عن الخط الأول ، ويسمى خط انحدار س على ص .

وهذا الخط يجب أن يجعل مجموع مربعات المسافات الموازية للمحور السينى من النقط إلى خط الانحدار نهاية صغرى . فإذا افترضنا أن س هى القيمة المشاهدة أو الملاحظة ، $س_م$ هى القيمة المتنبأ بها أو التى نريد تقدير قيمتها بمعلومية ص . فإننا يجب أن نبحث عن خط الانحدار الذى يجعل $(س - س_م)^2$ نهاية صغرى .

وبذلك تكون معادلة خط انحدار س على ص هى .

$$س_م = ب_{س ص} + أ_{س ص} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٦)$$

حيث $س_م$ ترمز إلى قيمة س المتنبأ بها والتى نريد تقدير قيمتها .

، $\text{ب}_{\text{س ص}}$ ترمز إلى ميل خط انحدار س على ص .

، $\text{أ}_{\text{س ص}}$ ترمز إلى نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور السينى .

ويمكن حساب قيمة كل من $\text{ب}_{\text{س ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{س ص}}$ باستخدام الصورتين الآتيتين :

$$\text{ب}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}} \quad \cdots\cdots \quad (٧)$$

$$= \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{ن } \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}}{\text{مجـ ص}^{2} - \text{ن } \bar{\text{ص}}^{2}} \quad \cdots\cdots \quad (٧)$$

$$، \quad \text{أ} = \frac{\text{مجـ س} - \text{ب}_{\text{س ص}} \text{ مجـ ص}}{\text{ن}} \quad \cdots\cdots \quad (٩)$$

$$= \bar{\text{س}} - \text{ب}_{\text{س ص}}\ \bar{\text{ص}} \quad \cdots\cdots \quad (١٠)$$

ويمكن تطبيق الصور ٧ ، ٩ ، ٦ على البيانات الموضحة بالجدول رقم (٨١) لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص .

حيث نجد أن :

$\text{مجـ ص}^{2} = ٧٤٨٥٥$

وقد سبق أن حصلنا على قيم مجـ س ص ، مجـ س ، مجـ ص عند إيجاد معادلة خط انحدار ص على س .

$$\text{، } ب_{س ص} = \frac{١٨ \times ١٣٠٨٠٦ - ٢٢٠٤ \times ١١٥٥}{١٨ \times ٧٤٨٥٥ - (١١٥٥)^٢}$$

$$= ١,٢٠٧$$

$$\text{، } أ_{س ص} = \frac{٢٠٢٤ - ١٢٠٧ \times ١١٥٥}{١٨}$$

$$= ٣٤,٩٨$$

وبذلك تكون معادلة خط انحدار س على ص هى :

$$س_م = ١,٢٠٧ \text{ ص} + ٣٤,٩٨$$

ويمكن استخدام هذه المعادلة فى التنبؤ بقيم س بمعلومية قيم ص .

ويتضح أن خط الانحدار الأول يختلف عن خط الانحدار الثانى فهما خطان مختلفان لكل منهما معادلته الخاصة ، وكل منهما يعبر عن علاقة تقريبية بين المتغيرين .

ولكنهما ينطبقان بعضهما على بعض ويصبحان خطا واحداً إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين تاما أى + ١ أو − ١ . أما إذا لم يكن الارتباط تاما فإنه يمكن أن نضرب المعادلتين ١٤ ، ١٥ الآتى ذكرهما لنثبت أن :

$$\text{معامل الارتباط بين المتغيرين} = \pm \sqrt{ب_{ص س} \times ب_{س ص}} \quad (١١)$$

فنظراً لاختلاف معادلتى خطى الانحدار فى المثال السابق فإن معامل الارتباط بين نسب الذكاء ودرجات اختبار القراءة :

$$= \sqrt{٠,٦٧٠٨ \times ١,٢٠٧}$$

= ٠,٩ تقريبا .

ويمكن أن يتأكد الباحث من ذلك بحساب معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص الموضحين فى الجدول رقم (٨١) بإحدى الطرق التى ذكرناها فى الفصل السابق وسيجد أنه قد حصل على نفس القيمة .

إيجاد معادلتى خطى الانحدار باستخدام طريقة الانحرافات :

يمكن إيجاد معادلتى خطى الانحدار باستخدام طريقة انحراف قيم كل متغير عن متوسط المتغير بدلا من استخدام الدرجات الخام ، أى أن :

انحراف الدرجة س عن المتوسط = $س - \overline{س}$

وانحراف الدرجة ص عن المتوسط $ص - \overline{ص}$

وعندئذ يمكن التعبير عن $ب_{ص س}$ ، $ب_{س ص}$ كالآتى :

$$ب_{ص س} = \frac{مج (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{مج (س - \overline{س})^٢} \quad ... (١٢)$$

$$، \quad ب_{س ص} = \frac{مج (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{مج (ص - \overline{ص})^٢} \quad ...... (١٣)$$

وقيم $ب_{ص س}$ ، $ب_{س ص}$ هى نفس القيم التى نحصل عليها باستخدام طريقة الدرجات الخام ، والاختلاف الرئيسى بينهما يرجع إلى اختلاف المحاور المرجعية التى تنسب إليها النقط . ونقطة تقاطع خطى الانحدار بالنسبة لهذه المحاور المرجعية الجديدة هى نقطة الأصل .

أي أن $\text{أ}_{\text{ص س}} = \text{أ}_{\text{س ص}} = \text{صفر}$.

العلاقة بين الانحدار والارتباط :

وجدنا فيما سبق أنه يمكن تحديد خطى انحدار لأى مجموعة من البيانات ، وأن لكل من هذين الخطين معادلة خاصة به ، وذكرنا أنه إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين هو + ١ أو — ١ فإن جميع النقط فى الشكل الانتشارى سوف تقع على خط مستقيم ، وعندئذ ينطبق خطى الانحدار ويصبحان خطا واحداً . أما إذا ابتعدت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط (أى قيمة معامل الارتباط بصرف النظر عن الإشارة) عن الواحد الصحيح فإن خطى الانحدار سوف يميل كل منهما على الآخر بزاوية معينة .

وعلى وجه العموم ، فإنه كلما انخفضت قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين زاد مقدار الزاوية بين خطى الانحدار ، وإذا لم تكن هناك علاقة على الإطلاق بين المتغيرين بمعنى أن يكون المتغيران مستقلان استقلالا تاما عن بعضهما يتعامد خطى الانحدار ، أى تصبح الزاوية بينهما قائمة (٩٠°) .

وفى الحقيقة توجد علاقة بسيطة تربط معامل الارتباط بميل خطى الانحدار يمكن إثباتها كما يلى :

أولا — ميل خط انحدار ص على س :

سبق أن أوضحنا فى الصورة رقم (١٢) أن :

$$\text{ب}_{\text{ص س}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})(\text{ص} - \overline{\text{ص}})}{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{2}}$$

ولكن سبق أن ذكرنا أن إحدى طرق حساب قيمة معامل الارتباط هى

$$\text{ر} = \frac{\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}}}$$

أى أن :

$$\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = \text{ر}\sqrt{\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}}$$

ونحن نعلم أن التباين $\text{ع}^{٢}_{\text{س}} = \frac{\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$

أى أن : $\text{مج}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} = \text{ن}\text{ع}^{٢}_{\text{س}}$

وبالمثل التباين $\text{ع}^{٢}_{\text{ص}} = \frac{\text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}}{\text{ن}}$

أى أن : $\text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{ن}\,\text{ع}^{٢}_{\text{ص}}$

إذن $\text{ب}_{\text{ص س}} = \text{ر}\,\frac{\sqrt{\text{ن}^{٢} \times \text{ع}^{٢}_{\text{س}} \times \text{ع}^{٢}_{\text{ص}}}}{\text{ن}\,\text{ع}^{٢}_{\text{س}}}$

$$= \text{ر} \times \frac{\text{ن}\,\text{ع}_{\text{س}}\,\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ن}\,\text{ع}^{٢}_{\text{س}}}$$

$$= \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}} \qquad (١٤)$$

ثانيا : ميل خط انحدار س على ص :

وبالمثل يمكن إثبات أن ميل خط انحدار س على ص هو :

$$ب_{س ص} = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}} \quad (١٥)$$

معادلة خط انحدار ص على س باستخدام معامل الارتباط :

أثبتنا فيما سبق أن :

$$ب_{ص س} = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

وقد سبق أن أوضحنا فى الصورة رقم (٥) أن :

$$أ_{ص س} = \overline{ص} - ب_{ص س} \overline{س}$$

وبالتعويض عن قيمة كل من $ب_{ص س}$ ، $أ_{ص س}$ فى معادلة خط انحدار ص على س ، وهى :

$ص_{م} = ب_{ص س}\ س + أ_{ص س}$ نجد أن :

$$ص_{م} = ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} س + \overline{ص} - ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \times \overline{س}$$

$$ص_{م} = \overline{ص} + ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - \overline{س}) \ldots \quad (١٦)$$

معادلة خط انحدار س على ص باستخدام معامل الارتباط :

نظرا لوجود معادلة انحدار مختلفة تستخدم للتنبؤ بقيم المتغير س بمعلومية قيم للمتغير ص .

فإنه يمكن بالمثل إثبات أن معادلة خط انحدار س على ص هى :

$$س_م = \bar{س} + ر \frac{ع_س}{ع_ص} (ص - \bar{ص}) \qquad (١٧)$$

فإذا أمعنا النظر فى الحـــد الثانى للطرف الأيسر من كل من المعادلتين ١٦ ، ١٧ وهو :

$$ر \frac{ع_ص}{ع_س} (س - \bar{س}) \quad \text{أو} \quad ر \frac{ع_س}{ع_ص} (ص - \bar{ص})$$

يمكن أن نتبين أنه كلما زادت قيمة معامل الارتباط ر ، كلما زادت قيمة هذا الحد . ويمثل هذا الحد الانحراف المتنبأ به عن متوسط العينة الناشىء عن انحدار ص على س أو س على ص . أى أننا يمكن أن نستنتج أنه كلما زادت قيمة معامل الارتباط ، كلما زاد مقدار الانحراف المتنبأ به عن متوسط العينة . فإذا ما أصبح معامل الارتباط تاما (أى + ١ أو — ١) يصبح مقدار الانحراف المتنبأ به أكبر ما يمكن ، وإذا كان معامل الارتباط صفرا فإن مقدار الانحراف المتنبأ به يكون صفراً أيضا . ولهذا فإنه عندما تكون ر = صفر تصبح $ص_م = \bar{ص}$ ، $س_م = \bar{س}$. وهذا يعنى أنه عندما تنعدم العلاقة بين متغيرين ، فإن أفضل تنبؤ لقيمة معينة من قيم أحد المتغيرين هو متوسط توزيع هذا المتغير .

مثال توضيحى (١) :

لتوضيح كيفية تطبيق معادلة خط الانحدار باستخدام معامل الارتباط نعود إلى المثال الذى قدمناه فى مستهل هذا الفصل . فالطالب حصل على الدرجة ٦٢ فى اختبار نصف العام فى إحدى المواد الدراسية ، ونود أن نتنبأ بدرجته فى اختبار آخر العام فى نفس المادة الدراسية مستخدمين البيانات الآتية :

	اختبار نصف العام	اختبار آخر العام
المتوسط	$\bar{س} = ٧٠$	$\bar{ص} = ٧٥$
الانحراف المعيارى	$ع_{س} = ٤$	$ع_{ص} = ٨$

، معامل الارتباط بين الاختبارين ر = ٠,٦٠ للحصول على الدرجة المتنبأ بها يجب أن نحصل على معادلة خط انحدار ص على س لأننا نود التنبؤ بدرجة الطالب فى اختبار آخر العام (ص) بمعلومية درجته فى اختبار نصف العام (س).

ولذلك يجب أن نطبق المعادلة رقم (١٦) وهى :

$$ص_م = \bar{ص} + ر \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - \bar{س})$$

$$= ٧٥ + ٠,٦٠ \left(\frac{٨}{٤}\right) (٦٢ - ٧٠) \cdot$$

$$= ٧٥ + ٠,٦٠ \times ٢ \times - ٨$$

$$= ٧٥ - ٩,٦٠$$

$$= ٦٥,٤$$

مثال توضيحي (٢) :

إذا حصل الطالب على الدرجة ٧٦ فى اختبار نصف العام . ما هى الدرجة المتنبأ بها فى اختبار آخر العام مستخدما نفس البيانات ؟

للحصول على الدرجة المتنبأ بها نطبق المعادلة رقم (١٦) كالآتى :

$$\text{ص}_{\text{م}} = \bar{\text{ص}} + \text{ر}\ \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}}\ (\text{س} - \bar{\text{س}})$$

$$= ٧٥ + ٠{,}٦٠ \left(\frac{٨}{٤}\right) (٧٦ - ٧٠)$$

$$= ٧٥ + ٧{,}٢$$

$$= ٨٢{,}٢٠$$

أما إذا كان المطلوب التنبؤ بدرجات اختبار ما(س) بمعلومية درجات اختبار آخر (ص) ، فإنه يمكن اتباع نفس الطريقة مع استخدام المعادلة رقم (١٧) بدلا من المعادلة رقم (١٦) .

ويجب على الباحث أن يدرك أن هدفنا من تقديم هذين المثالين هو مجرد توضيح كيفية تطبيق معادلتى خطى الانحدار . إذ ليس هناك ما يدعو إلى أن نتنبأ بدرجة طالب فى اختبار ما باستخدام اختبار آخر ولدينا جميع البيانات الملاحظة .

وفى الواقع العملى نستخدم الطرق الارتباطية للتنبؤ بأداء الأفراد الذين ينتمون إلى عينات أخرى ربما تتواجد فى وقت لاحق حيث تكون قيم المتغير المتنبأ به

غير معلومة . مثال ذلك استخدام درجات اختبار في الاستعداد الموسيقى للتنبؤ بنجاح الطلاب المتقدمين لمعاهد الموسيقى في سنوات تالية حيث تكون درجات تحصيلهم في الموسيقى غير معلومة عند اتخاذ قرارات بشأن قبولهم في هذه المعاهد .

إيجاد معادلتي خطى الانحدار باستخدام الدرجات المعيارية :

عند مناقشتنا لمفهوم معامل الارتباط أكدنا أهمية العلاقة القائمة بين معامل الارتباط والدرجات المعيارية . فقد عرفنا معامل الارتباط بأنه متوسط مجموع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة لكل من المتغيرين ، فإذا حولنا قيم كل من المتغيرين س ، ص إلى درجات معيارية فإن :

$$د_س = \frac{س - \bar{س}}{ع_س} \quad ، \quad د_ص = \frac{ص - \bar{ص}}{ع_ص}$$

ونحن نعلم أن الانحراف المعيارى للدرجات المعيارية هو الواحد الصحيح :

أى أن :

$$ع_س = ١ \quad ، \quad ع_ص = ١$$

وباستخدام هذه المعلومات يمكن استنتاج أن ميل كل من خطى الانحدار في صورته المعيارية يكون مساوياً لمعامل الارتباط لأن :

$$ب_{ص س} = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}$$

$$ولكن\ ع_ص = ع_س$$

$$إذن\ ب_{ص س} = ر$$

$$وبالمثل\ ب_{س ص} = ر$$

ويمكن إيجاد معادلة خط انحدار ص على س باستخدام الدرجات المعيارية كالآتى :

حيث إن :

$$ص_م = \overline{ص} + ر \frac{ع_ص}{ع_س} (س - \overline{س})$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة الآتية :

$$\frac{ص_م - \overline{ص}}{ع_ص} = ر \times \frac{س - \overline{س}}{ع_س}$$

ولكن $\frac{ص_م - \overline{ص}}{ع_ص} = د_{ص_م}$ وهى الدرجة المعيارية المتنبأ بها . أى تساوى $ص_م$ محولة إلى درجة معيارية

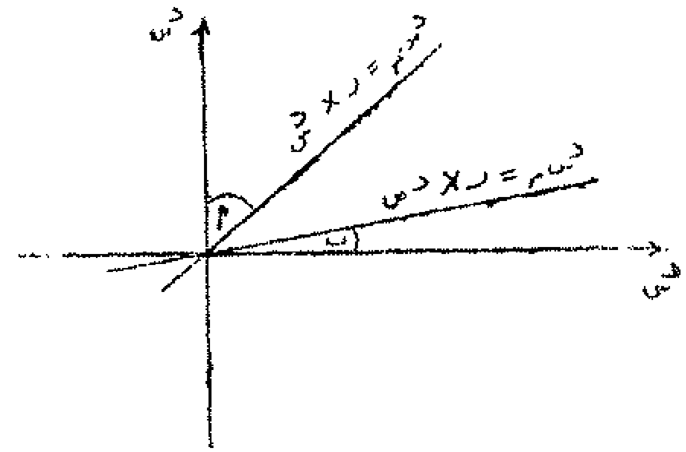
، $\frac{س - \overline{س}}{ع_س} = د_س$

إذن $د_{ص_م} = ر \times د_س$ . . . . . . (١٨)

وبالمثل يمكن إيجاد معادلة خط انحدار س على ص باستخدام الدرجات المعيارية وهى :

$د_{س_م} = ر \times د_ص$ . . . . (١٩)

فإذا رسمنا شكلا انتشاريا للدرجات المعيارية المتقابلة لمتغيرين ، ثم وفقنا أفضل خطى انحدار للبيانات فإنهما يظهران كما بالشكل رقم (٥٦) الآتى :



شكل رقم (٥٦)
خطى الانحدار فى صورتيهما
المعياريتين ، الزاوية أ = الزاوية ب

ومن هذا الشكل يتضح أن ميل خط الانحدار :

$د_{ص_م} = ر \times د_س$ بالنسبة إلى المحور $د_ص$ يساوى ميل خط الانحدار $د_{س_م} = ر \times د_ص$ بالنسبة إلى محور $د_س$. وإذا كان معامل الارتباط تاما ينطبق خطى الانحدار بعضهما على البعض بحيث يميل كل منهما على المحورين $د_س$ ، $د_ص$ بزاوية ٤٥° ، ويكون ميل كل منهما فى هذه الحالة مساويا الواحد الصحيح (لأن ظل الزاوية ٤٥° = ١) .

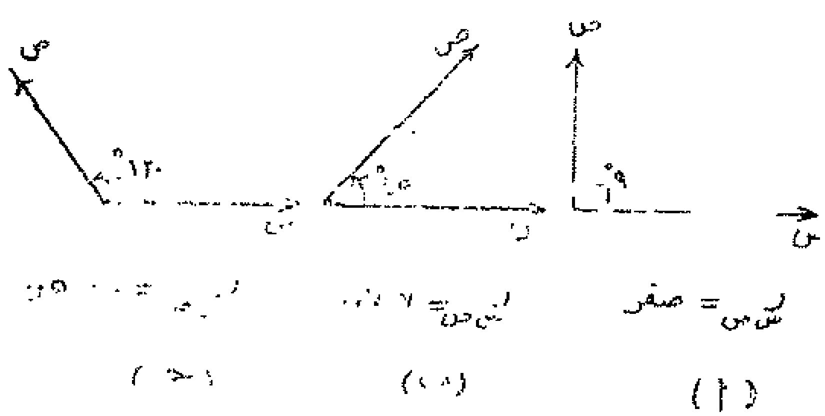
أما إذا كان معامل الارتباط = صفراً ، فإن خطى الانحدار يتعامدان ، أى تكون الزاوية بينهما ٩٠° ، وعندئذ ينطبق أحد خطى الانحدار على محور $د_س$ ، وينطبق الخط الآخر على محور $د_ص$.

التمثيل الهندسي للارتباط :

يفيد التمثيل الهندسي للارتباط في تصور العلاقة بين متغيرين وبخاصة إذا كان لدينا أكثر من متغيرين كما سنرى في الباب الثالث .

وقد ذكرنا أنه توجد علاقة بسيطة بين الارتباط والانحدار إذا عبرنا عن كل من المتغيرين في صورة درجات معيارية . فميل خط الانحدار بالنسبة إلى محور مرجعي يساوي معامل الارتباط كما هو مبين بالشكل رقم (٥٥) . وتوجد في مثل هذه الحالة أيضا علاقة بسيطة بين معامل الارتباط والزاوية المحصورة بين خطي الانحدار . فمعامل الارتباط يساوي جيب تمام الزاوية المحصورة بين خطي الانحدار . فعندما يكون معامل الارتباط = صفراً يتعامد خطا الانحدار (أي تصبح الزاوية بينهما ٩٠°، جتا ٩٠° = صفر) . وعندما يكون معامل الارتباط = ١ ينطبق خطا الانحدار (أي تصبح الزاوية بينهما = صفراً ، جتا صفر° = ١) .

وبالرغم من أن هذا يعد تبسيطا أكثر من الواجب لمفهوم الارتباط ، إلا أن الفكرة الأساسية هي تمثيل كل من المتغيرين بخط مستقيم له مقدار واتجاه ، ويسمى حينئذ متجه Vector . والشكل رقم (٥٧) يمثل هندسيا ثلاثة معاملات ارتباط مقاديرها مختلفة .



شكل رقم (٥٧)
التمثيل الهندسي لثلاثة معاملات
ارتباط مقاديرها مختلفة

فن الشكل يتضح أن الارتباط التام يمكن تمثيله هندسياً بمتجهين متعامدين ، والارتباط الذي قيمته ٧٠٧, ، يمكن تمثيله بمتجهين يحصران بينهما زاوية ٤٥° ، والارتباط الذي قيمته — ٥٠٠, ، يمكن تمثيله بمتجهين يحصران بينهما زاوية ١٢٠° . ونلاحظ أننا افترضنا أن طول كل متجه يساوى الوحدة .ولكن فى بعض الحالات التى يستخدم فيها مثل هذا التمثيل الهندسى ، فإن طول المتجه ربما يكون له معنى دقيق وربما يكون طوله أقل من الواحد الصحيح .

والجدول الآتى رقم (٨٣) يوضح بعض قيم معاملات الارتباط ، أى قيم جيب تمام الزاوية المحصورة بين متجهى المتغيرين س ، ص .

الزاوية	معامل الارتباط
٩٠°	صفر
٨٠°	٠,١٧٤
٧٠°	٠,٣٤٢
٦٠°	٠,٥٠٠
٥٠°	٠,٦٤٢
٤٠°	٠,٧٦٦
٣٠°	٠,٨٦٦
٢٠°	٠,٩٤٠
١٠°	٠,٩٨٥
صفر	١,٠٠٠

جدول رقم (٨٣)
بعض قيم معاملات الارتباط ، اى قيم
جيب تمام الزاوية المحصورة بين
متجهى المتغيرين

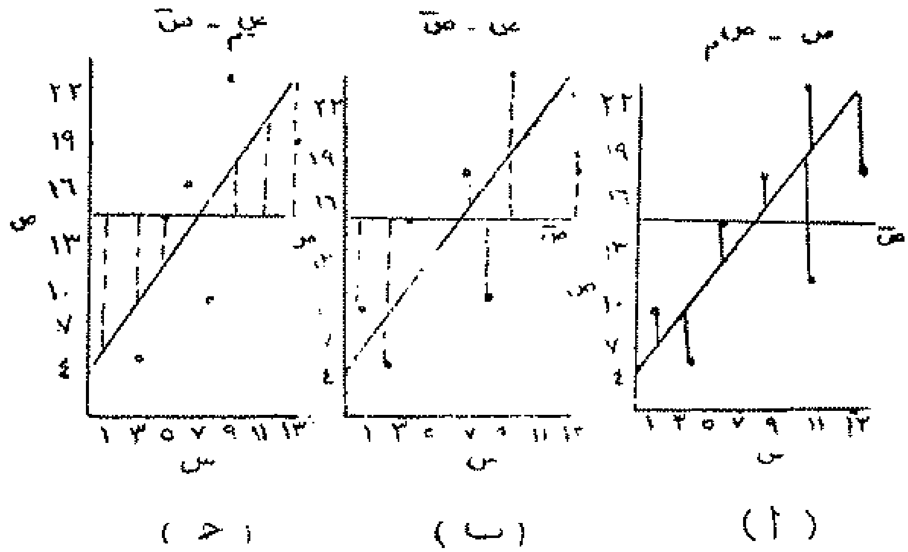
الخطأ المعيارى للتنبؤ :

إذا أراد الباحث التنبؤ بمتغير ما بمعلومية متغير آخر ، فإنه ربما يحتاج إلى

معرفة العلاقة بين معامل الارتباط ومقدار الخطأ في التنبؤ . والتمثيل البياني هو أفضل الطرق لتوضيح هذه العلاقة .

فالشكل رقم (٥٨) الآتي يوضح خط انحدار المتغير ص على س ، أي الخط الذي يستخدم في التنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س .

وبالرغم من أننا سنقتصر في مناقشتنا على خط انحدار ص على س ، إلا أن المناقشة يمكن أن تنطبق بالمثل على خط انحدار س على ص .



شكل رقم (٥٨)
شكل انتشاري لازواج الدرجات في متغيرين
يوضح خط انحدار ص على س ، متوسط توزيع
درجات ص أي صَ ، ر = ٠٫٨٢

فى الشكل يتضح أن جميع النقط لا تقع على خط الانحدار لأننا افترضنا أن معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى ٠٫٨٢ ، ونحن نعلم أن جميع النقط تقع على خط الانحدار إذا كان معامل الارتباط تاماً، والانحرافات ص — صم في

الشكل الانتشارى (ج) تمثل خطأ التنبؤ . وربما يلاحظ الباحث وجه الشبه بين $ص - ص_م$ (أى انحراف الدرجات عن خط الانحدار) ، $ص - \bar{ص}$ (أى انحراف الدرجات عن المتوسط) . فالمجموع الجبرى لهذه الانحرافات حول خط الانحدار يساوى صفراً . وقد علمنا فيما سبق أن المجموع الجبرى لانحرافات الدرجات عن المتوسط = صفراً . أى أنه يمكننا القول بأن خط الانحدار هو نوع من « المتوسط المتحرك Floating Mean » الذى يأخذ قيما مختلفة على حسب قيم س المستخدمة فى التنبؤ .

ويذكر الباحث أننا عند حساب التباين $ع^٢$ ، ربعنا الانحرافات عن المتوسط، وجمعنا هذه المربعات ، وقسمنا الناتج على ن .

ولإيجاد الانحراف المعيارى استخرجنا الجذر التربيعى للتباين الناتج وبنفس الطريقة إذا ربعنا انحراف كل درجة عن خط الانحدار وجمعنا مربع الانحرافات الناتجة : أى $مج (ص - ص_م)^٢$ ، فإنه يمكن أن نأخذ هذا المجموع كأساس لحساب نوع آخر من التباين والانحراف المعيارى .

ويسمى التباين حول خط الانحدار بتباين البواقى Residual Variance ويمكن تعريفه كما يلى :

$$تباين\ البواقى = \frac{مج (ص - ص_م)^٢}{ن} \quad \cdots\cdots \quad (٢٠)$$

أما إذا كنا نود التنبؤ بقيم س بمعلومية قيم ص فإن تباين البواقى =

$$\frac{مج (س - س_م)^٢}{ن} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٢١)$$

والانحراف المعيارى حول خط الانحدار (والذى يسمى بالخطأ المعيارى للتنبؤ) هو الجذر التربيعى لتباين البواقى . أى أن :

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{\frac{\text{مج}(\text{ص} - \text{ص}_\text{م})^2}{\text{ن}}} \quad \cdots\cdots \quad (٢٢)$$

وإذا كنا نود التنبؤ بقيم س بمعلومية قيم ص فإن :

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{\frac{\text{مج}(\text{س} - \text{س}_\text{م})^2}{\text{ن}}} \quad \cdots\cdots \quad (٢٣)$$

ويمكن استخدام هذه الصورة الرياضية فى حساب الخطأ المعيارى للتنبؤ ، إلا أنها تتطلب كثيراً من العمليات الحسابية . والغرض من عرضنا لها هنا هو الوفاء بما التزمنا به فى هذا الكتاب والذى ذكرناه فى مقدمته من أننا نود أن نضع المفاهيم والطرق والأساليب الإحصائية فى إطارها الصحيح ، فعرضنا لهذه الصور يجعل الباحث على دراية بأسس ومعنى الخطأ المعيارى للتنبؤ ، وأن هذا الخطأ المعيارى يقصد به الانحراف المعيارى للدرجات حول خط الانحدار وليس حول متوسط التوزيع .

إلا أنه كما هو الحال غالبا فى أساليب تحليل البيانات توجد طريقة أبسط لحساب الخطأ المعيارى للتنبؤ وهى :

الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س =

$$\text{ع}_\text{ص} \sqrt{1 - \text{ر}^2} \quad \cdots\cdots \quad (٢٤)$$

والخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم س بمعلومية قيم ص =

$$\text{ع}_\text{س} \sqrt{1 - \text{ر}^2} \quad \cdots\cdots \quad (٢٥)$$

ويمكن توضيح هاتين الصورتين إذا تذكر الباحث تعريف معامل التحديد

ومعامل الاغتراب اللذين ناقشناهما فى الفصل السابق ، فمعامل الاغتراب هو نسبة التباين فى أحد المتغيرين الذى لا يرجع إلى المتغير الآخر وهو يساوى $(1 - ر^2)$، فإذا ما ضربنا هذا المقدار فى القيمة الحقيقية لتباين ص أى $ع^2_{ص}$ فإننا نحصل على مقدار التباين (مقاسا بالوحدات الأصلية المتغير ص) والتى لا ترجع أو لا تنسب إلى الانحدار . فإذا ما استخرجنا الجذر التربيعى لحاصل الضرب

$ع^2_{ص} (1 - ر^2)$ نحصل على الخطأ المعيارى للتنبؤ .

ونلاحظ أنه عندما تكون ر = + ١ أو — ١ يصبح المقدار $\sqrt{1 - ر^2}$ = صفراً ، وهذا يعنى أنه لا تنحرف أى قيمة من خط الانحدار بل تقع جميع النقط عليه وعندئذ لا توجد أخطاء فى التنبؤ . أما إذا كانت ر = صفرا فإن $\sqrt{1 - ر^2}$ = ١ وتصبح أخطاء التنبؤ لمثل هذا التوزيع أكبر ما يمكن ، ويصبح تباين ص الذى أمكن تقديره مساويا لتباين ص الفعلى . وعندئذ يمر خط الانحدار بمتوسط المتغير ص .

ومن هذا يتضح أن الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س يتراوح بين صفر ، $ع_{ص}$ وهو يدل ببساطة على مدى تراكم النقط حول خط الانحدار .

ويمكن توضيح ذلك إذا افترضنا أن الانحراف المعيارى للمتغير ص أى $ع_{ص}$ = ١٥ . والجدول رقم (٨٤) الآتى يبين قيم الخطأ المعيارى للتنبؤ المناظرة لقيم ر المختلفة :

ر	$\sqrt{1 - ر^2}$	الخطأ المعيارى للتنبؤ
صفر	١,٠٠٠	١٥,٠٠
٠,١٠	٠,٩٩٥	١٤,٩٢
٠,٢٠	٠,٩٨٠	١٤,٧٠
٠,٣٠	٠,٩٥٤	١٤,٣١
٠,٤٠	٠,٩١٧	١٣,٧٥
٠,٥٠	٠,٨٦٦	١٢,٩٩
٠,٦٠	٠,٨٠٠	١٢,٠٠
٠,٧٠	٠,٧١٤	١٠,٧١
٠,٨٠	٠,٦٠٠	٩,٠٠
٠,٩٠	٠,٤٣٦	٦,٥٤
١,٠٠	صفر	صفر

جدول رقم (٨٤)
قيم الخطأ المعيارى المناظرة لقيم ر المختلفة
عندما يكون الانحراف المعيارى لتوزيع
المتغير ص = ١٥

ومن الجدول السابق يتضح أن أخطاء التنبؤ كما تقاس بالخطأ المعيارى للتنبؤ تكون كبيرة فى هذه الحالة حتى عندما تكون قيم ر كبيرة نسبياً . فإذا افترضنا أن أخطاء التنبؤ تتوزع توزيعاً اعتدالياً انحرافه المعيارى $ع_{ص}$ فإنه يمكننا تفسير مقدار هذا الخطأ . ويجب أن يتذكر الباحث أن ٦٨٪ من الحالات فى التوزيع الاعتدالى تقع بين درجتين معياريتين — ١ ، + ١ ، وحوالى ٣٢٪ تقع دون هاتين الدرجتين . فعندما تكون ر = صفرا مثلا، $ع_{ص}$ = ١٥ ، أى عندما يكون المتغيران مستقلين عن بعضهما أو غير مرتبطين فإن ٦٨٪ من أخطاء التنبؤ سوف تكون أقل من ١٥ نقطة فى كلتا الجهتين ، بينما تكون ٣٢٪ من هذه الأخطاء أكبر من ١٥ نقطة . وعندما تكون ر = ٠,٦٠ فإن ٦٨٪ من اخطاء

التنبؤ سوف تكون أقل من ١٢ نقطة (أنظر الجدول رقم ٨٤) بينما تكون ٢٢٪ من هذه الأخطاء أكبر من ١٢ نقطة . وعندما تكون ر = ٠,٨٠ فإن ٦٨٪ من أخطاء التنبؤ سوف تكون أقل من ٩ نقط ، وهكذا .

ومن هذا يتضح أنه بالرغم من زيادة قيم معامل الارتباط ر إلا أنه لا تزال توجد أخطاء فى التنبؤ . وتقل هذه الأخطاء تدريجيا ولكن ببطء كلما زادت قيمة معامل الارتباط . وهذا يجب أن يجعلنا حذرين عند التنبؤ بمتغير باستخدام متغير آخر .

ولإلقاء الضوء على هذه المشكلة نعرض المثال الآتى :

وجد كثير من الباحثين أن معامل الارتباط بين ذكاء الوالدين وذكاء أبنائهم يبلغ حوالى ٠,٥٠ ، وقد استخدم البعض هذا الارتباط لتأكيد دور العوامل الوراثية فى الذكاء . فإذا كنا على استعداد لتقبل هذا الرأى ، فإننا يجب أيضا أن نكون على استعداد لتقبل حقيقة أن التباين فى الذكاء الذى يرجع إلى عوامل غير وراثية ولتكن العوامل البيئية سيكون كبيراً بالفعل . فالانحراف المعيارى لكثير من اختبارات الذكاء يكون مساويا ١٥ نقطة من نسب الذكاء . فإذا نظرنا إلى هذه البيانات من الوجهة التنبؤية نجد أنه حتى لو كان معامل الارتباط بين ذكاء الوالدين وذكاء أبنائهم صفراً فإن الخطأ المعيارى للتنبؤ سيكون بالطبع مقداره ١٥ نقطة ، وإذا كان معامل الارتباط حوالى ٠,٥٠ كما قررته كثير من البحوث فإن الخطأ المعيارى للتنبؤ سوف يكون حوالى ١٣ نقطة . أى أن ارتفاع قيمة معامل الارتباط من الصفر إلى ٠,٥٠ لم تؤد إلى انخفاض ملحوظ فى قيمة الخطأ المعيارى للتنبؤ .

ويجب أن نلاحظ أننا لم نفرق فى حساب الخطأ المعيارى للتنبؤ بين العلاقة الموجبة والسالبة . فمن الوجهة التنبؤية يكون لمعامل الارتباط — ٠,٧٠ نفس الدقة فى التنبؤ كما هى لمعامل الارتباط + ٠,٧٠ .

مثال (١) :

احسب الخطأ المعيارى للتنبؤ بدرجات اختبار فهم المقروء (ص) بمعلومية

درجات اختبار القبول بإحدى الكليات (س) مستخدما البيانات ، الآتية وفسر هذا الخطأ ؟

اختبار فهم المقروء ص		اختبار القبول س	
$\bar{ص}$	= ٣٩,١٥	$\bar{س}$	= ٤٧,٦٥
ع ص	= ١٢,٣٥	ع س	= ١٣,٨٢

ر = ٠,٨٤

فلإيجاد الخطأ المعيارى تطبق المعادلة رقم (٢٥) وهى الخطأ المعيارى التنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س

$$= ع_ص \sqrt{١ - ر^٢}$$

$$= ١٢,٣٥ \sqrt{١ - (٠,٨٤)^٢}$$

$$= ١٢,٣٥ \times ٠,٥٢٦٨$$

$$= ٦,٥١$$

وقد أوضحنا فيما سبق أن الخطأ المعيارى للتنبؤ له خصائص تشبه خصائص الانحراف المعيارى. فمثلا إذا رسمنا خطوطا موازية لخط انحدار ص على س على كل من جانبيه وعلى مسافات تساوى قيمة الخطأ المعيارى للتنبؤ ومضاعفاته فإننا سوف نجد أن حوالى ٦٨٪ من الحالات تقع بين + ١ خطأ معيارى ، — ١ خطأ معيارى ، ٩٥٪ من الحالات تقع بين + ٢ خطأ معيارى — ٢ خطأ معيارى ، ٩٩٪ من الحالات تقع بين + ٣ خطأ معيارى ، — ٣ خطأ معيارى .

واستخدام الخطأ المعيارى للتنبؤ بهذا الشكل يتطلب أن تتحقق بعض الفروض فى البيانات وهى :

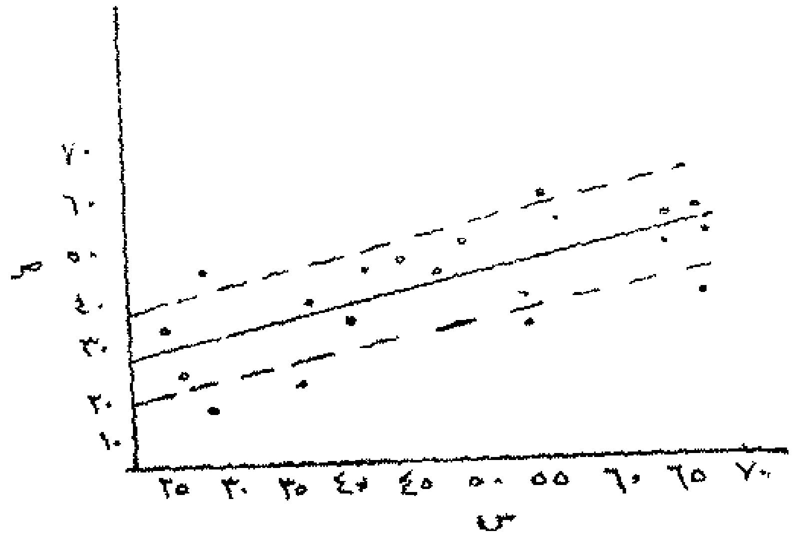
١ — أن تكون العينة التى تستمد منها البيانات الخاصة بمعادلة الانحدار ممثلة للمجموعة التى ستطبق هذه المعادلة عليها بعد ذلك بغرض التنبؤ .

٢ — أن تكون أخطاء التنبؤ موزعة توزيعا اعتداليا .

٣ — أن تكون أخطاء التنبؤ موزعة توزيعا متعادلا على جميع نقط خط الانحدار . وهذا الفرض يعرف بفرض تجانس التباين Homoscedasticity

ويترتب على عدم تحقق هذا الفرض زيادة أخطاء التنبؤ للدرجات المتطرفة ، غير أن هذا لا يعد فى الحقيقة مشكلة فى مواقف التنبؤ الفعلية نظراً لأنه يمكننا التنبؤ بنجاح أو فشل الطلاب الذين تكون درجاتهم متطرفة بدرجة أفضل من الطلاب الذين تقع درجاتهم بالقرب من مركز التوزيع . وبعبارة أخرى ربما تكون أخطاء التنبؤ للحالات المتطرفة كبيرة إلا أنه من الناحية العملية لا يجب أن تمنع هذه الأخطاء الباحث من استخدام مفهوم الخطأ المعيارى للتنبؤ .

فإذا افترضنا تحقق هذه الفروض وأردنا تفسير الخطأ المعيارى للتنبؤ فى مثال رقم (١) السابق فإننا نرسم خطين موازيين لخط انحدار ص على س ، كما هو مبين بالشكل رقم (٥هـ) الآتى . وكل من الخطين يبعد بقدر واحد خطأ معيارى للتنبؤ أى (+ ٦,٥١ أو — ٦,٥١) .



شكل (٥٩)

خط انحدار ص على س ، الخطين الموازيين له واللذان يبعدان عنه بمقدار الخطأ المعيارى للتنبؤ

وبذلك يمكن أن نستنتج أن ٦٨٪ من الحالات تقع بين هذين الخطين . أى أن درجاتهم تنحصر بين ± ٦,٥١ حول الدرجة صم المتنبأ بها . كما يمكن أن نستنتج أن ٩٥٪ من الحالات تنحصر بين الخطين الموازيين لخط الانحدار واللذين يبعدان عنه من كلتا جهتيه بقدر (٢ × ٦,٥١ ، — ٢ × ٦,٥١) أى بقدر (١٣,٠٢ ، — ١٣,٠٢) ، أى أن درجاتهم تنحصر بين ± ١٣,٠٢ حول الدرجة المتنبأ بها .

وبالطبع كلما زاد عدد الحالات زاد اقتراب عدد القيم التى تنحصر بين الخطين بالقيم المتوقعة من التوزيع الاعتدالى .

مثال (٢) :

فيما يلى درجات مجموعة تتكون من خمسة طلاب فى اختبارين .

رقم الطالب	الاختبار الأول (س)	الاختبار الثانى (ص)
١	٣٥	٦٠
٢	٤٥	٤٠
٣	٥٠	٧٠
٤	٥٥	٨٠
٥	٤٥	١٠٠

(أ) أوجد معامل الارتباط بين درجات كل من الاختبارين .

(ب) أوجد معادلة خط انحدار ص على س .

(ج) إذا حصل طالب آخر على الدرجة ٢٥ فى الاختبار س ، ما هى درجته المتنبأ بها فى الاختبار ص .

(د) أوجد الخطأ المعيارى للتنبؤ .

لحل هذه المسألة ربما يكون من الأفضل تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية نظراً لقلة عدد الدرجات ، حيث يمكن حساب معامل الارتباط باستخدام هذه الدرجات المعيارية .

رقم الطالب	دس	دص	دس × دص
١	−١,٥٠	−١,٢٠	١,٨٠
٢	−٠,٥٠	−٠,٤٠	٠,٢٠
٣	صفر	صفر	صفر
٤	+٠,٥٠	+٠,٤٠	٠,٢٠
٥	+١,٥٠	+١,٢٠	١,٨٠

س = ٥٠   ص = ٧٠   مج (دس × دص) = ٤

$ع_{س}$ = ١٠ $ع_{ص}$ = ٢٠

$$ر = \frac{مج(د_س \times د_ص)}{ن} = \frac{٤}{٥} = ٠,٨٠$$

، $د_{ص_م} = ر \times د_س$

أى : $د_{ص_م} = ٠,٨٠ \times د_س$

وهذه هى معادلة انحدار ص على س فى صورتها المعيارية . أما إذا أردنا إيجاد معادلة ص على س فى صورة الدرجات الخام ، فإننا نطبق المعادلة رقم (١٦) السابقة وهى :

$$ص_م = \overline{ص} + ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}(س - \overline{س})$$

$$\text{إذن } ص_م = ٧٠ + ٠,٨٠ \times \frac{٢٠}{١٠}(س - ٥٠)$$

$$= ٧٠ + ١,٦\,س - ٨٠$$

$$= ١,٦\,س - ١٠$$

فإذا حصل طالب على الدرجة ٢٥ فى الاختبار س ، فإن درجته المتنبأ بها فى الاختبار ص وهى :

$$ص_م = ١,٦ \times ٢٥ - ١٠ = ٣٠$$

والخطأ المعيارى للتنبؤ بدرجات ص بمعلومية درجات س

$$= ع_ص \sqrt{١ - ر^٢}$$

$$= ٢٠ \times \sqrt{١ - (٠,٨٠)^٢}$$

$$= ٢٠ \times \sqrt{٠,٣٦} = ٢٠ \times ٠,٦$$

$$= ١٢$$

ويمكن تفسير هذه القيمة كما سبق .

تصحيح الخطأ المعيارى للتنبؤ :

ربما يكون من الأفضل تصحيح تقدير الخطأ المعيارى للتنبؤ إذا استخدم الباحث عينة قليلة العدد (أى أقل من ٥٠ فرداً) قبل أن يعمم هذا التقدير على المجتمع الأصل الذى استمدت منه العينة . ويمكن إجراء هذا التصحيح باستخدام الصورة الآتية :

الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س بعد تصحيحه =

$$\text{الخطأ المعيارى قبل التصحيح} \times \sqrt{\frac{ن}{ن - ٢}} \quad \ldots\ldots \quad (٢٦)$$

حيث ن ترمز إلى عدد أفراد العينة . أو يمكنه إجراء هذا التصحيح عند حساب الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س باستخدام الصورة :

$ع_ص \sqrt{١ - ر^٢}$ حيث يصبح الخطأ المعيارى بعد تصحيحه

$$= ع_ص \sqrt{\left(١ - ر^٢\right)\left(\frac{ن}{ن-٢}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٧)$$

وبالمثل بالنسبة للخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم س بمعلومية قيم ص .

التباين المتنبأ به والتباين غير المتنبأ به :

Predicted and Unpredicted Variance

إذا نظرنا إلى شكل رقم (٥٧) السابق نلاحظ أن هناك ثلاثة أنواع من مجموعات المربعات يمكن حسابها من البيانات وهى :

١ — تباين الدرجات حول متوسط العينة (شكل رقم ٥٧ب) ويمثل المقدار (ص — $\overline{ص}$)٢ مجموع المربعات الخاصة بهذا التباين . وهو يستخدم فى تحديد التباين والانحراف المعيارى للعينة .

٢ — تباين الدرجات حول خط الانحدار (أو حول الدرجات المتنبأ بها) كما فى شكل (٥٧جـ) ويمثل المقدار (ص — صم)٢ مجموع المربعات الخاصة بهذا التباين . ويسمى التباين غير المتنبأ به ، أو التباين الذى لا نستطيع تفسيره .

ويمكن أن يتضح سبب هذه القسمية إذا رجعنا إلى تفسير معامل الارتباط بين متغيرين . فقد سبق أن ذكرنا أنه إذا كان معامل الارتباط بين متغيرين يساوى ±١ (أى معامل ارتباط تام) ، فإن جميع الدرجات تقع على خط الانحدار .

وهذا يعنى أننا نكون قد فسرنا التباين الكلى للمتغير ص بمعلومية تباين المتغير س ، وبالعكس نكون قد فسرنا التباين الكلى للمتغير س بمعلومية تباين المتغير ص . أى أننا نستطيع القول أنه فى حالة الارتباط التام يمكننا تفسير التباين الكلى . ولكن لكى يكون هذا الاستنتاج صحيحا يجب أن نفترض أن قيمة معامل الارتباط هى القيمة الفعلية أى لا ترجع إلى الصدفة . وهذا يعنى عدم اختلاف قيمة معامل الارتباط اختلافا ملحوظا باختلاف العينات المستمدة من المجتمع الأصلى .

أما إذا لم يكن معامل الارتباط تاما فسوف نجد أن كثيراً من الدرجات لا تقع على خط الانحدار كما يتضح من الشكل رقم (٥٧جـ) . والانحرافات هذه الدرجات عن خط الانحدار تمثل التباين الذى لا نستطيع تفسيره بمعلومية الارتباط بين المتغيرين . ولذلك استخدمنا عبارة « التباين الذى لا نستطيع تفسيره أو التباين غير المتنبأ به » .

٣ — تباين الدرجات المتنبأ به حول متوسط التوزيع (شكل رقم٥٧أ) . ويمثل المقدار (صم — $\overline{ص}$)٢ مجموع المربعات الخاصة بهذا التباين، ويسمى

التباين المتنبأ به أو التباين الذى يمكن تفسيره . وكلما زادت قيمة معامل الارتباط زاد مقدار التباين الذى يمكن تفسيره أو التنبؤ به . وعندما يكون مقدار هذا التباين أكبر ما يمكن يكون معامل الارتباط تاما ، وتكون نسبة التباين الذى يمكن تفسيره ١٠٠٪ .

ويمكننا إثبات أن المجموع الكلى للمربعات يشتمل على مكونتين يمكن إضافة كل منهما إلى الأخرى .

وهاتان المكونتان تمثلان التباين المتنبأ به ، والتباين غير المتنبأ به .

أى أن :
$$\text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢} = \text{مج}(\text{ص} - \text{ص}_{\text{م}})^{٢} + \text{مج}(\text{ص}_{\text{م}} - \bar{\text{ص}})^{٢} \quad \cdots\cdots \quad (٢٨)$$

وهذا يعنى أن المجموع الكلى المربعات = مجموع المربعات الخاصة بالتباين غير المتنبأ به .

فإذا كانت $\text{ر} = $ صفراً ، فإن $\text{مج}(\text{ص}_{\text{م}} - \bar{\text{ص}})^{٢} = $ صفرا ، وبالتالى يكون التباين الكلى = التباين غير المتنبأ به أو التباين الذى لا نستطيع تفسيره . أو بمعنى آخر عندما تكون $\text{ر} = $ صفراً ، لا نستطيع تفسير أى جزء من التباين الكلى .

أما إذا كانت $\text{ر} = ١$ فإن : $\text{مج}(\text{ص} - \text{ص}_{\text{م}}) = $ صفرا ، لأن جميع الدرجات تقع فى هذه الحالة على خط الانحدار ، وبهذا يكون التباين الكلى مساويا للتباين المتنبأ به أو التباين الذى يمكن تفسيره . أو بمعنى آخر إذا كانت $\text{ر} = ١$ فإننا نستطيع تفسير ١٠٠٪ من التباين .

ونسبة التباين المتنبأ به إلى التباين الكلى تسمى معامل التحديد

Coefficient of Determination.

كما أشرنا إلى ذلك فى الفصل السابع ، ويرمز له بالرمز ر٢ . ويمكن إيجاد قيمة ر٢ باستخدام الصورة الآتية :

$$ر^2 = \frac{\text{التباين الذى يمكن تفسيره}}{\text{التباين الكلى}}$$

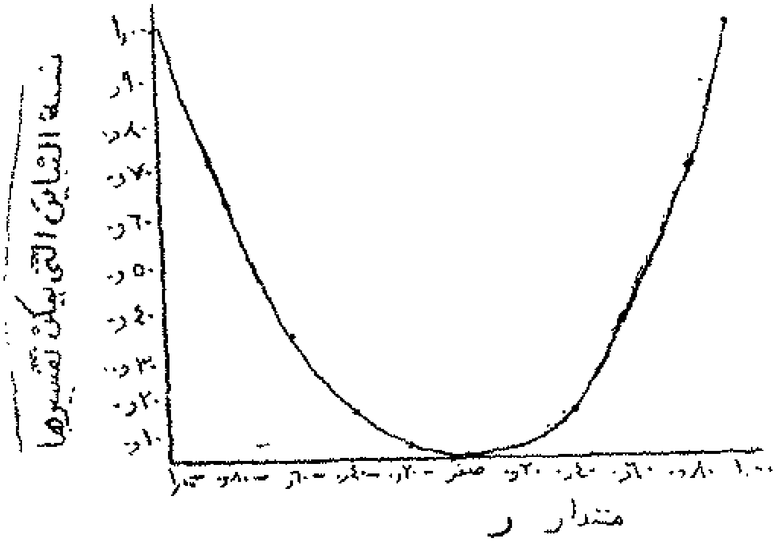
$$= \frac{\text{مج}\,(\text{ص}_\text{م} - \overline{\text{ص}})^2}{\text{مج}\,(\text{ص} - \overline{\text{ص}})^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٢٩)$$

ومن هذه الصورة يتضح أن معامل التحديد يدل على نسبة التباين الكلى الذى يمكن تفسيره بمعلومية قيمة معامل الارتباط .

فعندما تكون ر = صفراً ، يكون معامل التحديد ر٢ = صفرا أيضاً . وعندما تكون ر = ٠,٥٠ تكون ر٢ = ٠,٢٥ ، أى أننا نستطيع القول أن ٢٥٪ من التباين الكلى يمكن تفسيره .

ولكن عندما تكون ر = ١ تصبح ر٢ = ١ وبذلك نستطيع تفسير ١٠٠٪ من التباين الكلى .

والشكل رقم (٦٠) يوضح بيانياً نسبة تباين أحد المتغيرين الذى يمكن تفسيره بمعلومية تباين المتغير الآخر المرتبط بالمتغير الأول عندما تأخذ ر قيماً مختلفة . ونلاحظ أننا استعنا فى رسم هذا الشكل بالقيم المبينة فى جدول رقم (٨٥) .



شكل رقم (٦٠)
نسبة تباين احد المتغيرين الذى يمكن تفسيره
بمعلومية تباين المتغير الآخر عندما تأخذ ر قيما مختلفة

ويمكننا أن نلاحظ أن الجذر التربيعى لمعامل التحديد يعطينا تعريفا آخر لمعامل الارتباط ر .

أى أن :

$$ر = \pm \sqrt{\frac{\text{التباين الذى يمكن تفسيره}}{\text{التباين الكلى}}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\sum(\hat{ص} - \bar{ص})^2}{\sum(ص - \bar{ص})^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣٠)$$

ونظرا لأن $ر^2$ تمثل نسبة التباين الذى يمكن تفسيره ، فإن $(1 - ر^2)$ تمثل نسبة التباين الذى لا نستطيع تفسيره بمعلومية الارتباط بين المتغيرين س ، ص . ولذلك يسمى المقدار $(1 - ر^2)$ معامل الاغتراب Coefficient of Nondetermination ويرمز له بالرمز $ك^2$.

أى أن ك^٢ تمثل نسبة التباين فى المتغير ص الذى يلزم تفسيره بمعلومية متغيرات أخرى تختلف عن المتغير س .

ويمكن تلخيص العلاقة بين ك^٢ ، ر^٢ كالآتى :

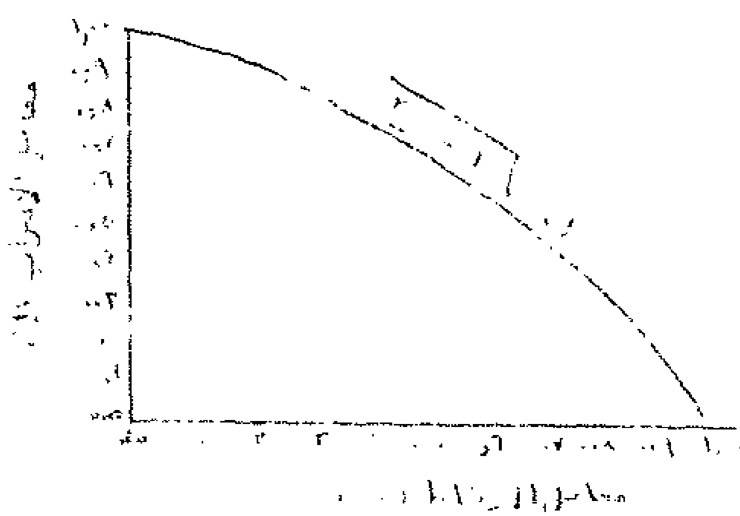
ك^٢ = ١ — ر^٢ . . . . (٣١)

أو ك^٢ + ر^٢ = ١ . . . . (٣٢)

ويتضح من الصورة رقم (٣٢) أن مجموع مربعى كل من ك ، ر يساوى الواحد الصحيح . فإذا كانت ر = ٠,٥٠ فإن ك لاتساوى ٠,٥٠ وإنما ك = ٠,٨٨٦ (أى $\sqrt{}$ ١ — ٠,٢٥ = $\sqrt{}$ ٠,٧٥ = ٠,٨٨٦)

وإذا كانت ر = ٠,٧٠٧١ فإن ك = ٠,٧٠٧١ أيضاً ، وهنا فقط تكون ر^٢ + ك^٢ = ٠,٥٠ + ٠,٥٠ = ١ . أى أنه عندما تكون ر = ٠,٧٠٧١ فإنه يتساوى وجود علاقة مع عدم وجودها .

ويمكن تمثيل العلاقة بين ر ، ك بالشكل الآتى رقم (٦١) . وفى الحقيقة تدل العلاقة المبينة بالصورة رقم (٣٢) وهى ر^٢ + ك^٢ = ١ على معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ، ونصف قطرها الوحدة . وقد اقتصرنا فى الشكل على تمثيل القيم الموجبة فقط لكل من ر ، ك .



شكل رقم (٦١)

العلاقة بين معامل الارتباط (ر) ومعامل الاغتراب (ك)

معامل فاعلية التنبؤ :

The Index of Forecasting Efficiency

إذا رجعنا إلى الصورة رقم (٢٥) التى تستخدم فى حساب الخطأ المعيارى للتنبؤ وهى :

الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س

$= ع_{ص} \sqrt{١ - ر^{٢}}$

نلاحظ أن المقدار الذى تحت علامة الجذر التربيعى هو معامل الاغتراب . أى أنه يمكننا كتابة هذه الصورة بطريقة أخرى كالآتى :

الخطأ المعيارى للتنبؤ $= ع_{ص} \; ك_{ص س}$ . . . . (٣٣)

فإذا ضربنا (ك) فى ١٠٠ نحصل على نسبة الخطأ المعيارى إلى الانحراف المعيارى للمتغير ص .

فإذا كانت ر = ٠,٦١ مثلا ، فإن ك $= \sqrt{١ - (٠,٦١)^{٢}}$

$= ٠,٧٩٢٤$

وبذلك يكون الخطأ المعيارى للتنبؤ ٧٩,٢٤٪ من الانحراف المعيارى للمتغير ص . أى أننا عند التنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم س ، تكون نسبة الخطأ مساوية ٧٩٪ من الخطأ الناتج عند التنبؤ بقيم ص دون معرفة قيم س .

أى أن النسبة المئوية لمقدار النقص فى أخطاء التنبؤ = ١٠٠ — ٧٩,٢٤ = ٢٠,٧٦٪ . ويعرف معامل فاعلية التنبؤ (ف) بأنه النسبة المئوية لمقدار النقص فى أخطاء التنبؤ نتيجة للارتباط بين المتغيرين . والصورة العامة التى يمكن استخدامها فى حساب هذا المعامل هى :

$ف = ١٠٠ \left(١ - \sqrt{١ - ر^{٢}}\right)$ . . . . (٣٤)

أو $ف = ١٠٠ (١ - ك)$ . . . . . . (٣٥)

والجدول الآتى رقم (٨٥) يوضح قيم ك ، ف ، $ر^{٢}$ المناظرة لقيم ر المختلفة .

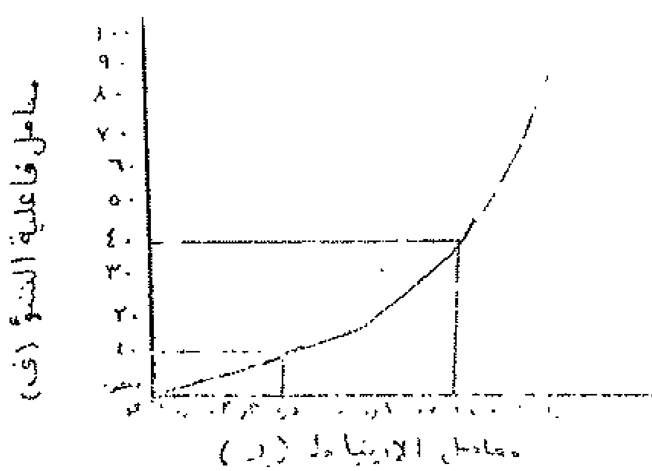
ر	ك	ف	١٠٠ × ر^{٢}
صفر	١,٠٠٠	صفر	صفر
٠,٠٥	٠,٩٩٩	٠,١	صفر
٠,١٠	٠,٩٩٥	٠,٥	١,٠٠
٠,١٥	٠,٩٨٩	١,١	٢,٢٥
٠,٢٠	٠,٩٨٠	٢,٠	٤,٠٠
٠,٢٥	٠,٩٦٨	٣,٢	٦,٢٥
٠,٣٠	٠,٩٥٤	٤,٦	٩,٠٠
٠,٣٥	٠,٩٣٧	٦,٣	١٢,٢٥
٠,٤٠	٠,٩١٧	٨,٣	١٦,٠٠
٠,٤٥	٠,٨٩٣	١٠,٧	٢٠,٢٥
٠,٥٠	٠,٨٦٦	١٣,٤	٢٥,٠٠
٠,٥٥	٠,٨٣٥	١٦,٥	٣٠,٢٥
٠,٦٠	٠,٨٠٠	٢٠,٠	٣٦,٠٠
٠,٦٥	٠,٧٦٠	٢٤,٠	٤٢,٢٥
٠,٧٠	٠,٧١٤	٢٨,٦	٤٩,٠٠
٠,٧٥	٠,٦٦١	٣٣,٩	٥٦,٢٥
٠,٨٠	٠,٦٠٠	٤٠,٠	٦٤,٠٠
٠,٨٥	٠,٥٢٧	٤٧,٢	٧٢,٢٥
٠,٩٠	٠,٤٣٦	٥٦,٤	٨١,٠٠
٠,٩٥	٠,٣١٢	٦٨,٨	٩٠,٢٥
٠,٩٨	٠,١٩٩	٨٠,١	٩٦,٠٠
٠,٩٩	٠,١٤١	٨٥,٩	٩٨,٠٠
٠,٩٩٥	٠,١٠٠	٩٠,٠	٩٩,٠٠
٠,٩٩٩	٠,٠٤٥	٩٥,٥	٩٩,٨٠٠

جدول رقم (٨٥)

قيم ف ، ك ، ١٠٠ × ر^{٢} المناظرة لقيم ر المختلفة

ونلاحظ من هذا الجدول أن معامل الارتباط يجب أن يساوى ٤٥,٠ قبل أن تصل ف إلى ١٠٪ . فمثلا إذا كان معامل الصدق التنبؤى لاختبار ما يساوى ٤٥,٠ ، فإن معنى هذا أن مقدار أخطاء التنبؤ بوجه عام تكون فقط أقل بقدر ١٠٪ من الأخطاء التى تحدث لو أنه لم يكن معلوما لدينا درجات الاختبار ، ولكن يكون لدينا فقط متوسط درجات المقياس المحك . وهذا ربما يدل على عدم فاعلية هذا الاختبار فى التنبؤ بالمحك . وتوجد بلا شك مواقف نحصل منها على قيم منخفضة لهذا المعامل، ولكن بالرغم من ذلك يكون الموقف أهمية عملية .

والشكل الآتى رقم (٦٢) يوضح بيانياً العلاقة بين معامل فاعلية التنبؤ (ف) ، ومعامل الارتباط (ر) .



شكل رقم (٦٢)

العلاقة بين معامل فاعلية التنبؤ ، ومعامل الارتباط

ويقترح جيلفورد Guilford أن تنحصر معاملات صدق الاختبارات التى تستخدم فى البحوث النفسية التربوية لأغراض التنبؤ بين ٣٠,٠ ، ٨٠,٠ لأنه نادرا ما نجد اختبارا يزيد معامل ارتباطه بمحك عملى واقعى عن ٧٠,٠ . بينما إذا

انخفضت قيمة معامل الارتباط عن ٢٠,٠ فإن مثل هذا الاختبار تكون قيمته محدودة إذا استخدم بمفرده للتنبؤ بالمحك . أما إذا استخدم ضمن بطارية من الاختبارات بحيث يسهم إسهاماً متميزاً عن غيره من اختبارات البطارية فإنه ربما يفيد فى هذه الحالة فى التنبؤ .

ولذلك فقد حددنا فى شكل رقم (٦٢) المنطقة التى يجب أن تنحصر بينها قيم معامل الارتباط وهى ٣٠,٠ إلى ٨٠,٠ ، وبذلك تنحصر ف بين ٤,٦ ، ٤٠ .

تمارين على الفصل الرابع عشر

١ — أوجد معادلتى خطى انحدار ص على س ، س على ص للبيانات الآتية :

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٥	٣	٤	٢	١

٢ — فى دراسة لإيجاد العلاقة بين درجات اختبارين س ، ص حصل باحث على البيانات الآتية :

$\bar{س} = ١١٩$ ، $\bar{ص} = ١,٢٠$

$ع_{س} = ١٠$ ، $ع_{ص} = ٠,٥٥$

، ر = ٠,٧٠

، ن = ١٠٠

(أ) حصل طالب على الدرجة ١٣٠ فى الاختبار س ، ما هى درجته المتنبأ بها فى الاختبار ص ؟

(ب) حصل طالب على الدرجة ١,٢٨ فى الاختبار ص ، ما هى درجته المتنبأ بها فى الاختبار س ؟

(ﺟ) إحسب الخطأ المعيارى للتنبؤ فى كل من الحالتين ؟

٣ — أراد باحث إيجاد العلاقة بين الاتزان الانفعالى والأداء لطلاب إحدى الكليات ، وحصل على البيانات الآتية :

الاتزان الانفعالى (س)	متوسط الأداء (ص)
س̄ = ٤٩	ص̄ = ١,٣٥
ع س = ١٢	ع ص = ٠,٥٠

ر = ٠,٣٦
ن = ٦٠

(أ) حصل طالب على الدرجة ٦٥ فى المتغير (س) ، ما هو تنبؤك بدرجته فى المتغير (ص) ؟

(ب) احسب الخطأ المعيارى للتنبؤ فى هذه الحالة .

(جـ) ما هى نسبة التباين الكلى الذى يمكن تفسيره نتيجة لهذه العلاقة .

٤ — إذا افترضنا أن س̄ = ٣٠ ، ع س = ٥ ، ص̄ = ٤٥ ، ع ص = ٨ . ارسم شكلا لكل من خطى الانحدار فى الحالات الآتية :

(أ) ر = صفر (ب) ر = ٠,٢٠ (جـ) ر = ٠,٤٠

(د) ر = ٠,٦٠ (هـ) ر = ٠,٨٠ (و) ر = ١,٠٠

ثم استنتج العلاقة بين قيمة ر والزاوية المحصورة بين خطى الانحدار .

وإذا كانت معاملات الارتباط (ب ، هـ ، و) سالبة ، ماذا يحدث لهذه العلاقة .

٥ — إذا كان الانحراف المعيارى لدرجات اختبار مقن فى فهم معانى الكلمات = ١٥ . والارتباط بين هذا الاختبار ونسب الذكاء = ٠,٨٠ . ما هو توقعك لقيمة الانحراف المعيارى لتوزيع درجات الاختبار المقن إذا طبق على عينة كبيرة من الطلاب المتقاربين فى نسب ذكائهم . مع تفسير الإجابة .

٦ — حصل طالب فى أحد الاختبارات (س) على درجة تزيد عن المتوسط بقدر ١,٥ انحراف معيارى . ما هى الدرجة المتنبأ بها فى اختبار (ص) إذا كان معامل الارتباط ر بين درجات كل من الاختبارين يساوى :

(أ) صفر (ب) ٠,٤٠ (ج) ٠,٨٠

(د) ١,٠٠ (هـ) — ٠,٥٠ (و) — ٠,٨٠

٧ — قام أحد الباحثين بدراسة أحد جوانب الأداء فى إنتاج إحدى السلع لدى عمال أحد المصانع . وقد استطاع أن يحصل على مقياس للأداء (س) يعكس بدقة كفاءة هؤلاء العمال بعد أن اكتسبوا خبرة فى هذا العمل لمدة عام واحد . ثم قام بتصميم اختبار (ص) ليستخدم فى التنبؤ بكفاءة العمال المستقبلية فى أداء هذا العمل . ووجد أن معامل الارتباط بين هذا الاختبار ومقياس الأداء الذى حصل عليه = ٠,٦٠ ، ومتوسط درجات المقياس $\bar{س}$ ، والانحراف المعيارى $ع_{س}$ = ١٠ ، ومتوسط درجات الاختبار $\bar{ص}$ = ٥٠ ، $ع_{ص}$ = ٦ . باستخدام هذه البيانات أجب على الأسئلة الآتية :

(أ) حصل عامل على الدرجة ٤٠ فى الاختبار (ص) ، ماذا تكون درجته المتنبأ بها فى المقياس (س) ؟

(ب) ما هو احتمال حصول عامل على الدرجة ١١٠ فى مقياس الأداء (س) ؟

(ج) إذا اعتبر الباحث أن الدرجة ٨٠ فى المقياس (س) درجة مقبولة ، والدرجات التى تقل عن ٨٠ فى نفس المقياس غير مقبولة . ما هى الدرجة التى يجب استخدامها كنقطة فاصلة إذا استخدم الباحث الاختبار ص كوسيلة لانتقاء العمال ؟

(د) حصل عامل على الدرجة ٦٠ فى الاختبار (س) . ما هو احتمال حصوله على درجة غير مقبولة فى المقياس (ص) ؟

(هـ) حصل عامل على الدرجة ٣٠ فى الاختبار (ص) . ما هو احتمال حصوله على درجة مقبولة فى المقياس (س) ؟

(و) لكى يحصل عامل على مركز إشرافى فى العمل يجب أن يحقق الدرجة ١٢٠ أو أعلى من ذلك فى المقياس (ص) . ما هى الدرجة فى الاختبار (س) التى يجب استخدامها لاختيار مثل هذا العامل ؟

(ز) إذا حصل ١٠٠٠ عامل على درجة فى الاختبار (ص) يمكن باستخدامها التنبؤ بحصولهم على الدرجة ١٢٠ فى المقياس (س) . كم عدد العمال (بالتقريب) الذين سوف يحصلون على درجات فى الاختبار س تقل عن ١٢٠ ؟ وكم عدد العمال الذين سوف يحصلون على درجات تزيد عن ١٣٠ ؟

(ح) احسب معامل فاعلية التنبؤ للاختبار ص . وفسر القيمة الناتجة ؟

٨ — إذا كان تباين أخطاء التنبؤ (مربع الخطأ المعيارى للتنبؤ) = ٢٠٠ ، وتباين المتغير ص = ٦٠٠ .

(أ) أوجد نسبة تباين المتغير ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغير س .

(ب) أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص .

٩ — إذا كانت البواقى (ص — $ص_م$) تتوزع توزيعا اعتداليا انحرافه المعيارى $ع_{ص}$. ما هى الحدود التى تنحصر بينها ٩٥٪ ، ٩٩٪ من هذه البواقى؟

١٠ — إذا كانت الدرجات المعيارية لأربعة تلاميذ فى المتغير س هى —٢ ، —١٫٦٨ ، —٠٫١٩ ، ١٫١٦ ، والارتباط بين المتغير س ومتغير آخر ص يساوى ٠٫٥٠ .

(أ) أوجد الدرجة المعيارية المتنبأ بها لكل منهم فى المتغير ص .

(ب) أوجد الخطأ المعيارى التنبؤ .

الفصل الخامس عشر

الانحدار غير الخطى

مطابقة البيانات لبعض الدوال الرياضية

مطابقة البيانات للدالة الأساسية

مطابقة البيانات لدالة القوة

مطابقة البيانات للدالة اللوغاريتمية

مطابقة البيانات لدالة القطع المكافئ.

مقـــدمة :

عرضنا فى الفصل السابق العلاقة الخطية بين متغيرين وإيجاد خط أحسن مطابقة للبيانات الخاصة بالمتغيرين . ولكن ربما لا يجد الباحث فى جميع الأحوال أن هناك خطا مستقيما يشير إلى الاتجاه العام الذى يتخذه أحـــد المتغيرين بالنسبة للمتغير للآخر ، بل يجد أن الاتجاه يشير إلى علاقة غير خطية أى منحنية .

وقد ناقشنا فى الفصل الحادى عشر كيفية حساب معامل الارتباط بين متغيرين العلاقة بينهما منحنية باستخدام نسبة الارتباط (η) .

ولكننا سنناقش فى هذا الفصل مشكلة التنبؤ أو الانحدار إذا كانت العلاقة بين المتغيرين غير خطية ، وإيجاد أفضل منحنى مطابقة أو أفضل دالة رياضية تطابق البيانات . وسوف نعرض فى هذا الفصل أربعة أنواع من هـــذه الدوال هى الدالة الأسية Exponential ، ودالة القوة Power ، والدالة اللوغاريتمية Logarithmic ، ودالة القطع المكافىء Parabola . وعادة يبدأ الباحث برسم شكل انتشارى لأزواج قيم المتغيرين على ورقة رسم بيانى عادية ، فإذا وجد أن العلاقة تقترب من الخطية فما عليه إلا أن يستخدم طرق الانحدار الخطى التى عرضنا لها فى الفصل السابق . أما إذا وجد أن النقط لا تميل إلى التراكم حول خط مستقيم ، وأن العلاقة تبدو منحنية فيمكنه استخدام ورقة رسم بيانى لوغاريتمى ويوجد نوعان من هذا الورق ، النوع الأول يقسم فيه المحور الأفقى إلى أقسام متساوية مثل ورقة الرسم البيانى العـــادية ، بينما يقسم المحور الرأسى تقسيما لوغاريتميا . أى أن الأقسام على هذا المحور ليست متساوية ، وإنما تتبع النظـام اللوغاريتمى ، وتسمى هـــذه الورقة ورقة رسم بيانى شبه لوغاريتمى . Semi—Log Paper . أما النوع الثانى فيقسم فيه كل من المحورين تقسيما لوغاريتميا ، وتسمى هذه الورقة ورقة رسم بيانى لوغاريتمى على كل من المحورين Log—Log Paper

مطابقة البيانات للدالة الأسية :

Exponential Function

إذا وجد الباحث من التمثيل البيانى للعلاقة بين المتغيرين على ورقة رسم شبه لوغاريتمى Semi—Log Paper أن هذه العلاقة خطية ، أى أن تحويل ميزان قياس أى من المتغيرين إلى ميزان لوغاريتمى جعل العلاقة تبدو خطية ، فإن هذا يكون دليلا على أن العلاقة بين قيم كل من ص ، س الملاحظة تأخذ شكل منحنى الدالة الأسية التى على الصورة :

$$\text{ص} = \text{ا ب}^{\text{س}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

وهذا يعنى أن قيم ص ترتبط بقيم س بعلاقة أسية . حيث يكون المتغير المستقل س عبارة عن قوى ب .

ويمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة اللوغاريتمية الآتية :

$$\text{لو ص} = \text{لو ا} + \text{س (لو ب)} \quad \ldots\ldots \quad (٢)$$

حيث (لو) ترمز إلى لوغاريتم العدد للأساس ١٠ . ونلاحظ أن هذه المعادلة تمثل علاقة خطية بين قيم س الاصلية وقيم لو ص .

وبذلك يمكن استخدام طرق الانحدار الخطى التى عرضنا لها فى الفصل السابق ، ولكن بعد أن نضع لو ص بدلا من ص ، لو ا بدلا من ا . لو ب بدلا من ب فى الصورتين رقمى ٢ ، ٤ المستخدمتين فى إيجاد قيمتى كل من $\text{ب}_{\text{ص س}}$ ، $\text{ا}_{\text{ص س}}$ فى الفصل السابق .

وبذلك تصبح الصورتان كالآتى :

$$\text{لو ب}_{\text{ص س}} = \frac{\text{ن مج س (لو ص)} \quad \text{مج س مج (لو ص)}}{\text{ن مج س}^{٢} - (\text{مج س})^{٢}} \quad \ldots \quad (٣)$$

$$\text{، لو } أ_{ص س} = \frac{\text{مج}(\text{لو ص}) - (\text{لو } ب_{ص س})\ \text{مج س}}{ن} \quad \ldots (٤)$$

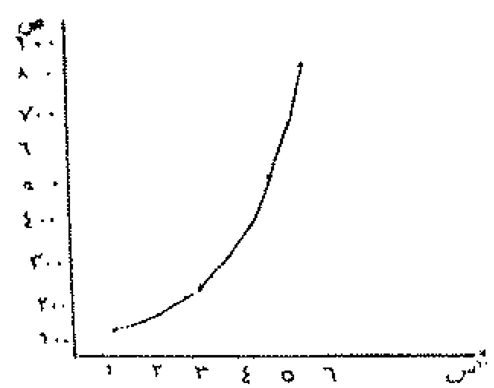
وبالمثل فى حالة انحدار س على ص .

ولتوضيح كيفية تطبيق هاتين الصورتين . نفترض أن لدينا البيانات الآتية الخاصة بالمتغيرين س ، ص المبينة بجدول رقم (٨٦) :

س	ص
١	١١٢
٢	١٤٩
٣	٢٣٨
٤	٣٥٤
٥	٥٨٠
٦	٨٦٧

جدول رقم ٨٦

فإذا رسمنا شكلا كالآتى رقم (٦٣) ليوضح العلاقة بين المتغيرين ، فإننا نلاحظ أن العلاقة غير خطية .



شكل رقم ٦٣

علاقة غير خطية بين المتغيرين

ولكن تصبح هذه العلاقة خطية إذا حولنا ميزان قياس ص إلى ميزان لوغاريتمى كما هو مبين بالشكل رقم (٦٤) . ولذلك فإن البيانات تطابق الدالة الأسية .



شكل رقم (٦٤)
علاقة خطية بين متغيرين ممثلة على
ورقة رسم بيانى شبه لوغاريتمى

ولإيجاد معادلة انحدار ص على س يجب أن نوجد قيمة كل من لو ب ص س ، لو أ ص س . ولذلك نكون جدولا كالآتى :

	س	ص	لو ص	س لو ص	س٢
	١	١١٢	٢،٠٩٤٢	٢،٠٤٩٢	١
	٢	١٤٩	٢،١٧٣٢	٤،٣٤٦٤	٤
	٣	٢٣٨	٢،٣٧٦٦	٧،١٢٩٨	٩
	٤	٣٥٤	٢،٥٤٩٠	١٠،١٩٦٠	١٦
	٥	٥٨٠	٢،٧٦٣٤	١٣،٨١٧٠	٢٥
	٦	٨٦٧	٢،٩٣٨٠	١٧،٦٢٨٠	٣٦
المجموع	٢١		١٤،٨٤٩٤	٥٥،١٦٦٤	٩١

جدول رقم ٨٧
خطوات ايجاد معادلتى الانحدار عندما
تكون البيانات مطابقة للدالة الاسية

وبالتعويض فى المعادلتين السابقتين رقمى ٣ ، ٤ نجد أن :

$$\text{لو}_{\text{صس}} = \frac{(\text{١٤,٨٤٩٤})(\text{٢١}) - (\text{٥٥,١٦٦٤})(\text{٦})}{(\text{٢١})^{\text{٢}} - (\text{٩١})(\text{٦})}$$

$$= \text{٠,١٨٣}$$

وبالكشف فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات (يمكن أن يرجع الباحث إلى أحد الجداول الرياضية) نجد أن :

$$\text{ب}_{\text{صس}} = \text{١,٥٢٤}$$

$$\text{، لو أ}_{\text{صس}} = \frac{\text{١٤,٨٤٩٤} - (\text{٠,١٢})(\text{٢١})}{\text{٦}}$$

$$= \text{٢٠,٥٤٩}$$

وبالكشف فى جداول الاعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

$\hat{أ}$ ص س = ١١٣٫٥

وبذلك تكون معادلة منحنى الدالة الأسية التى تعتبر أفضل تمثيل للعلاقة بين المتغيرين س ، ص هى :

$$ص_م = ١١٣٫٥ \ (١٫٥٢٤)^{س}$$

حيث $ص_م$ هى قيمة ص المتنبأ بها

وهذه يمكن كتابتها على الصورة اللوغاريتمية الآتية :

$$لو \ ص_م = لو \ ١١٣٫٥ + س \ لو \ ١٫٥٢٤$$

فإذا أردنا التنبؤ بقيمة ص بمعلومية قيمة س = ١٠ مثلا ، فما علينا إلا أن نعوض فى المعادلة اللوغاريتمية عن س = ١٠ ، وبذلك نحصل على :

$$لو \ ص_م = ٢٫٠٠٥٤٩ + ١٠ \times ٠٫١٨٣$$

$$= ٣٫٨٨٤٩$$

وبالكشف فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

$$ص_م = ٧٦٧١٫٨٥$$

مطابقة البيانات لدالة القوة :

Power Function

إذا وجد الباحث من التمثيل البيانى للعلاقة بين المتغيرين على ورقة Log-Log Paper أن العلاقة تبدو خطية فى حين أنها لم تبد كذلك عندما استخدم ورقة رسم بيانى شبه لوغاريتمى Semi -Log Paper فإن هذا يكون دليلا على أن العلاقة بين قيم س ، ص الملاحظة تأخذ منحنى دالة القوة التى على الصورة :

$$ص = أ_{س} ب \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥)$$

وهذه تربط قيم ص بقوى معينة لقيم س .

ويمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة اللوغاريتمية الآتية :

$$لو\ ص = لو\ أ + ب\ لو\ س \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

ونلاحظ أن هذه المعادلة تمثل علاقة خطية بين لو ص ، لو س . وبذلك يمكن أيضاً إيجاد معادلة الانحدار باستخدام طرق الانحدار الخطى التى عرضنا لها فى الفصل السابق . ولكن يجب أن نضع لو س بدلا من س ، لو ص بدلا من ص ، لو أ بدلا من أ فى الصورتين السابقتين رقمى ٣ ، ٤ المستخدمتين فى إيجاد قيمتى $أ_{ص س}$ ، $ب_{ص س}$ فى حالة الانحدار الخطى كالآتى :

$$، ب_{ص س} = \frac{ن\ مج (لو\ س)(لو\ ص) - مج (لو\ س)\ مج (لو\ ص)}{ن\ مج (لو\ س)^{٢} - (مج\ لو\ س)^{٢}} \quad \ldots\ldots \quad (٧)$$

$$، أ_{ص س} = \frac{مج (لو\ ص) - ب_{ص س}\ مج (لو\ س)}{ن} \quad \ldots\ldots \quad (٨)$$

حيث مج (لو س) (لو ص) هى مجموع حواصل الضرب التى نحصل عليها بضرب لوغاريتم كل قيمة من قيم س فى لوغاريتم القيمة التى تناظرها من ص .

، مج (لو س)^{٢} هى مجموع مربعات لوغاريتمات قيم س .

وبالتعويض فى هاتين الصورتين يمكننا إيجاد قيمة كل من $أ_{ص س}$ ، $ب_{ص س}$ وبذلك نستطيع الحصول على معادلة انحدار ص على س وهى :

$$\text{ص}_{\text{م}} = \text{أ س}^{\text{ب}}$$

$$\text{أو لو ص}_{\text{م}} = \text{لو أ} + \text{ب (لو س)}$$

وبالمثل فى حالة انحدار س على ص .

مطابقة البيانات للدالة اللوغاريتمية :

Logarithmic Function

أحيانا يجد الباحث أن هناك علاقة خطية بين قيم ص وقيم لو س عند تمثيلها على ورقة رسم بيانى عادية ، أو إذا استخدم ورقة رسم بيانى شبه لوغاريتمى لتمثيل العلاقة بين قيم س، ص الأصلية . فهذا يكون دليلا على أن البيانات تكون مطابقة لمنحنى الدالة اللوغاريتمية . ومن المعلوم أن الدالة اللوغاريتمية هى دالة عكسية للدالة الأسية ، وتكتب على الصورة :

$$\text{ص} = \text{ا} + \text{ب لو س} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٩)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على معادلتى الانحدار باستخدام طرق الانحدار الخطى بعد أن نضع لو س بدلا من س فى الصورتين رقمى ٢ ، ٤ المستخدمتين فى إيجاد $\text{أ}_{\text{ص س}}$ ، $\text{ب}_{\text{ص س}}$ فى حالة الانحدار الخطى .

مطابقة البيانات لدالة القطع المكافىء :

Fitting a Parabola

إذا وجد الباحث أن الخط العام للعلاقة يشير إلى أن قيم ص تزيد فى البدء ثم تقل بعد ذلك أو العكس ، فإنه يمكنه أن يرتب قيم ص ترتيبا تنازليا أو تصاعديا ، وعندئذ ربما يجد أن البيانات تكون مطابقة لمعادلة القطع المكافىء التى على الصورة :

$$\text{ص} = \text{ا} + \text{ب}_{١}\,\text{س} + \text{ب}_{٢}\,\text{س}^{٢} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٠)$$

وهنا يمكن أن يستخدم الباحث المعادلات الثلاث الآتية في حساب قيمة كل من الثوابت أ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ في المعادلة رقم (١٠) كالآتي :

$$\text{مج ص} = \text{ن أ} + \text{ب}_1 (\text{مج س}) + \text{ب}_2 (\text{مج س}^2) \quad \cdots \quad (١١)$$

$$\text{، مج س ص} = \text{أ} (\text{مج س}) + \text{ب}_1 (\text{مج س}^2) + \text{ب}_2 (\text{مج س}^3) \quad \cdot\cdot \quad (١٢)$$

$$\text{، مج س}^2\text{ ص} = \text{أ} (\text{مج س}^2) + \text{ب}_1 (\text{مج س}^3) + \text{ب}_2 (\text{مج س}^4) \quad \cdot\cdot \quad (١٣)$$

حيث مج س ص ترمز إلى مجموع حواصل ضرب كل قيمة من قيم س في قيمة ص المناظرة لها .

، مج $س^٢$ ص ترمز إلى مجموع حواصل ضرب مربع كل قيمة من قيم س في قيمة ص المناظرة لها .

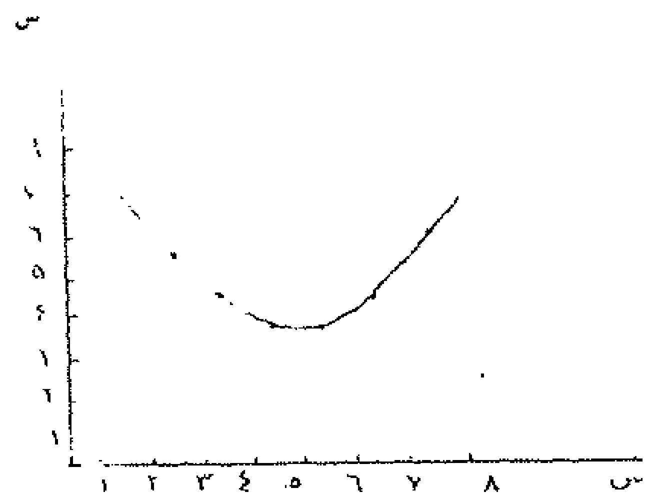
، مج $س^٢$ ، مج $س^٣$ ، مج $س^٤$ هي مجموع القوة الثانية ، ومجموع القوة الثالثة ، ومجموع القوة الرابعة للمتغير س على الترتيب .

ويمكن توضيح كيفية تطبيق هذه المعادلات على البيانات الآتية التي في الجدول رقم (٨٨) :

س	ص
١	٧,٢
٢	٦,٧
٣	٤,٧
٤	٣,٧
٥	٤,٧
٦	٤,٢
٧	٥,٢
٨	٥,٧

جدول رقم (٨٨)

فإذا مثلنا هذه البيانات تمثيلا بيانياً على ورقة رسم بيانى عادية يمكن أن نحصل على الشكل الآتى رقم (٦٥) :



شكل رقم (٦٥)

مطابقة البيانات لدالة القطع المكافىء

وبالنظر إلى هذا الشكل نجد أن قيم ص تقل تدريجيا ، ثم تزيد بعد ذلك ، مما يدل على أن شكل البيانات يطابق إلى حد كبير دالة القطع المكافىء .

والتعويض فى المعادلات الثلاث السابقة يتطلب إيجاد قيم مجـ س ص ، مجـ س^{٢} ص ، مجـ س ، مجـ س^{٢} ، مجـ س^{٣} ، مجـ س^{٤} كما فى الجدول الآتى :

س	ص	س^{2}	س^{3}	س^{4}	س ص	س^{2} ص
١	٧،٢	١	١	١	٧،٢	٧،٢
٢	٦،٧	٤	٨	١٦	١٣،٤	٢٦،٨
٣	٤،٧	٩	٢٧	٨١	١٤،١	٤٢،٣
٤	٣،٧	١٦	٦٤	٢٥٦	١٤،٨	٥٩،٢
٥	٤،٧	٢٥	١٢٥	٦٢٥	٢٣،٥	١١٧،٥
٦	٤،٢	٣٦	٢١٦	١٢٩٦	٢٥،٢	١٥١،٢
٧	٥،٢	٤٩	٣٤٣	٢٤٠١	٣٦،٤	٢٥٤،٨
٨	٥،٧	٦٤	٥١٢	٤٠٩٦	٤٥،٦	٣٦٤،٨
المجموع ٣٦	٤٢،١	٢٠٤	١٢٩٦	٨٧٧٢	١٨٠٠،٢	١٠٢٢٣،٨

جدول رقم (٨٩)

خطوات ايجاد معادلتى الانحدار عندما تكون

مطابقة لدالة القطع المكافىء

وبالتعويض فى المعادلات رقم ١١ ، ١٢ ، ١٣ نجد أن :

٤٢،١ = ٨أ + ٣٦ب$_{1}$ + ٢٠٤ ب$_{2}$

١٨٠٠،٢ = ٣٦أ + ٢٠٤ب$_{1}$ + ١٢٩٦ب$_{2}$

١٠١٣٠٨ = ٢٠٤أ + ١٢٩٦ب$_{1}$ + ٨٧٧٢ب$_{2}$

وبحل هذا النظام من المعادلات الثلاث لكى نحصل على قيمة كل من أ ، ب$_{1}$ ، ب$_{2}$ مع تقريب كل قيمة إلى رقم عشرى واحد نجد أن :

أ = ٩،٢ ، ب = − ٢ ، ﺟ = ٠،٢

وبذلك تكون معادلة القطع المكافىء هى :

ص$_{م}$ = ٩،٢ − ٢س + ٠،٢س^{2}

ويمكن استخدام هـــذه المعادلة فى التنبؤ بقيم المتغير ص بمعلومية قيم معينة للمتغير س .

فإذا كانت س = ٦,٥ فإن :

$$ص_م = ٩,٢ - (٢)(٦,٥) + (٠,٢)(٦,٥)^٢$$

$$= ٤,٦٥$$

وإذا أردنا تقدير قيمة المتغير س عندما تكون قيمة المتغير ص أقل ما يمكن، فإننا يجب ان نعلم أن أكبر قيمة (أو أصغر قيمة) يأخذها المتغير ص فى حالة القطع المكافىء الذى معادلته $ص = أ + ب_١ س + ب_٢ س^٢$ هى عندما تكون

$$س = \frac{ب_١}{٢ب_٢} .$$

وبالتعويض عن قيمة كل من $ب_١$ ، $ب_٢$ التى حصلنا عليها نجد أن :

$$س = - \frac{-٢}{(٢)(٠,٢)} = \frac{٢}{٠,٤} = ٥$$

$$\text{وبذلك تكون } ص = ٩,٢ - (٢)(٥) + (٠,٢)(٥)^٢$$

$$= ٤,٢$$

وربما يتساءل الباحث كيف أن أقل قيمة تصل اليها ص = ٤,٢ بينما إذا نظرنا إلى الجدول رقم (٨٩) نجد أن بعض قيم المتغير ص أقل من ٤,٢ . فمثلا إحدى هذه القيم = ٣,٢ . ولكن يجب أن يعلم الباحث أن المتغير ص هو متغير عشوائى ، وأن معادلة القطع المكافىء التى حاولنا مطابقة البيانات لها يجب اعتبارها معادلة انحدار . فعند تفسير القيم المتنبأ بها يجب أن ننظر إليها على أنها قيم متوقعة أو متوسطات وليست قيما ملاحظة .

تمارين على الفصل الخامس عشر

١ ـ فيما يلى مجموعة من البيانات التى تشتمل على قيم كل من المتغيرين س ، ص :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ص	٠,٨	٢,٤	٠,٤	٥,١	٧,٣	٩,٤	١٣,٥	١٩,٢

(أ) استخدم الدالة الأسية لمطابقة هذه البيانات .

(ب) استخدم ذلك فى التنبؤ بقيمة المتغير ص إذا كانت س = ٩ .

٢ ـ فيما يلى مجموعة من البيانات التى تشتمل على قيم كل من المتغيرين س ، ص :

س	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠
ص	٦٣	٨٠	١٠٧	١٤٠	١٧٥	٢٣١

استخدم دالة القوة لمطابقة هذه البيانات .

ثم أوجد قيمة تقديرية للمتغير ص عندما تكون س = ١٢ ، وعندما تكون س = ٢٤ .

٣ ـ بين هل من الممكن أن تطابق المعادلة :

ص = أ + ب لو س

البيانات الآتية التى تشتمل على قيم كل من المتغيرين س ، ص

س	١,٢	١,٥	١,٧	٢,٠	٣,٠	٤,٢	٧,٠	١٠,٠
ص	٢,٢	٢,٥	٢,٦	٢,٨	٣,٢	٣,٦	٤,٢	٤,٦

٤ — فيما يلي مجموعة من البيانات التي تشتمل على قيم متغيرين :

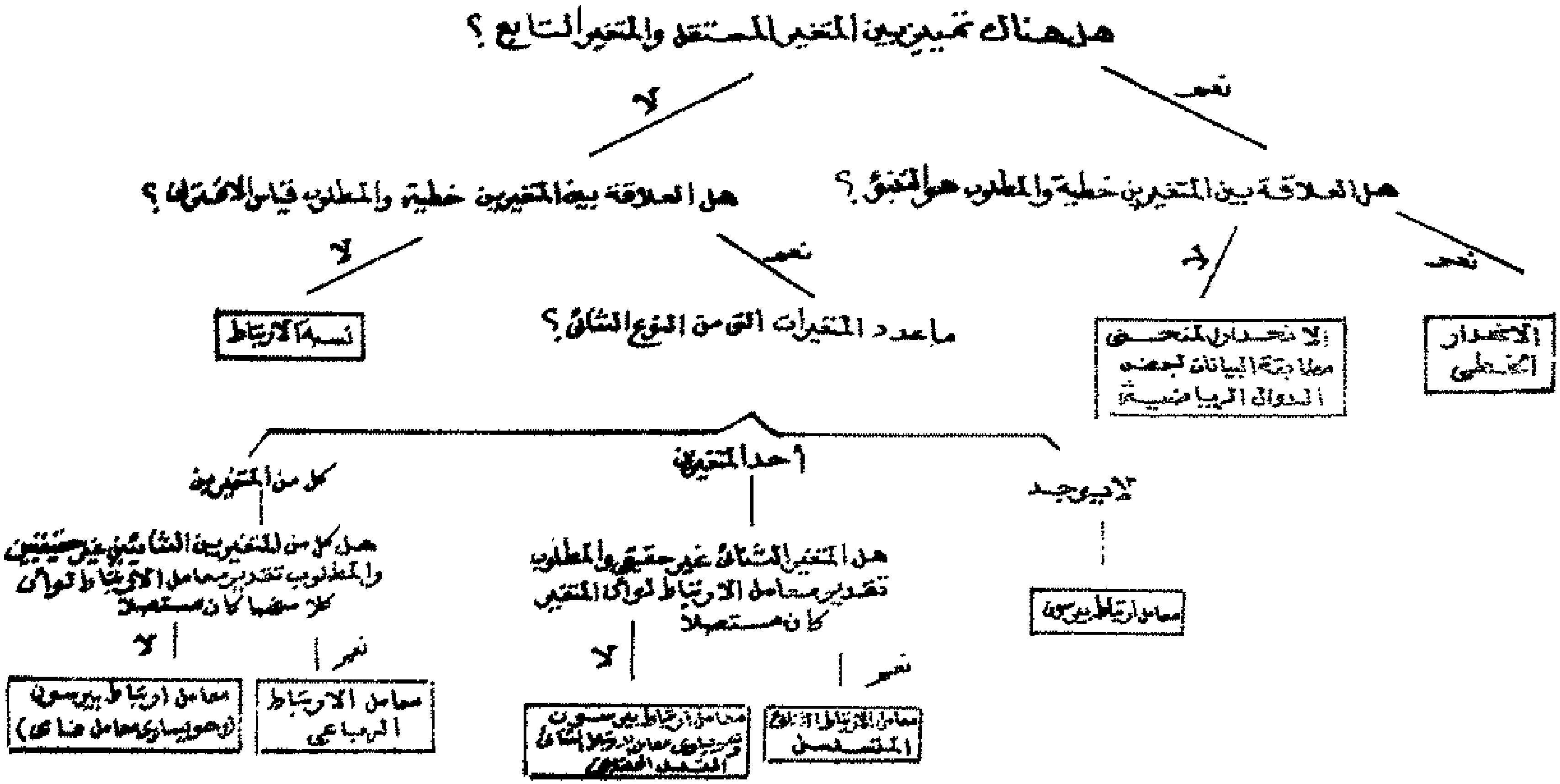
س	١,٠	١,٥	٢,٠	٢,٥	٣,٠
ص	٨,٦	٩,٨	١٠,٢	٨,٨	٦,٩

استخدم دالة القطع المكافىء لمطابقة هذه البيانات ، وتنبأ بقيمة المتغير س التي تجعل قيمة المتغير ص نهاية عظمى مع التقريب لرقمين عشريين .

شجرة قرارات تساعد الباحث على اختيار الأسلوب الإحصائي الذي يناسب بيانات بحثه

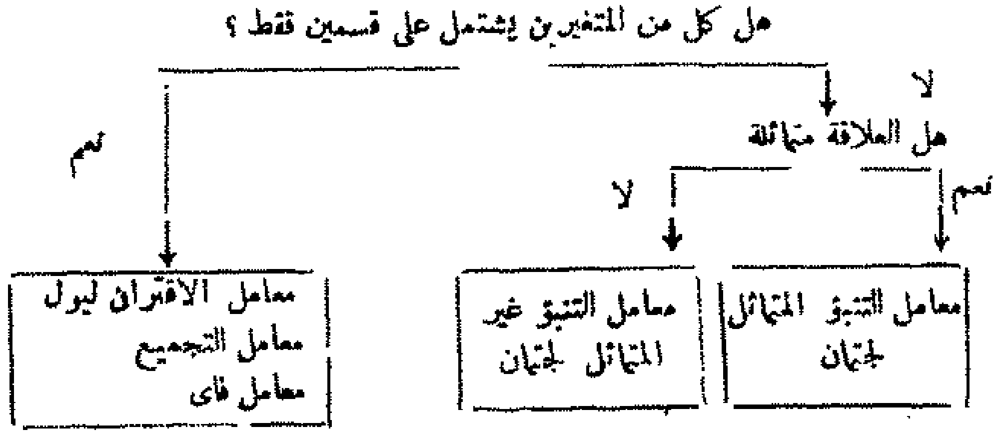
(ثانيا) إذا اشتمل البحث على متغيرين

من النوع الفتري



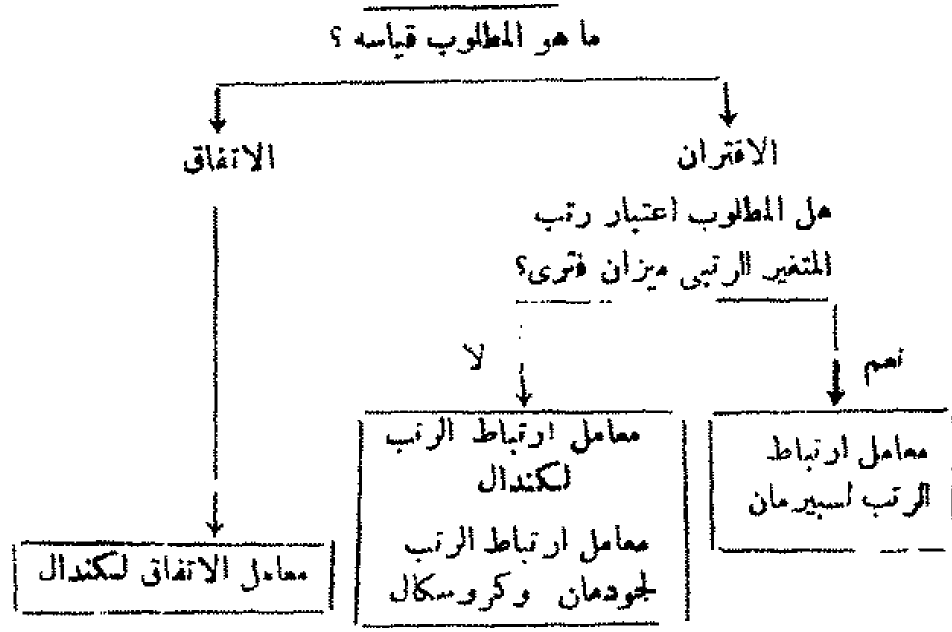
(ثالثا) إذا اشتمل البحث على متغيرين

من النوع الاسمى



(رابعا) إذا اشتمل البحث على متغيرين

من النوع الرتبى



(خامسا) إذا اشتمل البحث على متغيرين أحدهما من النوع الرتبي والآخر من النوع الاسمي

هل هناك تمييز بين المتغير المستقل والمتغير التابع ؟

نعم ← مقياس إشارات الرتب لويلكوكسون

لا ← نموذج ويلكوكسون للاقتران الاسمي — الرتبي

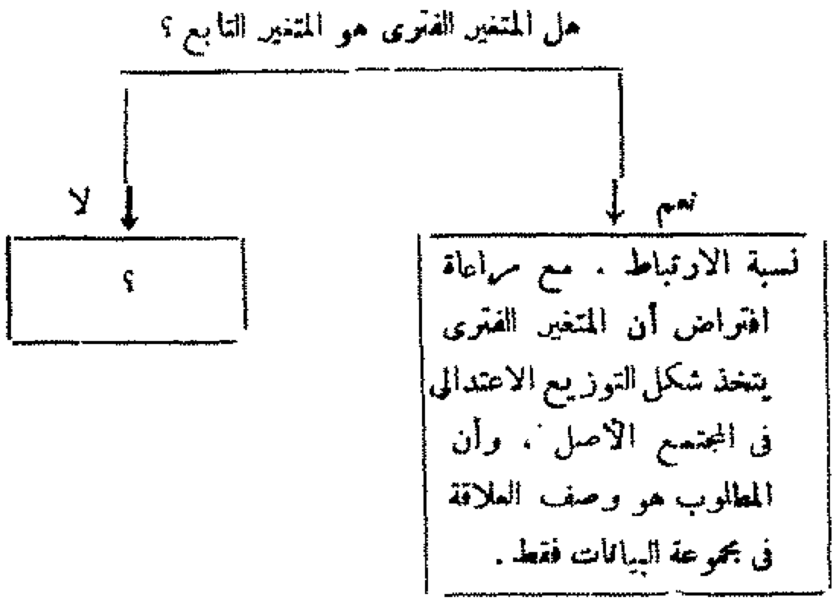
(سادسا) إذا اشتمل البحث على متغيرين أحدهما من النوع الفتري والآخر من النوع الرتبي

هل المطلوب اعتبار المتغير الرتبي متغيراً متصلا يتخذ شكل التوزيع الاعتدالي ؟

نعم ← معامل الارتباط المتعدد المتسلسل الجاسىء

لا ← ؟

(سابعا) إذا اشتمل البحث على متغيرين أحدهما من النوع الفترى والآخر من النوع الاسمى



الباب الثالث

تحليل البيانات المتعددة المتغيرات

الفصل السادس عشر

تحليل الانحدار المتعدد فى حالة المتغيرات الكمية

تحليل الانحدار المتعدد فى حالة وجود متغيرين مستقلين

إيجاد معادلة انحدار ص على $س_1$ ، $س_2$ مأخوذتين معاً

معامل الارتباط المتعدد وتفسيره

فروض الانحدار المتعدد

تحليل الانحدار المتعدد فى حالة وجود ثلاثة متغيرات مستقلة

تحليل الانحدار المتعدد باستخدام الحاسب الالكترونى

التمثيل الهندسى للانحدار المتعدد

تقلص معامل الارتباط المتعدد

مقدمة :

عرضنا فى البابين الأول والثانى طرق تحليل البيانات ذات المتغير الواحد ، والبيانات ذات المتغيرين . ولكن السلوك الإنسانى معقد حقا وليس من البساطة بحيث يعتمد الباحث النفسى والتربوى فى دراسته لظاهرة نفسية أو تربوية معينة على متغير واحد أو متغيرين فقط . إذ أن الباحث يتوقع عادة وجود متغيرات متعددة تؤثر فى ظاهرة نفسية معينة . وإذا أردنا التعبير عن ذلك بأسلوب إحصائى نقول أن تباين المتغيرات التابعة يكون عادة دالة للتغيرات المصاحبة فى كثير من المتغيرات المستقلة التى تتفاعل مع بعضها .

فمثلا ربما يستطيع الباحث التنبؤ بتحصيل الطلاب فى مواد دراسية معينة بمعلومية درجاتهم فى اختبار للذكاء . إلا أنه ربما يستطيع أيضا التنبؤ بتحصيلهم بمعلومية متغيرات أخرى مثل درجاتهم فى التحصيل فى هذه المواد فى أعوام سابقة، أو دافعيتهم للإنجاز والتحصيل، أو بعض سمات شخصياتهم وغير ذلك . فكل من هذه المتغيرات ربما يكون له تأثير على الأداء الأكاديمى للطلاب ، وبالتالى يسهم كل منها بقدر ما فى التنبؤ بهذا الأداء .

وتحليل الانحدار المتعدد يمكن الباحث من تحليل العلاقات بين متغير تابع ومتغيرين مستقلين أو أكثر ، والتنبؤ بقيم المتغير التابع بمعلومية قيم المتغيرات المستقلة . وبالطبع يكون التنبؤ باستخدام المتغيرات المستقلة مجتمعة أفضل من التنبؤ باستخدام أى منها على حدة . بشرط أن يكون الارتباط بين هذه المتغيرات منخفضا ، وارتباط كل منها بالمتغير التابع مرتفعا .

وللانحدار المتعدد جانبان من جوانب تحليل البيانات أحدهما جانب وصفى ، وفيه يكون الاهتمام منصبا على طرق تحليل وتلخيص العلاقة الخطية بين المتغير التابع ومجموعة المتغيرات المستقلة . والآخر جانب استدلالى ، وفيه يكون

الاهتمام منصبا على طرق الاستدلال على العلاقات فى المجتمع الأصل باستخدام البيانات المستمدة من عينة البحث . وبالرغم من الارتباط الوثيق بين الجانبين فى تحليل البيانات ، إلا أنه ربما يكون من المناسب معالجة كل منهما على حدة حتى يتسنى للباحث تصور مفهوم الانحدار المتعدد كأسلوب إحصائى وصفى تحليلى ، وكأسلوب استدلالى تفسيرى يتميز بالعمومية والشمول .

ولذلك فإننا سنقتصر فى هذا الجزء من الكتاب على الجانب الوصفى للانحدار المتعدد ، ونتناول الجانب الاستدلالى للانحدار فى الجزء الثانى من الكتاب الذى يختص بالأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات .

كما سنقتصر فى هذا الباب على مناقشة تحليل الانحدار المتعدد فى حالتى وجود متغيرين مستقلين ، وثلاثة متغيرات مستقلة من النوع الكمى أو النوعى (الكيفى) أى من المستوى الفترى أو الاسمى حتى يتسنى للباحث فهم أساسيات هذا الأسلوب الإحصائى الذى يعتبر نظاما عاما تبنى على أساسه مختلف الأساليب الإحصائية الأخرى مثل تحليل المسارات ، والتحليل العاملى ، وتحليل الدالة التمييزية ، وتحليل الارتباط بين مجموعتين من المتغيرات وغيرها .

ونظراً لأن تحليل المسارات يتناول طرق إيجاد العلاقات التركيبية وتفسير العلاقات المتشابكة التى تشتمل عليها البيانات المتعددة المتغيرات ، وهذا يعتبر من أهم استخدامات تحليل الانحدار المتعدد، فإننا سوف نعرض أيضا فى فصل مستقل من فصول هذا الباب أسلوب تحليل المسارات الذى يعتبر من الأساليب الإحصائية المستحدثة فى تحليل البيانات . وقد أصبح يستخدم بكثرة فى البحوث الاجتماعية والنفسية والتربوية فى الآونة الأخيرة .

تحليل الانحدار المتعدد فى حالة وجود متغيرين مستقلين :

عرضنا فى الفصل الرابع عشر موضوع الانحدار الخطى البسيط لمتغير تابع

(ص) على متغير مستقل واحد (س)، وذكرنا أن معادلة خط انحدار ص على س هي :

$$ص_م = ب_{ص س} س + أ_{ص س} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (١)$$

حيث $ص_م$ ترمز إلى قيم ص المتنبأ بها

، $أ_{ص س}$ ترمز إلى الجزء الذى يقطعه خط الانحـــــدار من محور الصادات .

، $ب_{ص س}$ ترمز إلى ميل خط الانحدار ، ويسمى معامل الانحدار ، أو الوزن التقديرى للمتغير س .

، س ترمز إلى قيم المتغير المستقل .

ويمكن استخدام هذه المعادلة فى التنبؤ أو تقدير قيم ص بمعلومية قيم س .

ولتقدير قيمة كل من الثابتين أ ، ب فى هذه المعادلة ذكرنا أنه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى التى نستطيع عن طريقها تحديد الخط المستقيم الذى يجعل مجموع مربعات الأخطاء الناجمة عن التنبؤ نهاية صغرى . وعندئذ تكون

$$أ_{ص س} = \overline{ص} - ب_{ص س} \overline{س} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (٢)$$

$$، \quad ب_{ص س} = \frac{ن \, مج \, س \, ص - (مج \, س)(مج \, ص)}{ن \, مج \, س^٢ - (مج \, س)^٢} \quad \cdot \quad \cdot \quad (٣)$$

وفى الحقيقة أن تحليل الانحدار المتعدد فى حالة وجود متغيرين مستقلين هو امتداد لتحليل الانحدار الخطى البسيط ، وتنطبق عليه نفس الأفكار الرئيسية فيما عدا أن العمليات الحسابية فى هذه الحالة تكون أكثر مشقة .

فالمعادلة العامة للانحدار فى حالة وجود متغيرين مستقلين هى :

$$ص_م = أ + ب_١ س_١ + ب_٢ س_٢ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٤)$$

حيث $ص_م$ ترمز إلى قيم ص المتنبأ بها بمعلومية المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$.

، $ب_١$ ، $ب_٢$ ترمز إلى معامل الانحدار أو الوزن المقدر لكل من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ على الترتيب .

والصورة المستخدمة لحساب الثابت أ هي امتداد للمعادلة رقم (٢) كالآتي :

$$أ = \overline{ص} - ب_١ \overline{س_١} - ب_٢ \overline{س_٢} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٥)$$

ولإيجاد قيمة كل من أ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى التي سبق استخدامها في حالة الانحدار الخطي البسيط للحصول على ثلاث معادلات تشتمل على أ ، $ب_١$ ، $ب_٢$.

وهذه المعادلات هي :

$$مج س_١ ص = ب_١ مج س_١^٢ + ب_٢ مج س_١ س_٢ + أ مج س_١ \quad . . . . . . (٦)$$

$$، \quad مج س_٢ ص = ب_١ مج س_١ س_٢ + ب_٢ مج س_٢^٢ + أ مج س_٢ \quad . . . . . (٧)$$

$$، \quad مج ص = ب_١ مج س_١ + ب_٢ مج س_٢ + ن أ \quad . . . . (٨)$$

وتسمى هذه المعادلات الثلاث « المعادلات المتادة Normal Equations »

ويمكن اختزال هذه المعادلات إلى معادلتين فقط إذا استخدمنا انحرافات قيم المتغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، ص عن متوسط كل منها . وسنرمز لهذه الانحرافات بالرموز $س_١^\prime$ ، $س_٢^\prime$ ، $ص^\prime$ ، والمعادلتان هما :

$$مج س_١^\prime ص^\prime = ب_١ مج س_١^{\prime 2} + ب_٢ مج س_١^\prime س_٢^\prime \quad . . . . (٩)$$

$$مج س_٢^\prime ص^\prime = ب_١ مج س_١^\prime س_٢^\prime + ب_٢ مج س_٢^{\prime 2} \quad . . . . (١٠)$$

ويمكن حل هاتين المعادلتين آنيا لكي نحصل على قيمة كل من $ب_١$ ، $ب_٢$.

وهما نفس القيمتين اللتين نحصل عليهما من حل المعادلات رقم ٦ ، ٧ ، ٨ ، وبذلك توفر للباحث بعض الجهد والوقت .

وتيسيراً على الباحث يمكنه استخدام المعادلتين الآتيتين مباشرة لإيجاد قيمة كل من $ب_1$ ، $ب_2$ وهما :

$$ب_1 = \frac{(\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{ص})(\text{مج}\ \bar{س}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{س}_2)(\text{مج}\ \bar{س}_2 \bar{ص})}{(\text{مج}\ \bar{س}_1^2)(\text{مج}\ \bar{س}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{س}_2)^2} \quad \ldots\ldots (١١)$$

، $$ب_2 = \frac{(\text{مج}\ \bar{س}_1^2)(\text{مج}\ \bar{س}_2 \bar{ص}) - (\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{س}_2)(\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{ص})}{(\text{مج}\ \bar{س}_1^2)(\text{مج}\ \bar{س}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{س}_2)^2} \quad \ldots\ldots (١٢)$$

حيث : $$\text{مج}\ \bar{س}_1^2 = \text{مج}\ س_1^2 - \frac{(\text{مج}\ س_1)^2}{ن} \quad \ldots\ldots (١٣)$$

، $$\text{مج}\ \bar{س}_2^2 = \text{مج}\ س_2^2 - \frac{(\text{مج}\ س_2)^2}{ن} \quad \ldots\ldots (١٤)$$

، $$\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{س}_2 = \text{مج}\ س_1 س_2 - \frac{(\text{مج}\ س_1)(\text{مج}\ س_2)}{ن} \quad \ldots\ldots (١٥)$$

، $$\text{مج}\ \bar{س}_1 \bar{ص} = \text{مج}\ س_1 ص - \frac{(\text{مج}\ س_1)(\text{مج}\ ص)}{ن} \quad \ldots\ldots (١٦)$$

، $$\text{مج}\ \bar{س}_2 \bar{ص} = \text{مج}\ س_2 ص - \frac{(\text{مج}\ س_2)(\text{مج}\ ص)}{ن} \quad \ldots\ldots (١٧)$$

ولكى نوضح للباحث كيفية تطبيق هذه المعادلات فى حالة وجود متغيرين مستقلين نقدم المثال الآتى :

نفترض أننا أردنا إيجاد معادلة انحدار درجات مجموعة من الطلاب فى مادة الرياضيات فى الصف الأول بالمرحلة الثانوية (المتغير التابع ص) بمعلومية درجاتهم فى أحد اختبارات الاستعداد الرياضى (المتغير المستقل الأول س١) ، ودرجات تحصيلهم فى الرياضيات فى نهاية المرحلة الإعدادية (المتغير المستقل الثانى س٢) . وهذه الدرجات مبينة فى الجدول الآتى (رقم ٩٠) .

ص	س١	س٢	ص	س١	س٢
٢	٢	٥	٤	٤	٣
١	٣	٤	٣	٢	٦
٢	١	٣	٦	٥	٧
١	٤	٣	٦	٦	٥
٥	٤	٤	١٠	٧	٩
٤	٤	٥	٩	٩	٦
٧	٥	٦	٧	١٠	٤
٦	٤	٤	٦	٩	٥
٧	٧	٦	٩	٦	٧
٨	٦	٤	١٠	٤	٩

جدول رقم (٩٠)

فالخطوة الأولى : يوجد مجموع قيم كل من المتغيرات ص ، س١ ، س٢ ، ومتوسط كل منها ، ومجموع مربعات هذه القيم ، ومجموع حواصل ضرب القيم المتناظرة لكل منها مثنى مثنى ، والانحراف المعيارى لكل منها كالآتى :

مج ص = ١١٣ ، $\bar{\text{ص}}$ = ٥,٦٥ ، مج ص^2 = ٧٩٣

مج س_1 = ١٠٣ ، $\bar{\text{س}}_1$ = ٥,١٥ ، مج س_1^2 = ٦٣٧

مج س_2 = ١٠٥ ، $\bar{\text{س}}_2$ = ٥,٢٥ ، مج س_2^2 = ٦١١

مج س_1 ص = ٦٦٥

مج س_2 ص = ٦٦٠

مج $\text{س}_1 \text{س}_2$ = ٥٦٠

الانحراف المعيارى غير المتحيز للمتغير ص $= \sqrt{\frac{\text{مج}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{ن} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\text{١٥٤,٥٥}}{\text{١٩}}}$

= ٢,٨٥٢

، الانحراف المعيارى غير المتحيز للمتغير س_1 $= \sqrt{\frac{\text{مج}(\text{س}_1 - \bar{\text{س}}_1)^2}{\text{ن} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\text{١٠٦,٥٥}}{\text{١٩}}}$

= ٢,٣٦٨

، والانحراف المعيارى غير المتحيز للمتغير س_2 $= \sqrt{\frac{\text{مج}(\text{س}_2 - \bar{\text{س}}_2)^2}{\text{ن} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\text{٥٩,٧٥}}{\text{١٩}}}$

= ١,٧٧٢٣

والخطوة الثانية : يستخدم المعادلات رقم ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ لإيجاد مجموع مربعات انحرافات قيم كل من ص ، س_1 ، س_2 عن متوسط كل منها ، وكذلك مجموع انحرافات حواصل الضرب كالآتى :

$$\text{مجـ }\bar{\text{ص}}^{2} = ٧٩٣ - \frac{(١١٣)^{2}}{٢٠} = ١٥٤,٥٥$$

$$\text{مجـ }\bar{\text{س}}_{1}^{2} = ٦٣٧ - \frac{(١٠٣)^{2}}{٢٠} = ١٠٦,٥٥$$

$$\text{مجـ }\bar{\text{س}}_{2}^{2} = ٦١١ - \frac{(١٠٥)^{2}}{٢٠} = ٥٩,٧٥$$

$$\text{مجـ }\bar{\text{س}}_{1}\,\bar{\text{ص}} = ٦٦٥ - \frac{(١١٣)(١٠٣)}{٢٠} = ٨٣,٠٥$$

$$\text{مجـ }\bar{\text{س}}_{2}\,\bar{\text{ص}} = ٦٦٠ - \frac{(١١٣)(١٠٥)}{٢٠} = ٦٦,٧٥$$

$$\text{مجـ }\bar{\text{س}}_{1}\,\bar{\text{س}}_{2} = ٥٦٠ - \frac{(١٠٥)(١٠٣)}{٢٠} = ١٩,٢٥$$

وجميع هذه المقاييس الإحصائية يتم حسابها بطريقة آلية باستخدام برامج الحاسب الألكترونى الجاهزة . ولكن فى حالة وجود متغيرين مستقلين ربما يحتاج الباحث فقط إلى آلة حاسبة صغيرة لإيجاد قيم هذه المقاييس .

وفى الحقيقة توجد طرق متعددة لحساب هذه المقاييس الإحصائية اللازمة لتحليل الانحدار المتعدد ، ولكننا فضلنا طريقة مجموع المربعات لسهولة حسابها مباشرة من البيانات ، كما أنها تستخدم فى كثير من المقاييس الإحصائية التى سنعرض لها فى الجزء الثانى من الكتاب مثل تحليل التباين ، وتحليل التغاير وغيرهما .

ويمكن تلخيص النتائج التى حصلنا عليها فيما سبق فى الجدول الآتى رقم (٩١) :

	ص	$\text{س}_١$	$\text{س}_٢$
ص	١٥٤,٥٥	٨٣,٠٥	٦٦,٧٥
$\text{س}_١$	(٠,٦٤٧١)	١٠٦,٥٥	١٩,٢٥
$\text{س}_٢$	(٠,٦٩٤٦)	(٠,٢٤١٢)	٥٩,٧٥
الانحراف المعيارى	٢,٨٥٢	٢,٣٦٨	١,٧٧٣٣
المتوسط	٥,٦٥	٥,١٥	٥,٢٥

جدول رقم (٩١)

ملخص نتائج المقاييس الاحصائية اللازمة لتحليل الانحدار المتعدد في حالة وجود متغيرين مستقلين

ونظراً لأن الباحث سوف يحتاج إلى معاملات الارتباط بين كل متغيرين من المتغيرات س ، $\text{س}_١$ ، $\text{س}_٢$ فإنه يمكن أن يحسب هذه المعاملات باستخدام طريقة الدرجات الخام مباشرة كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{س}_١\text{ص}} = \frac{(٢٠)(٦٦٥) - (١٠٣)(١١٣)}{\sqrt{[(٢٠)(٦٣٧) - (١٠٣)^{٢}][(٢٠)(٧٩٣) - (١١٣)^{٢}]}}$$

$$= ٠,٦٤٧١$$

$$\text{ر}_{\text{س}_٢\text{ص}} = \frac{(٢٠)(٦٦٠) - (١٠٣)(١٠٥)}{\sqrt{[(٢٠)(٦١١) - (١٠٥)^{٢}][(٢٠)(٧٩٣) - (١١٣)^{٢}]}}$$

$$= ٠,٦٩٤٦$$

$$\text{ر}_{\text{س}_١\text{س}_٢} = \frac{(٢٠)(٥٦٠) - (١٠٣)(١٠٥)}{\sqrt{[(٢٠)(٦٣٧) - (١٠٣)^{٢}][(٢٠)(٦١١) - (١٠٥)^{٢}]}}$$

$$= ٠,٢٤١٢$$

وهذه القيم مبينة فى خلايا الجدول رقم (٩١) بين قوسين . وقد حسبنا معاملات الارتباط السابقة لأهميتها فى :

١ — إيجاد معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ بعد حساب قيم الثوابت أ ، $ب_١$ ، $ب_٢$. وسوف نستخدم هذه المعادلة فى التنبؤ بتحصيل طالب معين فى الرياضيات فى الصف الأول بالمرحلة الثانوية بمعلومية درجاته فى اختبار الاستعداد الرياضى ، ودرجات تحصيله فى الرياضيات فى نهاية المرحلة الإعدادية .

٢ — معرفة نسبة التباين الكلى لتوزيع المتغير ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ ، أى معرفة العلاقة بين التركيب الخطى Linear Combination للمتغيرين المستقلين والمتغير التابع . ويمكن استخدام مربع معامل الارتباط المتعدد Multiple Correlation الذى سنعرض له بعد قليل للتعبير عن هذه العلاقة .

٣ — معرفة الإسهام النسبى لكل من المتغيرين المستقلين $س_١$، $س_٢$ فى التنبؤ بقيم المتغير التابع ص . وسوف نستخدم الأوزان $ب_١$ ، $ب_٢$ فى إلقاء بعض الضوء على هذا الإسهام .

ولكننا سوف نحتاج إلى مقاييس أخرى أكثر دقة لتفسير هذا الإسهام النسبى بعضها يعتمد على مربع معامل الارتباط المتعدد .

٤ — معرفة الدلالة الإحصائية لمقدار مايسهم به كل من المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$ فى التنبؤ بالمتغير ص . ولكننا سنرجىء هذا الحين مناقشة الأساليب الاستدلالية فى تحليل البيانات فى الجزء الثانى من الكتاب .

إيجاد معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ معاً :

لإيجاد معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ فى المثال السابق يجب أن نستعين بالمقاييس الإحصائية التى تم حسابها لإيجاد قيمة كل من $ب_١$ ، $ب_٢$ باستخدام المعادلتين ١١ ، ١٢ كالآتى :

$$ب_١ = \frac{(٦٦,٧٥)(١٩,٢٥) - (٥٩,٧٥)(٨٣,٠٥)}{{}^{٢}(١٩,٢٥) - (٥٩,٧٥)(١٠٦,٥٥)}$$

$$= ٠,٦١٢٣$$

$$، \quad ب_٢ = \frac{(٨٣,٠٥)(١٩,٢٥) - (٦٦,٧٥)(١٠٦,٥٥)}{{}^{٢}(١٩,٢٥) - (٥٩,٧٥)(١٠٦,٥٥)}$$

$$= ٠,٩١٩٥$$

ويمكن إيجاد قيمة أ باستخدام المعادلة رقم (٥) كالآتى :

$$أ = ٥,٦٥ - (٠,٦١٢٣)(٥,١٥) - (٠,٩١٩٥)(٥,٢٥)$$

$$= - ٢,٢٣٥٩$$

وبذلك تكون معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ هى :

$$ص_م = - ٢,٢٢٥٩ + ٠,٦١٢٣ \, س_١ + ٠,٩١٩٥ \, س_٢$$

وإذا نظرنا إلى الجدول رقم (٩٠) نجد أن قيمة ص الفعلية المقابلة لقيمة $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٥$ تساوى ٢ ، فى حين أن القيمة المتنبأ بها والتى حصلنا عليها من معادلة الانحدار تساوى ٣,٤٨٨٠ . وبذلك يكون الفرق ف بين القيمتين هو — ١,٤٨٨٢ ، وهذا الفرق يعبر عن خطأ التنبؤ أو ما يسمى ببواقى التنبؤ — Residual ، وهو يساوى (ص — $ص_م$) .

ويمكن الحصول على مقدار أخطاء التنبؤ أو البواقي لجميع قيم ص المبينة في جدول رقم (٩٠) . وهذه الأخطاء أو البواقي مبينة في الجدول الآتي رقم (٩٢)، وكذلك مربع هذه البواقي ، وقيم ص المتنبأ بها أي صم ، ومربعات هذه القيم ، وحواصل ضرب قيم ص في صم .

وسوف تفيد هذه القيم في حساب قيمة معامل الارتباط المتعدد .

ص	$س_1$	$س_2$	$ص_م = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2$	$ف = ص - ص_م$
٢	٢	٥	٣,٤٨٨٢	١,٤٨٨٢ —
١	٣	٤	٣,١٨٢٠	٢,١٨٢ —
٢	١	٣	١,٠٣٥٩	٠,٩٦٤١
١	٤	٣	٢,٨٧٥٨	١,٨٧٥٨ —
٥	٤	٤	٣,٧٩٥٣	١,٢٠٤٧
٤	٤	٥	٤,٧١٤٨	٠,٧١٤٨ —
٧	٥	٦	٦,٢٤٧٦	٠,٧٥٢٤
٦	٤	٤	٣,٧٩٥٣	٢,٢٠٤٧
٧	٧	٦	٧,٤٧٤٣	٠,٤٧٤٢ —
٨	٦	٤	٥,٠٢١٩	٢,٩٧٨١
٤	٤	٣	٥,٨٧٥٨	١,١٢٤٢
٣	٣	٦	٥,٠٢١٠	٢,٠٢١٠ —
٦	٥	٧	٧,١٦٧١	١,١٦٧١ —
٦	٦	٥	٥,٩٤١٤	٠,٠٥٨٦
١٠	٧	٩	١٠,٢٣٢٧	٠,٢٣٢٧ —
٩	٩	٦	٨,٧٠٠٨	٠,٢٩٩٢
٧	١٠	٤	٧,٤٧٥١	٠,٤٧٥٠ —
٦	٩	٥	٧,٧٨١٣	١,٧٨١٣ —
٩	٦	٧	٧,٧٨٠٤	٢,٢١٩٦
١٠	٤	٩	٨,٣٩٢٨	١,٦٠٧٢
مجموع ١١٣	١٠٣	١٠٥		

جدول رقم (٩٢)

بواقى قيم ص ، ومربع البواقى ، ومربع قيم ص ، وحاصل ضرب ص × صم

ف٢	ص٢م	ص × صم
٢,٢١٤٧	١٢,١٦٧٥	٦,٩٧٦٤
٤,٧٦١١	١٠,١٢٥١	٣,١٨٢٠
٠,٩٢٩٥	١,٠٧٣١	٢,٠٧١٨
٣,٥١٨٦	٨,٢٧٠٢	٢,٨٧٥٨
١,٤٥١٣	١٤,٤٠٤٣	١٨,٩٧٦٥
٠,٥١٠٩	٢٢,٢٢٩٣	١٨,٨٥٩٢
٠,٥٦٦١	٣٩,٠٣٢٥	٤٣.٧٣٣٢
٤,٨٧٠٦	١٤,٤٠٤٣	٢٢,٧٧١٨
٠,٢٢٩٩	٥٥,٨٦٣٧	٥٢,٣١٩٤
٨,٨٦٩١	٢٥,٢١٩٥	٤٠,١٧٥٢
١,٢١١٨	٨,٢٧٠٢	١١,٥٠٣٢
٤,٠٨٩٤	٢٥,٢١٠٤	١٥,٠٦٣٠
١,٣٦٢١	٥١,٣٧٦٣	٤٣,٠٠٢٦
٠,٠٠٣٩	٣٥,٢٠٠٢	٣٥,٦٩٨٤
٠,٠٥٤١	٠٤,٧٠٨١	١٠٢,٣٢٧٠
٠,٠٨٩٥	١٧٥,٧٠٣٩	٧٨,٣٠٧٢
٠,٢٢٥٦	٥٥,٨٧٧١	٥٢,٣٢٥٧
٣,١٧٣٠	٦٠,٥٩٨٦	٤٦,٦٨٧٨
١,٤٨٧٤	٦٠,٥٣٩٦	٧٠,٠٢٣٦
٢,٥٨٣١	٧٠,٩٣٩١	٨٣,٩٢٨٠
٤٢,٢٥٢٧	٧٥١,٣١٣٠	٧٥٠,٧٥٧٨

وينبغي أن نلاحظ من هذا الجدول أن نصف عدد الفروق (ف) موجب والنصف الآخر سالب ، كما أن معظم هذه الفروق ضئيلة ، وهذا بالطبع ما يجب أن يكون . فقيم أ ، ب$_1$ ، ب$_2$ التي سبق أن حصلنا عليها تحقق قاعدة المربعات الصغرى ، أي أن هذه القيم تجعل مربع الفروق (ف^2) أقل ما يمكن . فمجموع الفروق أي مج ف = صفر ، بينما مج ف^2 = ٤٢,٢٥٣٧ . ويسمى هذا المقدار « مجموع مربعات البواقي » . أي أن مجموع مربعات البواقي يدل على الجزء من المجموع الكلي للمربعات الخاص بالمتغير ص الذي لا نستطيع أن نرجعه أو ننسبه إلى الانحدار .

وفي الحقيقة يمكن أن يحصل الباحث على مجموع مربعات البواقي مباشرة دون الحاجة إلى حساب جميع المقاييس الإحصائية التي قدمناها .

والسبب في عرضنا لها هو توضيح أهمية مفهوم « مجموع المربعات Sum of Squares» في التحليل الإحصائي للانحـــدار المتعدد ، وأهميته في التحليلات الإحصائية الأخرى كما سنرى فيما بعد .

ويمكن حساب مجموع المربعات الخاصة بالانحدار باستخدام المعادلة الآتية :

مجموع مربعات الانحدار = ب$_1$ مج سَ$_1$ صَ + ب$_2$ مج سَ$_2$ صَ ..... (١٨)

وبالتعويض عن قيم ب$_1$ ، ب$_2$ ، مج سَ$_1$ صَ ، مج سَ$_2$ صَ من البيانات الموضحة في المثال السابق نجد أن :

مجموع مربعات الانحدار = (٠,٦١٣٣) (٨٣,٠٥) +
= (٠,٩١٩٥) (٦٦,٧٥)
= ١١٢,٣١١٢

وهذا الناتج يدل على الجزء من المجموع الكلي للمربعات الخاص بالمتغير ص الذي يمكن أن ينسب أو يرجع إلى انحدار ص على س$_1$ ، س$_2$.

وقد وجدنا فيما سبق أن المجموع الكلى للمربعات الخاص بالمتغير ص
= ١٥٤,٥٥ .

فإذا أضفنا مجموع المربعات الخاص بالانحدار إلى مجموع مربعات البواقى ، فإننا نحصل على المجموع الكلى للمربعات الخاص بالمتغير ص .

أى أن : $مم_{ص} = مم_{انحدار} + مم_{بواقى}$

$= ١١٢,٣١١٢ + ٤٢,٢٥٣٧$

$= ١٥٤,٥٦٤٩$

وهذه تساوى تقريباً مجموع مربعات ص التى حصلنا عليها فيما سبق وهو ١٥٤,٥٥ .

معامل الارتباط المتعدد :

Multiple Cerrelation

يعتبر معامل الارتباط المتعدد من المقاييس الإحصائية الأساسية التى تستخدم فى تحليل الانحدار المتعدد . ويدل معامل الارتباط المتعدد على درجة العلاقة القائمة بين متغير تابع ومتغيرين مستقلين أو أكثر . ويعتمد معامل الارتباط المتعدد على الارتباطات الداخلية بين المتغيرات المستقلة من ناحية ، وارتباطات المتغيرات المستقلة بالمتغير التابع من ناحية أخرى . ويعتبر مربع معامل الارتباط المتعدد من المقاييس الإحصائية الهامة فى تفسير الانحدار . وسوف نرمز لمعامل الارتباط المتعدد بالرمز $ر_{م}$ ، ومربعه $ر^{٢}_{م}$.

وإحدى الصور البسيطة التى يمكن استخدامها لإيجاد قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد والتى تعتمد على مجموع المربعات الخاص بالانحدار (سنرمز له بالرمز $مم_{انحدار}$) ، والمجموع الكلى للمربعات الخاص بالمتغير ص (سنرمز له بالرمز $مم_{ص}$) هى :

$$ر^{٢}_{م} = \frac{مم\ انحدار}{مم\ ص} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (١٩)$$

ويمكن الحصول على معامل الارتباط المتعدد ($ر_{م}$) باستخراج الجذر التربيعى للطرف الأيسر من الصورة رقم (١٩) .

فإذا طبقنا هذه الصورة على البيانات المستمدة من المثال السابق نجد أن :

$$ر^{٢}_{م} = \frac{١١٢,٣١١٢}{١٥٤,٥٥} = ٠,٧٢٦٧$$

$$\text{أى أن : } ر_{م} = \sqrt{٠,٧٢٦٧} = ٠,٨٥٢٥$$

وينبغى أن يلاحظ الباحث أن معامل الارتباط المتعدد هو معامل ارتباط بيرسون بين قيم المتغير التابع ص ، وقيم $ص_{م}$ المتنبأ بها والتى تعتبر تركيبا خطيا للمتغيرين $س_{١}$ ، $س_{٢}$.

ويمكن استخدام صورة معامل ارتباط بيرسون رقم (٣) التى عرضنا لها فى الفصل السابع فى التوصل إلى صورة مماثلة لحساب قيمة معامل الارتباط المتعدد وهى :

$$ر^{٢}_{م} = \frac{(مج\ صَ\ صَ_{م})^{٢}}{مج\ صَ^{٢}\ مج\ صَ^{٢}_{م}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٢٠)$$

$$\text{أى أن : } ر_{م} = \frac{مج\ صَ\ صَ_{م}}{\sqrt{مج\ صَ^{٢}\ مج\ صَ^{٢}_{م}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (٢١)$$

ويمكن الحصول على قيم مج صَ صَم ، مج صَ٢ ، مج صَ٢م باستخدام القيم المبينة فى أعمدة الجدول رقم (٩٢) .

$$\text{مج } \bar{\text{ص}}^{2}_{\text{م}} = \text{مج ص}^{2}_{\text{م}} - \frac{(\text{مج ص}_{\text{م}})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= ٧٥٠{,}٧٤٩١ - \frac{(١١٣)^{2}}{٢٠}$$

$$= ١١٢{,}٢٩٩١$$

$$\text{، مج } \bar{\text{ص}}\,\bar{\text{ص}}_{\text{م}} = \text{مج ص ص}_{\text{م}} - \frac{(\text{مج ص})(\text{مج ص}_{\text{م}})}{\text{ن}}$$

$$= ٧٥٠{,}٧٥٧٨ - \frac{(١١٣)\ (١١٣)}{٢٠}$$

$$= ١١٢{,}٣٠٧٨$$

وينبغى ملاحظة أن مج صَ٢م يجب أن يكون مساويا مج صَ صَم على وجه التقريب ، فالفرق هنا يساوى ٠,٠٠٨٨ .

وقد سبق أن وجدنا قيمة مج صَ٢ = ١٥٤,٥٥ .

وبالتعويض فى الصورة رقم (٢١) نجد أن :

$$\text{ر}_{\text{م}} = \frac{١١٢{,}٣٠٧٨}{\sqrt{(١١٢{,}٢٩٩٠)(١٥٤{,}٥٥)}}$$

$$= ٠{,}٨٥٢٥$$

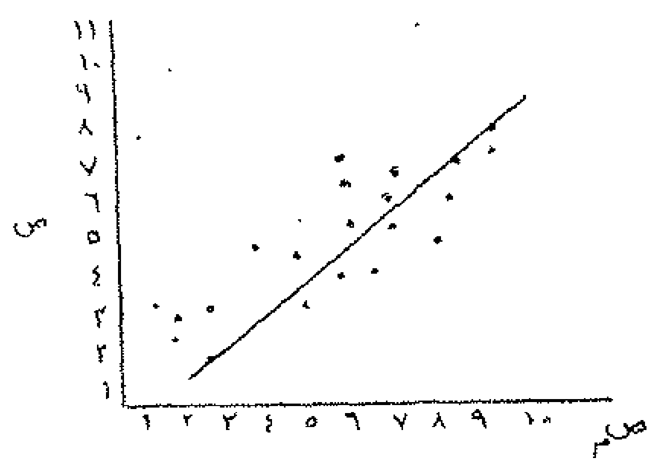
، $ر^2_م = (٠,٨٥٢٥)^2 = ٠,٧٢٦٧$

وهى تساوى القيمة التى حصلنا عليها باستخدام المعادلة رقم (١٩) .

ونظراً لأن $ر_م$ هو معامل الارتباط الخطى المتعدد بين المتغير ص والمتغيرين $س_1$ ، $س_2$ ، وأن $ص_م$ هى قيم ص المتنبأ بها بعد أخذ تأثير كل من المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ على المتغير ص فى الاعتبار ، لذلك فإن معامل الارتباط بين ص ، $ص_م$ يساوى معامل الارتباط الخطى المتعدد بين المتغير ص والمتغيرين $س_1$ ، $س_2$ معاً .

تفسير معامل الارتباط المتعدد :

لتوضيح مفهوم معامل الارتباط المتعدد وطبيعة الانحدار المتعدد ربما يكون من الأفضل تمثيل العلاقة بين قيم المتغير ص ، وقيم $ص_م$ المتنبأ بها فى المثال السابق والموضحة بجدول رقم (٩٢) تمثيلا بيانياً فى الشكل الآتى رقم (٦٦) :



شكل رقم (٦٦)

تمثيل العلاقة بين قيم المتغير ص ، وقيم $ص_م$ المتنبأ بها فى المثال السابق

وهذا الشكل يشبه الشكل الانتشارى للمتغيرين س ، ص الذى عرضنا له عند مناقشتنا للانحدار الخطى البسيط ، غير أننا فى هذه الحالة مثلنا المتغير صم على المحور الأفقى ، والمتغير ص على المحور الرأسى .

وفى الحقيقة يمكننا اعتبار المتغير صم (المتغير المستقل فى هذه الحالة) هو الانحدار المركب من كل من المتغيرين المستقلين س١ ، س٢ بدلا من س فى حالة الانحدار الخطى البسيط .

ونظراً لأن معامل الارتباط المتعدد فى هذا المثال يساوى ٫٨٠٢٥ وهى قيمة مرتفعة ، لذلك فإننا نلاحظ أن النقط الممثلة لكل من ص ، صم تتراكم بصورة واضحة حول خط الانحدار . فمعامل الارتباط المتعدد والذى سنرمز له بطريقة أخرى بالرمز رص.١٢ أى الارتباط بين المتغير التابع ص، والمتغيرين المستقلين س١ ، س٢ معا ، هو تعبير رمزى لما يمثله الشكل البيانى رقم (٦٦) .

فكلما زاد تراكم النقط حول خط الانحدار دل ذلك على ارتفاع قيمة معامل الارتباط المتعدد . ويجب أن يلاحظ الباحث أنه يمكنه رسم خط الانحدار بتوصيل النقطة المناظرة لقيمة أ (الجزء المقطوع من محور الصادات) وهى فى هذه الحالة = — ٢,٣٣٥٩ ، بنقطة تقاطع متوسط كل من ص ، صم وهما ، ٥,٦٥ ، ٥,٦٥ . فإذا وقعت جميع النقط على خط الانحدار ، يكون معامل الارتباط المتعدد مساويا الواحد الصحيح . أما إذا انتشرت النقط بطريقة عشوائية حول خط الانحدار كان معنى هذا أن معامل الارتباط المتعدد يقترب من الصفر .

وبمعنى آخر يشير معامل الارتباط المتعدد وبخاصة مربع هذا المعامل إلى مقدار أو درجة العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س١ ، س٢ معا . ويمكن تفسير مربع هذا المعامل فى ضوء مفهوم التباين المشترك الذى عرضنا

له فى الفصل الرابع عشر . فى المثال السابق وجدنا أن $ر^٢_م$ = ٠,٧٢٩٧ ، وهذا يعنى أن ٧٢,٦٧٪ من تباين المتغير ص يرجـــــع إلى أو يمكن تفسيره بالمتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ معا .

وهنا يجب أن يلاحظ الباحث أنه يمكن أن تطلق على مربع معامل الارتباط المتعدد اسم «معامل التحديد» كما هو الحال عند تربيع مربع ارتباط حاصل ضرب العزوم لبيرسون . إلا أن قيم معامل الارتباط المتعدد ($ر_م$) تتراوح بين صفر ، ١ ، فى حين أن قيم معامل ارتباط بيرسون تتراوح بين — ١ ، + ١ بما فى ذلك الصفر .

ففى هذا المثال نستطيع القول بأن ٧٢,٦٧٪ من التباين الكلى لتوزيع درجات اختبار الرياضيات فى نهاية الصف الأول لمجموعة الطلاب يمكن تفسيره بمعلومية التركيب الخطى للمتغيرين المستقلين ، وهما درجات اختبار الاستعداد الرياضى ، ودرجات اختبار الرياضيات فى نهاية المرحلة الإعدادية .

وبهذا نكون قد ألقينا الضوء على المشكلة الثانية التى ذكرناها فيما سبق ، وهى مشكلة معرفة نسبة التباين الكلى لتوزيع المتغير ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ معا .

الإسهام النسبى لكل من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ فى التنبؤ بقيم المتغير ص :

والآن نود أن نلقى بعض الضوء على مشكلة إسهام كل من المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$ فى التنبؤ بقيم المتغير التابع ص وهى المشكلة الثالثة التى ذكرناها فيما سبق .

وفى الحقيقة تختلف طرق مواجهة هذه المشكلة . فالاعتماد على قيم معاملى الانحدار أى الاوزان $ب_١$ ، $ب_٢$ لا يجعل التفسير واضحا فى تحليل الانحدار المتعدد . ومع هذا فإننا سوف نبدأ بهذا التفسير ثم نعرض بعد ذلك تفسيراً أكثر دقة باستخدام طريقة أخرى .

فقد سبق أن ذكرنا في الفصل الرابع عشر عند عرضنا للانحدار الخطي البسيط أن معامل الانحدار ب في معادلة الانحدار $ص_م$ = أ + ب س يعني أنه إذا تغيرت س بقدر الوحدة تتغير ص بقدر ب من الوحدات ، وأطلقنا على الرمز ب اسم « ميل خط الانحدار Regression Slope ».

ولكن الأمر يكون أكثر تعقيداً في حالة الانحدار المتعدد نظراً لوجود أكثر من معامل انحدار واحد . ففي حالة وجود متغيرين مستقلين يصبح لدينا معاملا انحدار $ب_1$ ، $ب_2$. وكلما زاد عدد المتغيرات المستقلة زاد تبعاً لذلك عدد معاملات الانحدار بنفس القدر .

ومشكلة تفسير الأهمية النسبية لكل من المتغيرين المستقلين $س_1$ ، $س_2$ في التنبؤ بقيم المتغير التابع ص باستخدام قيمة كل من $ب_1$ ، $ب_2$ تكون معضلة إلى حد كبير . والسبب في ذلك أن هذه القيم تعتمد على ترتيب إدخال المتغيرين المستقلين في معادلة الانحدار . فإذا أدخلنا $س_1$ أولا يليها $س_2$ كما هو الحال في المثال السابق فإن قيمة كل من $ب_1$ ، $ب_2$ تساوي ٠,٦١٣٣ ، ٠,٩١٩٥ على الترتيب كما رأينا فيما سبق .

وإذا كان ميزان قيم المتغير $س_1$ هو نفس ميزان قيم المتغير $س_2$ أو هو نفسه تقريبا ، بمعنى أن تكون قيم كل من المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ متساوية تقريبا ، كما هو الحال في المثال السابق - إذ تتراوح قيم كل من المتغيرين بين ١ ، ١٠ - فإنه يمكن اعتبار قيمة كل من $ب_1$ ، $ب_2$ تدل على الأهمية النسبية لكل من المتغيرين $س_1$ ، $س_2$. أي أن المتغير $س_2$ في هذه الحالة يسهم بقدر أكبر من إسهام المتغير $س_1$ في التنبؤ بقيم المتغير ص .

ولكن تزداد المشكلة تعقيداً إذا علمنا أن تغيير ترتيب إدخال المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ في معادلة الانحدار يؤدي إلى تغيير قيمة كل من معاملي الانحدار $ب_1$ ، $ب_2$ ، إذ ربما تصبح قيمة $ب_1$ أكبر من قيمة $ب_2$ وبذلك ينعكس التفسير .

ومن هنا فإن الاعتماد على قيم معاملات الانحدار فى تفسير الأهمية النسبية للمتغيرات المستقلة فى التنبؤ بالمتغير التابع يكون مضللا . ولذلك فإننا سنعرض طريقة أخرى تساعد على هذا التفسير بدرجة أكثر دقة من الطريقة السابقة .

طريقة حساب انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ كل على حدة :

نظراً لأن إسهام كل من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ فى التنبؤ بقيم المتغير التابع ص يختلف عن إسهام المتغيرين معا فى هذا التنبؤ ، فإن الباحث يجب عليه أن يبحث عن نسبة تباين المتغير ص الذى يمكن تفسيره إذا أضيف المتغير المستقل $س_١$ أو $س_٢$ إلى معادلة الانحدار . فالهدف الرئيسى من إضافة متغيرات مستقلة غير مرتبطة بعضها ببعض — أو ترتبط فيما بينها ارتباطا منخفضا — إلى معادلة الانحدار هو زيادة دقة التنبؤ وإمكانية تفسير أكبر قدر من تباين المتغير التابع . أو بمعنى آخر يكون الهدف من إضافة متغير مستقل جديد فى معادلة الانحدار هو خفض مجموع مربعات البواقى .

فالتباين الكلى للتغير ص لا يختلف بإضافة أو استبعاد أى من المتغيرات المستقلة . وإضافة مجموع المربعات الخاص بالانحدار إلى مجموع مربعات البواقى يساوى دائما المجموع الكلى للمربعات .

ولذلك فإننا نبدأ بإيجاد الانحدار الخطى البسيط للمتغير ص على المتغير المستقل الأول $س_١$ ، ونحسب قيمة كل من $ب_١$ ، $م^٢$ انحدار ، $م^٢$ بواقى .

فلإيجاد $ب_١$ نستخدم الصورة الآتية التى سبق أن استخدمناها فى الفصل الرابع عشر .

$$ب_١ = \frac{مج\ \bar{س}_١ \bar{ص}}{مج\ \bar{س}_١^٢}$$

وبالتعويض من البيانات التى حصلنا عليها فى المثال السابق نجد أن :

$$\text{ب}_1 = \frac{٨٣,٠٥}{١٠٦,٥٥} = ٠,٧٧٩$$

$$\text{مم انحدار} = \frac{(\text{مجـ س}'_1\,\text{ص}')^2}{\text{مجـ س}'^2_1}$$

$$= \frac{(٨٣,٠٥)^2}{١٠٦,٥٥} = ٦٤,٧٣$$

$$\text{مم بواق} = ١٥٤,٥٥ - ٦٤,٧٣$$

$$= ٨٩,٨٢ .$$

ثم نحسب مربع معامل الارتباط بين المتغير التابع ص والمتغير المستقل س_1 باستخدام الصورة الآتية :

$$\text{ر}^2_{\text{ص}.١} = \frac{\text{مم انحدار}}{\text{مم ص}}$$

$$= \frac{٦٤,٧٣}{١٥٤,٥٥} = ٠,٤١٨٨$$

وبذلك تكون $\text{ر}_{\text{ص}.١} = \sqrt{٠,٤١٨٨} = ٠,٦٤٧٢$

أى أن ٤١,٨٨٪ من تباين المتغير ص وهو درجات اختبار الرياضيات فى الصف الأول الثانوى يمكن تفسيره بمعلومية درجات اختبار الاستعداد الرياضى .

ويجب أن يلاحظ الباحث أن معامل الارتباط ر بين ص ، س_1 كما هو مبين بالجدول رقم (٩١) السابق يساوى ٠,٦٤٧١ ، $\text{ر}^2 = (٠,٦٤٧٢)^2 = ٠,٤٢$ تقريبا .

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام مقاييس الانحدار المتعدد . أى أنه يمكننا اعتبار أن معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين والانحدار الخطى البسيط حالتان خاصتان من معامل الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد .

والخطوة التالية هى أن نوجد انحدار المتغير التابع ص على المتغير المستقل الثانى $س_٢$ كالآتى :

$$ب_٢ = \frac{مج\ \bar{س}_٢\ \bar{ص}}{مج\ \bar{س}_٢^٢}$$

$$= \frac{٦٦,٧٥}{٥٩,٧٥} = ١,١٢$$

$$م م\ انحدار = \frac{(مج\ \bar{س}_٢\ \bar{ص})^٢}{مج\ \bar{س}_٢^٢}$$

$$= \frac{(٦٦,٧٥)^٢}{٥٩,٧٥} = ٧٤,٥٧$$

$$م م\ بواقى = ١٥٤,٥٥ - ٧٤,٥٧ = ٧٩,٩٨$$

ثم نحسب مربع معامل الارتباط بين المتغير ص ، والمتغير $س_٢$ كالآتى :

$$ر^٢_{ص.٢} = \frac{م م\ انحدار}{م م\ ص}$$

$$= \frac{٧٤,٥٧}{١٥٤,٥٥} = ٠,٤٨٢٥$$

وبذلك تكون $ر_{ص.٢٠} = \sqrt{٠,٤٨٢٥} = ٠,٦٩٤٦$.

وهي نفس القيمة المبينة في الجدول رقم ٩١ .

أي أن ٤٨,٢٥٪ من تباين المتغير ص يمكن تفسيره بمعلومية المتغير $س_٢$ وهو درجات اختبار الرياضيات في نهاية المرحلة الإعدادية .

ومن هذا يتضح أن كلا من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ يسهم على حدة بقدر متساو تقريبا في تباين المتغير ص . ولكن يجب معرفة الدلالة الإحصائية لهذا الإسهام ، بمعنى هل هذا الإسهام يرجع إلى محض صدفة أم هو إسهام حقيقي ؟ وإجابة هذا السؤال تحتاج من الباحث الرجوع إلى الأساليب الاستدلالية في تحليل البيانات وهو ماسنهتم به في الجزء الثاني من الكتاب .

والآن ربما نود معرفة هل إضافة المتغير $س_٢$ إلى المتغير $س_١$ في معادلة الانحدار قد أسهمت في زيادة قدرتنا على التنبؤ بالمتغير التابع ص ؟

ويمكن الإجابة على ذلك بالاستعانة بقيمة كل من $ر^٢_{ص.٢١}$ ، $ر^٢_{ص.١٠}$

فإذا طرحنا $ر^٢_{ص.١٠}$ من $ر^٢_{ص.٢١٠}$ نحصل على الجزء من التباين الذي أسهم به المتغير $س_٢$ في التنبؤ .

$$\text{أي أن } ر^٢_{ص.٢٠} = ر^٢_{ص.٢١٠} - ر^٢_{ص.١٠}$$

$$= ٠,٧٢٦٧ - ٠,٤١٨٨$$

$$= ٠,٢٠٧٩$$

أي أن المتغير $س_٢$ أسهم بنسبة ٣٠,٧٩ ٪ في تباين المتغير ص عند إضافته إلى المتغير $س_١$ في معادلة الانحدار ، وهي بالطبع نسبة كبيرة . ويجب هنا أيضا أن نختبر الدلالة الإحصائية لهذه الإضافة .

وينبغي أن يلاحظ الباحث أنه عندما حسبنا $ر^٢_{ص.١}$ من انحدار ص على $س_١$ فقط وجدنا أن $ر^٢_{ص.١}$ = ٠,٤١٨٨ بينما انخفضت هـذه القيمة إلى ٠,٣٠٧٩ بعد إضافة المتغير المستقل $س_٢$ إلى المتغير المستقل $س_١$ في معادلة الانحدار .

ويمكن تلخيص مجموع المربعات الخاص بالمتغير ص ، ومجموع مربعات البواقي في حالة استخدام المتغير $س_١$ بمفرده ، وفي حالة إضافة المتغير $س_٢$ إلى المتغير $س_١$ في معادلة الانحدار في الجدول الآتي رقم (٩٣) :

س	مم ص	مم انحدار	مم بواقي	مقدار النقص الذي حدث في مم بواقي
المتغير $س_١$	١٥٤,٥٥	٦٤,٧٣	٨٩,٨٢	
المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$	١٥٤,٥٥	١١٢,٣١	٤٢,٢٥	٤٧,٥٧

جدول رقم (٩٣)

ويتضح من هذا الجدول أن إضافة المتغير $س_٢$ إلى المتغير $س_١$ في معادلة الانحدار أدى إلى خفض مجموع مربعات البواقي بقدر ٤٧,٥٧ ، أو بمعنى آخر زيادة مجموع المربعات الخاص بالانحدار من ٦٤,٧٣ إلى ١١٢,٣١ أي بقدر ٤٧,٥٨ ، وهذا يعادل $\frac{٤٧,٥٨}{١٥٤,٥٥}$ أي حوالي ٠,٣١ كما بينا فيما سبق .

وبوجه عام إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات المستقلة $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ك$ التي يمكن باستخدامها تفسير التباين الكلي للمتغير التابع ص ، فإننا سوف نجد في هذه الحالة أن $ر^٢_{ص.١٢٣...ك}$ = ١ ، وعندئذ يساوي

كل من مجموع المربعات الخاص بالانحدار والمجموع الكلي للمربعات وهو ١٥٤,٥٥ ، ويصبح مجموع مربعات البواقي صفراً . ولكن نظراً لأننا لم نستخدم في المثال السابق هذه المتغيرات المستقلة جميعا ، وإنما استخدمنا متغيرين فقط هما $س_1$ ، $س_2$ ، فقد وجدنا أن مجموع المربعات الخاص بانحدار ص على $س_1$ فقط يساوي ٦٤,٧٢ ، ونسبة تباين المتغير التابع $= \frac{٦٤,٧٣}{١٥٤,٥٥} = ٠,٤١٨٨$

ومجموع المربعات الخاص بانحدار ص على $س_1$ ، $س_2$ معا يساوي ١١٢,٣١١٢ ،

ونسبة تباين المتغير التابع $= \frac{١١٢,٣١١٢}{١٥٤,٥٥} = ٠,٧٢٦٧$

والمقداران ٠,٤١٨٨ ، ٠,٧٢٦٧ هما قيمتا $ر^2_{ص.١}$ ، $ر^2_{ص.٢١}$.

وينبغي أن يلاحظ الباحث أن إضافة متغير مستقل في حالة وجود متغير مستقل آخر في معادلة الانحدار المتعدد بغرض زيادة التنبؤ بمتغير تابع لا يضيف عادة قدرا كبيرا إلى مربع معامل الارتباط المتعدد ($ر^2_م$) وذلك لأن معظم المتغيرات المستقلة المستخدمة في البحوث النفسية والتربوية تكون مرتبطة فيما بينها . أما إذا كانت قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_1$ ، $س_2$ = صفرا فإنه يمكننا في هذه الحالة إضافة مربع معامل الارتباط بين $س_1$ ، ص لكي نحصل على $ر^2_{ص.٢١}$. أي أننا نستطيع في هذه الحالة اعتبار أن :

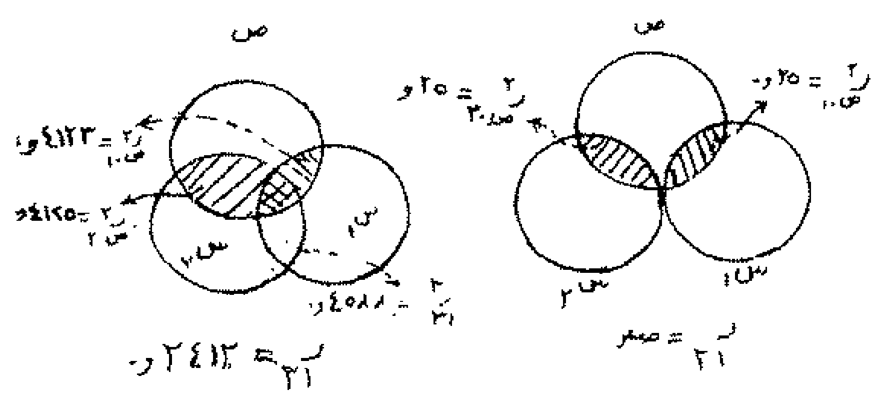
$$ر^2_{ص.٢١} = ر^2_{ص.١} + ر^2_{ص.٢}$$

وبالطبع يندر وجود مثل هذه الحالة في البحوث النفسية والتربوية . ولذلك كلما زاد الارتباط بين المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ قل إسهام المتغير $س_2$ في التنبؤ بالمتغير التابع ص على افتراض أن المتغير المستقل $س_1$ قد أسهم بقدر ما في هذا التنبؤ .

فإذا أضاف الباحث متغيرا ثالثا وليكن $س_٣$ ، وكان مرتبطاً ارتباطا مرتفعا بكل من المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٣$ يقل إسهام هذا المتغير فى التنبؤ بالرغم من أنه ربما يكون ارتباطه بالمتغير التابع مرتفعا .

ولكن وجدنا فى المثال السابق أن الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$ يساوى ٠,٢٤١٢ كما هو مبين فى الجدول رقم (٩١) ، وهى قيمة منخفضة إلى حد ما . وقد أسهم المتغير $س_٢$ فى التنبؤ بدرجات التحصيل بقدر مساو تقريبا لإسهام المتغير $س_١$.

ويمكن توضيح هذه النتائج | بالشكل الآتى رقم (٦٧) المأخوذ عن كيرلنجر



شكل رقم (٦٧)

تمثيل تباين المتغيرات ص ، $س_١$ ، $س_٢$ فى الحالتين

$ر_{٢١}$ = صفر ، $ر_{٢١}$ = ٠,٢٤١٢

ويتضح من هذا الشكل أنه يمكن تمثيل تباين كل من المتغيرات ص ، $س_١$ ، $س_٢$ بدائرة .

وفى الشكل الأيمن معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$ = صفر ،

$ر_{ص.١} = ٠,٥٠$ ، $ر_{ص.٢} = ٠,٥٠$ ، وبتربيع قيمة كل من $ر_{ص.١}$ ، $ر_{ص.٢}$ وجمع الناتجين نحصل على تباين المتغير ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ معا . أى أن :

$$ر^{٢}_{ص.١٢} = ٠,٢٥ + ٠,٢٥ = ٠,٥٠$$

أما الشكل الأيسر فهو يلخص نتائج المثال الذى عرضنا له فى هذا الفصل حيث $ر_{١٢} = ٠,٢٤١٢$ وهو الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$. ويمثل الجزء الناتج من تقاطع الدائرتين $س_١$ ، $س_٢$ مربع هذا الارتباط . ولكننا لا نستطيع الحصول على تباين المتغير ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية $س_١$ ، $س_٢$ بإضافة $ر^{٢}_{ص.١}$ إلى $ر^{٢}_{ص.٢}$ كما هو الحال فى الشكل الأيمن حيث $ر_{١٢} =$ صفر ، بل يجب أن نطرح الجزء المظلل بمربعات صغيرة ، وهو يمثل الجزء من تباين المتغير ص الذى يشترك فيه كل من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ حتى لا ندخله فى حسابنا مرتين .

ومشكلة ارتباط بعض أو جميع المتغيرات المستقلة ارتباطا مرتفعا عند تحليل الانحدار المتعدد تعرف فى الإحصاء باسم Multicollinearity . وهذا الارتباط المرتفع يمكن أن يسبب للباحث بعض المشكلات عند استخدامه طريقة الانحدار المتعدد فى تحليل بيانات بحثه نذكر منها :

١ — إذا كان أحد المتغيرات المستقلة على الأقل دالة خطية تامة لمتغير مستقل آخر أو لمتغيرات مستقلة أخرى فى معادلة الانحدار ، فإنه لا يمكن إيجاد قيمة وحيدة لكل معامل من معاملات الانحدار . وإذا كان الارتباط بين أى اثنين من هذه المتغيرات تتراوح قيمته بين ٠,٨ ، ١,٠ ربما لا يكون ممكنا حل المعادلات المعتادة لإيجاد قيمة معاملات الانحدار بسبب عدم وجود معكوس ضربى لمصفوفة الارتباطات بين المتغيرات المستقلة .

٢ — عدم ثبات تقدير معاملات الانحدار من عينة إلى أخرى

٣ — كلما زادت الارتباطات بين المتغيرات المستقلة زادت الحاجة إلى ضبط التأثيرات المتداخلة لهذه المتغيرات على المتغير التابع .

لهذا يجب على الباحث أن يتأكد عند إضافة متغير مستقل إلى معادلة الانحدار بغرض زيادة فاعلية التنبؤ أن يكون ارتباط هذا المتغير الجديد بأى من المتغيرات المستقلة الأخرى منخفضا وفى نفس الوقت يكون ارتباطه بالمتغير التابع ارتباطا مرتفعا .

أى أن الدائرة التى تمثل تباين المتغير المستقل $س_ك$ مثلا يجب أن تتقاطع مع الدائرة التى تمثل تباين المتغير التابع ص ، ولكنها لايجب أن تتقاطع مع أى من الدوائر التى تمثل تباين المتغيرات المستقلة الأخرى $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_{ك-١}$ ، أو على الأقل تكون الأجزاء الناتجة من تقاطعها مع كل منها ضئيلة .

أما إذا كان هناك ارتباط مرتفع بين المتغيرات المستقلة فإنه لا توجد طريقة مناسبة لإجراء تحليل الانحدار المتعدد باستخدام هذه المتغيرات ، ويوصى الباحث عندئذ بأن يضم المتغيرات المرتبطة ارتباطا مرتفعا معا ويكون منها متغيرا جديدا مركبا Composite Variable يستخدمه فى معادلة الانحدار بدلا من استخدام المتغيرات المكونة له . أو يختار فقط أحد هذه المتغيرات المرتبطة ارتباطا مرتفعا لتمثل البعد المطلوب فى معادلة الانحدار .

الفروض التى يجب أن يتحقق منها الباحث إذا أراد استخدام الانحدار المتعدد :

يتطلب الاستخدام الذكى لأى أسلوب إحصائى فى تحليل البيانات معرفة الباحث للأساس المنطقى الذى بنى عليه هذا الأسلوب .

وتحليل الانحدار يتطلب بعض الفروض التى يجب أن تتحقق فى البيانات المطلوب تحليلها . وفى الحقيقة أن معظم هذه الفروض لها أهميتها فى الجانب الاستدلالى من تحليل وتفسير الانحدار المتعدد ، ولكنها لا تعتبر ضرورية

إذا اقتصر الباحث في التحليل على الجانب الوصفي أي حساب بعض المقاييس الإحصائية التي عرضنا لها في هذا الفصل مثل معادلات الانحدار ، ومعامل الارتباط المتعدد . ونظرا لأننا اقتصرنا في هذا الكتاب على الأساليب الوصفية في تحليل البيانات ، فإننا سوف نتناول هذه الفروض بالمناقشة التفصيلية في الجزء الثاني من الكتاب الذي يختص بالأساليب الاستدلالية في تحليل البيانات. ولكن يجب أن يراعي الباحث أن تكون العينة المستخدمة عشوائية وكبيرة نسبيا وأن تكون المتغيرات من المستوى الفترى والعلاقة بينها خطية .

إذ ربما يدخل الباحث في اعتباره التفاعل القائم بين المتغيرات إذا تبين له أن العلاقة ليست خطية بأن يضيف حدودا من الدرجة الثانية أو الثالثة مثلا في معادلة الانحدار . ولذلك ربما يكون من المفيد رسم الشكل الانتشارى لبواقي الانحدار Residuals ، وفحص النمط العام لهذه البواقي حول مستوى الانحدار للتأكد من خطية أو انحناء العلاقة بين المتغيرات . ويجب أن يوضح الباحث أنه بالرغم من أن الانحدار المتعدد يعتمد على متغيرات من المستوى الفترى أو النسبي إلا أنه يمكن استخدام متغيرات من المستوى الاسمي في معادلة الانحدار ، وهو ما سنعرض له في الفصل الثامن عشر .

<u>تحليل الانحدار المتعدد في حالة وجود ثلاثة متغيرات مستقلة :</u>

الصورة العامة لمعادلة الانحدار في حالة وجود ثلاثة متغيرات مستقلة $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ هي :

$$ص_م = أ + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ب_3 س_3 \quad . . . . (٢٢)$$

ويمكن إيجاد انحرافات كل قيمة من قيم المتغيرات المستقلة ، والقيم المتنبأ بها عن متوسط كل منها . وسنرمز لهذه الانحرافات بالرموز $\bar{ص}_م$ ، $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_3$. وبذلك تصبح المعادلة (٢٢) في صورتها الانحرافية كما يأتي :

$$\bar{\text{ص}}_{\text{م}} = \text{أ} + \text{ب}_1 \bar{\text{س}}_1 + \text{ب}_2 \bar{\text{س}}_2 + \text{ب}_3 \bar{\text{س}}_3 \quad \ldots \quad (٢٣)$$

كما يمكن اشتقاق أربع معادلات معتادة Normal Equations من المعادلة رقم (٢٢) باستخدام طريقة المربعات الصغرى كما فى حالة وجود متغيرين مستقلين . غير أننا نحتاج هنا إلى أربع معادلات حتى نتمكن من إيجاد قيمة كل من أ ، ب_1 ، ب_2 ، ب_3 . وهذه المعادلات هى :

$$\text{مج}\,\text{س}_1\text{ص} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\text{س}_1^2 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\text{س}_1\text{س}_3 + \text{أ}\,\text{مج}\,\text{س}_1 \quad \ldots \quad (٢٤)$$

$$\text{،}\quad \text{مج}\,\text{س}_2\text{ص} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\text{س}_2^2 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\text{س}_2\text{س}_3 + \text{أ}\,\text{مج}\,\text{س}_2 \quad \ldots \quad (٢٥)$$

$$\text{،}\quad \text{مج}\,\text{س}_3\text{ص} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\text{س}_1\text{س}_3 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\text{س}_2\text{س}_3 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\text{س}_3^2 + \text{أ}\,\text{مج}\,\text{س}_3 \quad \ldots \quad (٢٦)$$

$$\text{،}\quad \text{مج}\,\text{ص} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\text{س}_1 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\text{س}_2 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\text{س}_3 + \text{ن}\,\text{أ} \quad \ldots \quad (٢٧)$$

ويستطيع الباحث حل هذه المعادلات الأربع باستخدام جبر المصفوفات أو بأى طريقة أخرى للحصول على ثوابت معادلة الانحدار وهى أ ، ب_1 ، ب_2 ، ب_3 .

ويمكن أيضاً أن نشتق ثلاث معادلات معتادة تعتمد على انحرافات قيم المتغيرات عن متوسط كل منها باستخدام المعادلة رقم (٢٣) وهذه المعادلات هى :

$$\text{مج}\,\bar{\text{س}}_1\bar{\text{ص}}_{\text{و}} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_1^2 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_3 \quad \ldots \quad (٢٨)$$

$$\text{،}\quad \text{مج}\,\bar{\text{س}}_2\bar{\text{ص}} = \text{ب}_1\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2 + \text{ب}_2\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_2^2 + \text{ب}_3\,\text{مج}\,\bar{\text{س}}_2\bar{\text{س}}_3 \quad \ldots \quad (٢٩)$$

$$، \text{مج}\ \bar{س}_٣ \bar{ص} = ب_١\ \text{مج}\ \bar{س}_١ \bar{س}_٣ + ب_٢\ \text{مج}\ \bar{س}_٢ \bar{س}_٣ + ب_٣\ \text{مج}\ \bar{س}_٣^٢$$

. . . . (٣٠)

ويمكن أن يعوض الباحث فى هذه المعادلات بنفس الطريقة التى اتبعت فى حالة وجود متغيرين مستقلين ، ثم يحـــل المعادلات الثلاث الناتجة ليحصل على الثوابت $ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$.

وبذلك يستطيع إيجاد معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ مجتمعة فى صورتها الانحرافية .

وبالطبع يمكن تعميم الأفـكار السابقة على أى عدد من المتغيرات المستقلة . إلا أنه كلما زاد عدد هذه المتغيرات كلما زاد تعقيد العمليات الحسابية التى يجب على الباحث أن يجريها لـكى يحصل على المقاييس الإحصائية اللازمة لتحليل الانحدار المتعدد . ولذلك يجب أن يلجأ الباحث إلى إحدى وحدات الحاسبات الالكترونية إذا كانت بيانات بحثه تشتمل على أكثر من ثلاثة متغيرات . وتوجـــد برامج إحصائية جاهزة تسمى Canned Programs يمـكن أن يستخدمها الباحث مباشرة بعد إدخال البيانات الخاصة بالمتغير التابع والمتغيرات المستقلة . وهذه البيانات ربما تكون هى الدرجات الخام الخاصة بالمتغيرات، أو معاملات الارتباط بين المتغيرات. وهذا يعتمد على التعليمات الخاصة ببرنامج الحاسب الألكترونى. وهنا ربما يستعين بأحد المتخصصين فى برمجة الحاسبات الالـكترونية أو أى شخص مدرب على استخدام هذه الحاسبات ، أو ربما يحصل الباحث على تدريب سريع على طرق تجهيز البيانات Data Processing ليقوم بنفســه بعد ذلك باستخدام هذه البرامج . ويمكن أن يستعين بالطرق والمفاهيم التى قدمنا لها فى هذا الفصل فى تفسير النتائج Outputs التى يحصل عليها .

كما يمكن للباحث أن يرجع إلى دليل مجموعة أو حزمة برامج تحليل البيانات فى البحوث الاجتماعية .

Statistical Packages for the Social Sciences (Spss)

وبخاصة الطبعات الحديثة منها ، أو غيرها من البرامج المتاحة لكى يطلع على مجموعة البرامج الجاهزة التى يمكنه الاستعانة بها فى تحليل بيانات بحثه . ويجب أن نؤكد مرة أخرى أن هذا لا يغنى الباحث عن الفهم المستنير لطبيعة بيانات بحثه ، والأسئلة التى يود الإجابة عليها باستخدام هذه البيانات قبل أن يختار الأساليب الإحصائية المناسبة .

تحليل الانحدار المتعدد باستخدام الحاسب الألكترونى :

عرضنا فيما سبق الطرق المعتادة المستخدمة فى تحليل الانحدار المتعدد وهى تعتمد على اختيار الباحث لمجموعة من المتغيرات المنبئة Predictor Variables على أساس نظرى أو فكرى ، وتضمينها فى معادلة الانحدار مرة واحدة . وربما تفيد هذه الطريقة فى تقدير الأهمية النسبية لهذه المتغيرات فى التنبؤ بالمتغير التابع . ولكن كثيراً ما يهدف الباحث إلى محاولة التوصل إلى أفضل مجموعة من المتغيرات المنبئة التى يمكن الاستعانة بهـا فى التنبؤ الجيد بمتغير تابع معين . وهنا يهتم بالحصول على أعلى قيمة لمربع معامل الارتباط المتعدد .

ولكن نظراً لأن معظم المتغيرات فى البحوث النفسية والتربوية تكون مرتبطة ببعضها كما سبق أن ذكرنا ، فإنه يمكن اختيار مجموعة صغيرة من هذه المتغيرات بحيث تجعل قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد مساوية للقيمة التى نحصل عليها إذا استخدم جميع المتغيرات .

وتنصب المشكلة هنا على اختيار أفضل هذه المتغيرات من حيث التكلفة ، وإمكانية الحصول على أدوات لقياسها بدقة . وسهولة تطبيق هذه الأدوات .

وبالطبع لا يوجد أسلوب أمثل لاختيار مثل هذه المجموعة من المتغيرات ، وإنما يعتمد ذلك على طبيعة البحث والهدف منه والإطار النظرى الذى يسترشد به الباحث فى عملية الاختيار . بيد أنه إذا كان هدف الباحث الرئيسى هو اختيار أقل عدد من المتغيرات التى يستطيع عن طريقها تفسير أكبر قدر من تباين المتغير

التابع ، فإنه يمكنه استخدام إحدى الطرق الآتية التى صممت لهذا الغرض . ومما هو جدير بالذكر أن معظم هـــذه الطرق يجب إجراؤها باستخدام الحاسب الالكترونى بسبب كثرة وتعقد العمليات الحسابية التى تتطلبها .

١ — طريقة إضافة المتغيرات على التوالى :

Forward (Stepwise) Inclusion

الخطوة الأولى التى تتبع عند إجراء هذه الطريقة هى أن تحسب جميع معاملات الارتباط بين كل من المتغيرات المستقلة والمتغير التابع . ويتم تضمين المتغير المستقل الذى يكون معامل ارتباط حاصل ضرب العزوم بينه وبين المتغير التابع أعلى هذه المعاملات فى معادلة الانحدار .

ويلى ذلك تضمين المتغير المستقل التالى الذى يؤدى إلى زيادة ملحوظة فى مربع معامل الارتباط المتعدد ($ر^٢_م$) فى المعادلة بعد أن يؤخذ فى الاعتبار المتغير الذى تم تضمينه أولا . ثم يلى ذلك تضمين المتغير الثالث الذى يرتبط بالمتغير التابع ارتباطاً عالياً بعد عزل أثر المتغيرين المستقلين السابقين فى معادلة الانحدار . وتستمر هذه العملية بقدر ما لدى الباحث من متغيرات مستقلة .

فى كل حالة مراعاة المحك الإحصائى المطلوب أى الدلالة الإحصائية للزيادة التى تحدث فى مربع معامل الارتباط نتيجة لتضمين متغير مستقل جديد فى المعادلة

ولكن يجب أن يعلم الباحث أنه كلما زاد حجم العينة تكون الزيادة فى قيمة $ر^٢_م$ لها دلالة إحصائية حتى لو كانت هذه الزيادة طفيفة . وهذا يبين أهمية حجم العينة فى تحليل الانحدار المتعدد .

ولذلك يجب على الباحث أن يرتكن إلى محك آخر إلى جانب محك الدلالة الإحصائية ، وليكن هذا المحك مرتبطا بأهمية وتكلفة المتغير الجديد الذى يتم تضمينه فى معادلة الانحدار .

إذ ربما لا يجنى الباحث فائدة تذكر من إضافة متغير مستقل يكون له دلالة إحصائية ولكن لا يكون له معنى يذكر . وعلى كل حال يجب على الباحث أن يقرر بنفسه ما إذا كانت التكلفة والفائدة توازى ما يضيفه المتغير المستقل الجديد من تفسير منطقى لتباين المتغير التابع . وبالطبع يمكن أن يختلف هذا المحك الجديد من موقف بحثى إلى آخر .

ومما هو جدير بالذكر أن الحاسب الالكترونى يتولى عملية ترتيب تضمين المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار ، وبذلك لا يكون للباحث الحرية فى حذف أى من هذه المتغيرات المستقلة من المعادلة .

٢ — طريقة حذف المتغيرات على التوالى .

Backward Elimination

ونقطة البدء فى هذه الطريقة هى تضمين جميع المتغيرات المستقلة التى لدى الباحث فى معادلة الانحدار ، وحساب مربع معامل الارتباط المتعدد بينها وبين المتغير التابع . ويتم حذف المتغير الذى لا يؤدى حذفه إلى إنقاص قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد . بمعنى أن كل متغير ينظر إليه وكأنه قد تم تضمينه مؤخراً فى معادلة الانحدار .

وبهذا نستطيع ملاحظة أى المتغيرات المستقلة تضيف أقل إضافة عندما يتم تضمينها مؤخراً فى المعادلة . ويمكن — كما فى الطريقة الأولى — تقدير النقص الذى يحدث فى مربع معامل الارتباط المتعدد نتيجة لحذف متغير مستقل تبعاً لمحك الدلالة الإحصائية إلى جانب المحكات الأخرى .

فإذا لم يتم حذف أى من المتغيرات المستقلة ينتهى البرنامج . أما إذا تم حذف أحدها ، فإن البرنامج يستمر بنفس الطريقة حتى ينتهى من جميع المتغيرات . وإذ أدى حذف أحد المتغيرات إلى نقص له دلالة أو أهمية فى قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد ينتهى البرنامج عند هذا الحد .

ومن الجدير بالذكر أن كلا من الطريقتين السابقتين لا تؤدى بالضرورة إلى اختيار نفس مجموعة المتغيرات المستقلة .

والدليل على ذلك أنه فى الطريقة الأولى لا يتم حذف أحد المتغيرات المستقلة التى تشتمل عليها معادلة الانحدار حتى إذا انعدمت أهميته عقب تضمين المتغيرات المستقلة الأخرى فى المعادلة . أما فى الطريقة الثانية فإنه ينظر إلى متغير مستقل معين فى ضوء ما تسهم به المتغيرات المستقلة الأخرى مجتمعة . ولذلك ربما يتم حذف أحد المتغيرات إذا استخدمت الطريقة الثانية بينما يستبقى إذا استخدمت الطريقة الأولى . كما أن الطريقة الثانية تحتاج إلى وقت أطول لإجرائها من الطريقة الأولى .

٣ ـ طريقة إضافة وحذف المتغيرات تدريجيا :

Stepwise Regression

تجمع هذه الطريقة بين ميزات كل من الطريقتين السابقتين ، وهى تعتبر تعديلا للطريقة الأولى . فهى تتلافى أحد العيوب الرئيسية لهذه الطريقة ، وهو استبقاء أحد المتغيرات المستقلة الذى يتم تضمينه فى معادلة الانحدار على الرغم من فقدان أهميته بالنسبة لغيره من المتغيرات التى يتم تضمينها بعد ذلك فى المعادلة .

وتجرى اختبارات الدلالة الإحصائية فى نهاية كل خطوة لتحديد مدى إسهام كل متغير مستقل تم تضمينه فى معادلة الانحدار كما لو كان قد تم تضمينه مؤخراً فى المعادلة .

وبهذا يمكن حذف أحد هذه المتغيرات التى ربما كان فى البداية له قيمة تنبؤية .

٤ ـ طريقة توفيق المتغيرات :

Combinatorial Solution

يتم فى هذا البرنامج فحص جميع التوافيق الممكنة للمتغيرات المستقلة ، واختيار

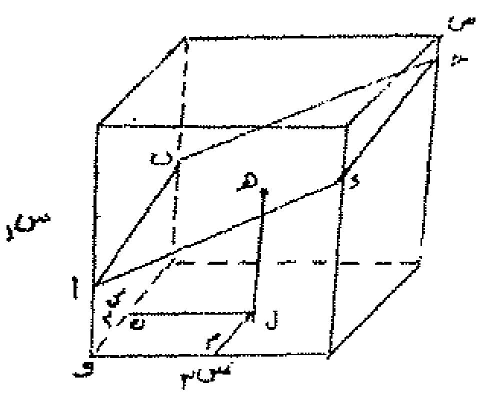
أفضل توفيقة من هذه المتغيرات التي يمكن باستخدامها تفسير أكبر قدر من تباين المتغير التابع .

التمثيل الهندسي للانحدار المتعدد :

سبق أن ذكرنا في الفصل الرابع عشر أنه إذا كان لدينا متغيران أحدهما مستقل (س) ، والآخر تابع (ص) ، فإن معادلة إنحدار ص على س يمكن تمثيلها هندسيا بخط مستقيم .

فكل زوج من الملاحظات أو القيم المشاهدة يمكن تمثيله بنقطة من المستوى . فإذا رسمنا شكلا انتشاريا لهذه الأزواج من القيم ، فإن هذا الخط المستقيم يكون بمثابة خط أحسن مطابقة أو خط الانحدار ، لأن النقط تسكون متراكة حوله وتميل إلى أن تنحدر واقعة عليه .

وبالمثل إذا كان لدينا ثلاثة متغيرات أحدهما متغير تابع $س_١$ ، والمتغيران الآخران مستقلان $س_٢$ ، $س_٣$ ، فإن كل ثلاث قيم من الملاحظات التي تناظر المتغيرين المستقلين $س_٢$ ، $س_٣$ ، والمتغير التابع $س_١$ يمكن تمثيلها بنقطة في الفراغ الثلاثي الأبعاد كما هو موضح بالشكل الآتي رقم (٦٨) :



شكل رقم (٦٨)
التمثيل الهندسي للانحدار المتعدد
حيث يمثل المستوى أ ب جـ ء مستوى الانحدار

ويتضح من هذا الشكل أن أى نقطة مثل هـ لها ثلاثة أبعاد $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$. فإذا كانت جميع معاملات الارتباط بين المتغيرات الثلاثة موجبة ، فإن جميع النقط سوف تميل إلى التراكم حول قطر متوازى المستطيلات و ص . وعندئذ يمكن إيجاد أفضل مستوى مطابقة لمجموعة النقط الواقعة فى الفراغ الثلاثى الأبعاد، وهو ممثل فى الشكل بالمستوى أ ب جـ د الذى يسمى بمستوى الانحـــدار Regresion Plane.

ويمكن التعبير رياضيا عن هذا المستوى بالمعادلة :

$$س_{١م} = أ + ب_٢ س_٢ + ب س_٣$$

حيث أ هى نقطة تقاطع المستوى مع المحور $س_١$ ، أى المسافة أ و ، $ب_٢$ هى ميل المستقيم أ د ، $ب_٣$ هى ميل المستقيم أ ب ، $س_{١م}$ هى قيمة المتغير التابع المتنبأ بها .

فإذا افترضنا أن درجة فرد ما تمثل على المحور $س_٣$ بالبعد و م ، وعلى المحور $س_٢$ بالبعد و ن ، فإنه يمكننا تعيين النقطة ل التى تقع فى المستوى و م ل ن . ونقيم من النقطة ل عموداً على هذا المستوى حتى يلاقى مستوى الانحدار أ ب جـ د فى النقطة هـ . ويمكن عندئذ اعتبار المسافة ل هـ تمثل أفضل تقدير لدرجة هذا الفرد فى المتغير التابع $س_١$ بمعلومية درجته فى كل من المتغيرين المستقلين $س_٢$ ، $س_٣$. ونعنى بأفضل تقدير أن مستوى الانحدار هو ذلك المستوى الذى يجعل مجموع مربعات الانحرافات عنه الموازية للمحور $س_١$ نهاية صغرى .

وهنا يجب أن يلاحظ الباحث أن التمثيل الهندسى للانحدار المتعدد فى حالة وجود متغيرين مستقلين يعتبر امتدادا طبيعيا للانحدار الخطى البسيط .

إلا أننا نستخدم فى هذه الحالة مستوى الانحدار بدلا من خط الانحدار . ويمكن أيضا تعميم الفكرة بحيث تشتمل على الحالة التى يكون لدينا فيها ثلاثة متغيرات مستقلة أو أكثر .

تقلص معامل الارتبــاط المتعدد :

Shrinkage in Multiple Regression

ذكرنا فيما سبق أن معامل الارتباط المتعدد هو مقياس لفاعلية التنبؤ لعينة معينة ، ويمكن الحصول على قيمته بإيجاد الارتباط بين الدرجات أو القيم المتنبأ بها على أساس معادلة الانحدار ، ودرجات أو قيم المتغير التابع . والهدف من التوصل إلى مجموعة من الأوزان فى تحليل الانحدار المتعدد هو جعل الارتباط بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع أكبر ما يمكن . فإذا طبق الباحث مجموعة الأوزان التى حصل عليها من عينة معينة على عينة أخرى ، فإن الارتباط بين الدرجات الموزونة للمتغيرات المستقلة والمتغير التابع للعينة الثانية سوف تكون قيمته أقل من قيمة معامل الارتباط المتعدد التى حصل عليها من العينة الأولى . وتعرف هذه الظاهرة باسم « تقلص معامل الارتباط المتعدد Shrinkage » . والسبب فى انخفاض قيمة معامل الارتباط المتعدد هو أننا نعالج قيم معامل ارتباط بيرسون على أنها خالية من الخطأ ، وهذا بالطبع يتنافى مع ما يحدث فى الواقع . ولذلك فإن أخطاء الصدفة تتراكم وتؤدى إلى قيم متحيزة (أى أكبر من القيم الفعلية) لمعامل الارتباط المتعدد . ويتأثر مقدار هذا التحيز بقيم معامل الارتباط المتعدد فى المجتمع الذى تستمد منه عينة البحث ، وحجم العينة ، ونسبة عدد المتغيرات المستقله إلى عدد أفراد العينة .

ويوصى بعض خبراء الإحصاء بأن يكون هناك ٣٠ فردا لكل متغير مستقل ، ولكن هذه لاتعتبر قاعدة مسلما بها فى جميع الحالات . إذ يرى البعض الآخر أن حجم العينة يجب أن يكون مساويا ٤٠٠ فرد ، وكلما زاد هذا العدد زاد ثبات نتائج تحليل الانحدار المتعدد . ولذلك ينصح كيرلنجر Kerlinger أن تكون العينات كبيرة العدد إلى حد ما .

وبالرغم من أننا لانستطيع تحديد درجة التحيز فى حساب قيمة معامل

الارتباط المتعدد ، إلا أنه يمكننا تقدير مقدار التقلص الذى يحدث فى هذه القيمة بتطبيق الصورة الرياضية الآتية :

$$\bar{ر}^{2}_{م} = ١ - \frac{ن - ١}{ن - م - ١} (١ - ر^{2}_{م}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢١)$$

حيث $\bar{ر}^{2}_{م}$ ترمز إلى تقدير مربع معامل الارتباط المتعدد فى المجتمع .

، $ر^{2}_{م}$ ترمز إلى مربع معامل الارتباط المتعدد الذى نحصل عليه من العينة موضع البحث .

، ن ترمز إلى عدد أفراد العينة .

، م ترمز إلى عدد المتغيرات المستقلة .

وكلما زاد كل من حجم العينة ، وعدد المتغيرات المستقلة قل مدى التحيز الذى يحدث فى قيمة $ر^{2}_{م}$. فإذا كانت $ر_{م}$ = ٠,٧٠٧ أى ($ر^{2}_{م}$ = ٠,٥٠٠) ، ن = ٢٦ ، م = ١٠ فإن $\bar{ر}^{2}_{م}$ = ٠,١٦٧ وتكون $\bar{ر}_{م}$ = ٠,٤٠٩ فهنا يكون مقدار التقلص فى معامل الارتباط المتعدد كبيرا .

ويوضح كيرلنجر Kerlinger كيف يتأثر مقدار هذا التقلص بقيمة النسبة بين حجم العينة وعدد المتغيرات المستقلة بأن افترض ثلاث نسب مختلفة وهى :

١ : ٥ ، ١ : ٣٠ ، ١ : ٥٠

فإذا كان عدد المتغيرات المستقلة م = ٣ ، فإن عدد أفراد العينات الثلاث ن = ١٥ ، ٩٠ ، ١٥٠ على الترتيب

وإذا افترضنا أن مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة الثلاثة والمتغير التابع يساوي ٠,٣٦ فإن :

$$\bar{ر}^{2}_{م} \text{ في الحالة الأولى } = ١ - \frac{١٥ - ١}{١٥ - ٣ - ١} \times ٠,٦٤ = ٠,١٩$$

$$\text{،} \; \bar{ر}^{2}_{م} \text{ في الحالة الثانية } = ١ - \frac{٩٠ - ١}{٩٠ - ٣ - ١} \times ٠,٦٤ = ٠,٣٤$$

$$\text{،} \; \bar{ر}^{2}_{م} \text{ في الحالة الثالثة } = ١ - \frac{١٠٠ - ١}{١٠٠ - ٣ - ١} \times ٠,٦٤ = ٠,٣٥$$

ويتضح من هذه الحالات الثلاث أن قيمة $\bar{ر}^{2}_{م}$ وهي ٠,١٩ تساوي تقريباً نصف قيمة $ر^{2}_{م}$ وهي ٠,٣٦ عندما تكون النسبة ١ : ٥ ، ويقل مقدار تقلص قيمة $\bar{ر}^{2}_{م}$ بقدر ٠,٠٢ عندما تكون النسبة ١ : ٣٠ . أما إذا كانت النسبة ١ : ٥٠ فإن مقدار التقلص المتنبأ به يصبح حوالي ٠,٠١ .

ويجب أن يلاحظ الباحث أن الصورة السابقة رقم (٣١) يمكن تطبيقها إذا استخدمت جميع المتغيرات المستقلة في معادلة الانحدار .

أما إذا استخدمت إحدى الطرق التي يتم فيها اختيار المتغيرات في معادلة الانحدار عن طريق الحاسب الألكتروني ، فإن أخطاء الصدفة تتراكم بدرجة أكبر ، وذلك لأن أفضل مجموعة من المتغيرات المستقلة التي يتم اختيارها من مجموعة أكبر تكون عرضة للأخطاء الناتجة عن ارتباط هذه المتغيرات بالمتغير التابع من ناحية والأخطاء الناتجة عن ارتباط المتغيرات المستقلة فيما بينها من ناحية أخرى . ويمكن التخلص من بعض هذه الأخطاء إذا اختار الباحث عينة كبيرة نسبيا (ولتكن حوالي ٥٠٠ فرد) .

وربما تكون أفضل طريقة لتقدير درجة التقلص التي تحدث في قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد هي إجراء مايسمى بالصدق المستعرض Cross—Validation.

ويمكن تحقيق ذلك بأن يختار الباحث عينتين يجرى على إحداهما تحليل الانحدار المتعدد، ويحسب قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد، وكذلك يوجد معادلة الانحدار. ثم يطبق هذه المعادلة على المتغيرات المستقلة للعينة الثانية، وبذلك يمكنه الحصول على قيمة $ص_م$ (أي القيمة المتنبأ بها) لكل فرد في هذه العينة. ويحسب معامل ارتباط بيرسون بين الدرجات الملاحظة (ص) للعينة الثانية والدرجات المتنبأ بها ($ص_م$) لنفس العينة. وهذا المعامل الناتج ($ر_{ص ص_م}$) يشبه معامل الارتباط المتعدد الذي استخدمه الباحث في الحصول على معادلة الانحدار للعينة الأولى. والفرق بين هذين المعاملين يكون بمثابة تقدير لمقدار التقلص الذي حدث في قيمة $ر^٢_م$. فإذا كان مقدار هذا التقلص صغيرا يستطيع الباحث عندئذ استخدام معادلة الانحدار التي حصل عليها من العينة الأولى في أغراض التنبؤ المستقبلي. ويرى موزيير Mosier أن معادلة الانحدار التي تعتمد على ضم أكثر من عينة واحدة معاً تكون أكثر ثباتا لأن العينة المركبة الناتجة سوف تكون أكبر حجما. ولذلك يوصي الباحث بأن يضم العينتين الأولى والثانية معاً إذا وجد أن مقدار النقص المتنبأ به في قيمة $ر^٢_م$ صغيرا، ويستخدم معادلة الانحدار المستمدة من بيانات هذه العينة المركبة في التنبؤ المستقبلي.

ومن هذا يتضح أن إجراء طريقة الصدق المستعرض تحتاج إلى عينتين، فإذا لم يتمكن الباحث من الحصول عليهما يمكنه أن يختار عينة واحدة كبيرة ولتكن ٥٠٠ فرد ويقسمها إلى مجموعتين بطريقة عشوائية يستخدم إحداهما في إيجاد معادلة الانحدار الأصلية ويستخدم الأخرى في التحقق من هذه المعادلة لتقدير التقلص الذي حدث في قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد.

ويرى كثير من الباحثين أننا يجب أن نعتمد على طريقة الصدق المستعرض

المزدوج Double Cross-Validation بدلا من طريقة الصدق المستعرض لزيادة الدقة . وهذه الطريقة تتطلب تطبيق طريقة الصدق المستعرض مرتين .

ولكى يجرى الباحث ذلك عليه أن يحسب مربع معامل الارتباط المتعدد لكل من عينتين (أو يقسم عينة كبيرة إلى مجموعتين بطريقة عشوائية) . ويوجد معادلة الانحدار لكل منهما . ثم يطبق معادلة الانحدار التى حصل عليها من إحدى العينتين على المتغيرات المستقلة للعينة الأخرى . ويوجد مربع معامل الارتباط المتعدد عن طريق حساب قيمة $ر_{ص ص م}$. وبذلك يكون لديه قيمتان لمربع معامل الارتباط المتعدد تم حسابهما مباشرة من كل من العينتين . وكذلك قيمتان لمربع معامل الارتباط المتعدد تم حسابهما من معادلتى الانحدار لعينتين مختلفتين . وبهذا يستطيع دراسة الفروق بين مربع كل من معاملى الارتباط وكذلك الفروق بين معادلتى الانحدار .

فإذا اتفقت النتائج يمكن أن يضم العينتين معاً ويحسب معادلة الانحدار فى هذه الحالة ليستخدمها فى التنبؤ .

ولذلك نوصى الباحث أن يستخدم طريقة الصدق المستعرض المزدوج كلما أمكنه ذلك إذا كان الهدف من بحثه استخدام تحليل الانحدار المتعدد فى أغراض التنبؤ المستقبلى ، وبذلك يستطيع التحقق من صدق نتائج التحليل .

تمارين على الفصل السادس عشر

١ ــ لماذا يفضل استخدام تحليل الانحدار المتعدد على الانحدار البسيط فى البحوث النفسية والتربوية ؟ ومتى لا يكون هذا الاستخدام صحيحاً ؟

٢ ــ فيما يلى مجموعة من درجات التحصيل فى القراءة (المتغير التابع ص) ، ودرجات الاستعداد اللفظى (المتغير المستقل الأول س$_1$) ، ودرجات اختبار فى الذكاء (المتغير المستقل الثانى س$_2$) لمجموعة تتكون من عشرة تلاميذ فى الصف الثامن :

ص	٢	١	١	١	٥	٤	٧	٦	٧	٨
س$_1$	٢	٢	١	١	٣	٤	٥	٥	٧	٦
س$_2$	٤	٤	٤	٣	٦	٦	٣	٤	٣	٣

(ا) احسب المقاييس الاحصائية اللازمة لإيجاد معادلة انحدار ص على س$_1$ ، س$_2$.

(ب) أوجد مقدار مايسهم به المتغير س$_1$ ، س$_2$ معاً فى تفسير تباين المتغير التابع ص .

(ج) أوجد مقدار مايسهم به المتغيرين س$_1$ ، س$_2$ كل على حدة فى تفسير تباين المتغير التابع .

٣ ــ فيما يلى مجموعة من البيانات الافتراضية لمتغيرين مستقلين س$_1$ ، س$_2$ ، ومتغير تابع ص .

$س_١$	٢	٢	١	١	٣	٤	٥	٥	٧	٦
$س_٢$	٥	٤	٥	٣	٦	٤	٦	٤	٣	٣
ص	٢	١	١	١	٥	٤	٧	٦	٧	٨

(ا) أوجد المتوسط والانحراف المعيارى لكل متغير ومجموع المربعات ، ومجموع حواصل ضرب الانحرافات ، ومعامل ارتباط بيرسون بين كل متغيرين .

(ب) أوجد قيم ثوابت معادلة الانحدار ، ومجموع المربعات الخاصة بالانحدار ، ومجموع مربعات البواقى .

(ﺟ) أوجد معادلة انحدار ص على $س_١$ ، $س_٢$.

(د) أوجد مربع معامل الارتباط المتعدد ، وفسر القيمة الناتجة .

(ﻫ) احسب البواقى ، ومربع البواقى ، ومجموع هذه المربعات ، وفسر المجموع الناتج .

(و) احسب معامل الارتباط بين قيم ص المتنبأ بها وقيم ص الأصلية ، وفسر القيمة الناتجة .

٤ — حصل باحث على معاملات الارتباط بين أربعة متغيرات مستقلة ، وكذلك معامل الارتباط بين كل متغير مستقل والمتغير التابع .

(ا) هل يستطيع الباحث باستخدام مصفوفة الارتباطات الناتجة وحدها إجراء تحليل الانحدار المتعدد ، أى بدون استخدام الدرجات الخام ؟

(ب) ماهى المقاييس الإحصائية التى يجب أن يحصل عليها فى هذه الحالة نتيجة لهذا التحليل ؟

(ﺟ) هل يمكنه إيجاد قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد بمعلومية مصفوفة الارتباطات وحدها ؟

٥ — إذا كان المتوسط والانحراف المعيارى لمتغير تابع $\bar{\text{س}}_1$ = ٢٤,٥٦ ، ع_1 = ٤,٥٢ ، ولمتغيرين مستقلين $\bar{\text{س}}_2$ = ٣٦,٤٨ ، ع_2 = ١٦,٩٥ ، $\bar{\text{س}}_3$ = ١٦,٩٥ ، ع_3 = ٥,٤٩ . ومعامل الارتباط بين س_1 ، س_2 = ٠,٧٠ ، وبين س_1 ، س_3 = ٠,٦٥ ، وبين س_2 ، س_3 = ٠,٣٣ .

احسب معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع س_1 ، والمتغيرين المستقلين س_2 ، س_3 معاً .

٦ — فيما يلى مجموعة من البيانات الخاصة بدرجات ثمانية طلاب فى ثلاثة اختبارات :

الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
اختبار الاستعداد اللغوى (ص)	٢	٠	٥	٩	١١	١٢	١	٧
اختبار الاستدلال اللفظى (س_1)	٣	٨	٢	٤	١٠	١٥	٤	٣
اختبار الاستدلال الهندسى (س_2)	١٥	٩	٧	٣	٢	١	١٢	٤

إذا افترضنا أن درجات الاختبار ص ترتبط ارتباطا خطياً بدرجات كل من الاختبارين س_1 ، س_2 .

(أ) احسب مصفوفة معاملات الارتباط ٣ × ٣ بين ص ، س_1 ، س_2 .

(ب) أوجد معادلة انحدار ص على س_1 ، س_2 .

(ج) أوجد قيمة $\text{ر}^2_{\text{م}}$ ، $\text{ر}_{\text{ص١٠}}$ ، $\text{ر}_{\text{ص٢٠}}$ ، $\text{ر}_{\text{ص٢١٠}}$

٧ — هل يؤثر ترتيب إدخال المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار فى مقدار ما يسهم به المتغير الأول الذى يتم احتواؤه فى المعادلة ؟ وهل يؤثر ذلك فى مقدار ما يسهم به المتغير الأخير الذى يتم احتواؤه ؟ وما سبب ذلك ؟

٨ — هل يؤثر ترتيب إدخال المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار فى قيم معاملات الانحدار ؟ وهل يؤثر هذا الترتيب فى مربع معامل الارتباط المتعدد ؟ وإذا كان الأمر كذلك فما هى الصعوبات التى تواجه الباحث النفسى عند تفسير البيانات الفعلية ؟

٩ — فيما يلى ثمانية متغيرات . تخير بعضا منها وضع ثلاثة فروض بحثية يمكن اختبار صحتها باستخدام تحليل الانحدار المتعدد مع العناية باختيار المتغيرات المستقلة والمتغير التابع . والمتغيرات هى :

التحصيل اللغوى ، مفهوم الذات ، الذكاء ، المستوى الاجتماعى والاقتصادى ، مستوى الطموح ، الجنس ، التحصيل فى القراءة ، دافع الانجاز .

١٠ — افترض أن لديك مشكلة بحثية تتطلب تفسيرا عليا لسمة التعصب . وافترض أيضاً أن هناك ستة متغيرات مستقلة ترتبط بهذه السمة مثل التسلطية ، التعارف الدينى ، التعليم ، المحافظة ، المستوى الاجتماعى ، العمر ، وبعض هذه المتغيرات المستقلة ترتبط فيما بينها بدرجات متفاوتة .

(ا) ماهى الشروط التى ينبغى توفرها للتنبؤ بدرجة أفضل بسمة التعصب .

(ب) هل من المحتمل أن تزيد دقة التنبؤ بإضافة أكثر من هذه المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار ؟ ولماذا ؟

الفصل السابع عشر

طرق الضبط الاحصائى

معامل الارتباط الجزئى وشبه الجزئى

معامل الارتباط الجزئى

استخدام تحليل الانحدار فى حساب

معامل الارتباط الجزئى

معامل الارتباط شبه الجزئى (معامل ارتباط الجزء)

تفسير الانحدار المتعدد فى ضوء الارتباط شبه الجزئى

مقدمة :

عرضنا فى الفصل السابق مفهوم الانحدار المتعدد وكيفية الحصول على معادلة الانحدار فى حالة وجود متغيرين مستقلين أو أكثر، وتفسير مقدار ما تسهم به المتغيرات المستقلة مجتمعة، وما تسهم به كل منها على حدة فى التنبؤ بقيم المتغير التابع باستخدام مفهوم معامل الارتباط المتعدد. وسنفرد هذا الفصل لمناقشة أحد الموضوعات الهامة المرتبطة بتحليل الانحدار المتعدد وبغيره من طرق تحليل البيانات المتعددة المتغيرات، وهو موضوع الضبط الإحصائى Statistical Control.

فالارتباط والانحدار المتعدد يهدفان إلى دراسة العلاقة بين مجموعة من المتغيرات للاستفادة بها فى التنبؤ بالظاهرة السلوكية وتفسيرها. وهذا بالطبع يتطلب نوعاً من الضبط والتحكم فى العوامل العارضة أو المتغيرات التى ربما تؤثر فى التفسير. ويمكن إجراء هذا الضبط أو التحكم بطرق متعددة منها الضبط التجريبى Experimental Control الذى يتم عن طريق التصميمات التجريبية المختلفة Experimental Designs. والضبط الإحصائى، وهو ما سنتناوله فى هذا الفصل بشىء من التفصيل.

ونقصد بالضبط الإحصائى إستخدام الطرق الإحصائية فى عزل تأثير متغير أو أكثر من العلاقة بين متغير مستقل أو أكثر ومتغير تابع. وبذلك نتحكم فى تأثير بعض المتغيرات على المتغير التابع حتى يتسنى للباحث دراسة العلاقة الفعلية بين المتغيرات المستقلة المطلوبة والمتغير التابع.

ولتوضيح ذلك نعرض المثال الآتى :

نفترض أننا طبقنا اختبارين أحدهما يقيس الذكاء والآخر يقيس القدرة النفسحركية على مجموعة من الأطفال فى أعمار مختلفة.

ونظراً لأن الذكاء يزيد بزيادة العمر وكذلك القدرة النفسحركية فإن درجات اختبار الذكاء سوف ترتبط بدرجات اختبار القدرة النفسحركية لأن كلا منهما يرتبط بالعمر ارتباطاً موجبا .

ويمكن عزل أثر العمر من العلاقة بين درجات الاختبـــارين عن طريق الضبط الإحصائي لإيجاد العلاقة الفعلية بين المتغيرين .

وتوجد مقاييس إحصائية مختلفة تستخدم في الضبط الإحصائي أهمها :

١ — معامل الارتباط الجزئي Partial Correlation .

٢ — معامل الارتباط شبه الجزئي Semi—Partial Correlation .

وأحيانا يطلق عليه معامل ارتباط الجزء Part Correlation .

وسوف نعرض فيما يلي هذين النوعين من المعاملات لأهميتهما في تحليـــل الانحدار المتعدد ، وتحليل المسارات Path Analysis الذي سنعرض له في الفصل التاسع عشر .

معامل الارتباط الجزئي :

معامل الارتباط الجزئي هو مقياس إحصائي للعلاقة الخطية بين متغيرين بعد عزل تأثير المتغيرات الأخرى . ويتم عزل تأثير هذه المتغيرات عن طريق تعديل قيم المتغير التابع والمتغيرات المستقلة بحيث تأخذ درجات المتغير المطلوب عزل أو ضبط تأثيره في الاعتبار .

وفكرة عزل تأثير متغير ثالث من العلاقة بين متغيرين يمكن التعبير عنها بأسلوب إحصائي دقيق . فإذا افترضنا أن لدينا ثلاثة متغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$. وأن جزءاً من مقدار الارتباط بين المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ ربما يكون نتيجة لارتبـــاط كل منهما بالمتغير الثالث $س_٣$. فكما سبق أن ذكرنا في الفصل الرابع عشر أن أي قيمة من قيم المتغير $س_١$ أو $س_٢$ يمكن تقسيمها إلى جزئين .

جزء يمكن التنبؤ به بمعلومية المتغير $س_٣$ ، والآخر هو قيمة الباقى Residual أو الخطأ الناتج عن تقدير $س_١$ أو $س_٢$ بمعلومية $س_٣$. وهذان الجزءان مستقلان أى غير مرتبطين .

والارتباط بين مجموعتى البواقى أو أخطاء التقدير الناتجة عن التنبؤ بقيم المتغير $س_١$ أو $س_٢$ بمعلومية $س_٣$ هو معامل الارتباط الجزئى، ويرمز له بالرمز $ر_{١٢.٣}$ أى هو الإرتباط بين المتغيرين $س_١$، $س_٢$ بعد عزل تأثير المتغير $س_٣$. وهو الجزء من الارتباط المتبقى بعد عزل تأثير المتغير الثالث .

وبعبارة أخرى $ر_{١٢.٣}$ هو الارتباط بين البواقى بعد عزل تأثير المتغير $س_٣$ من كل من المتغيرين $س_١$ ، $س_٢$.

ويسمى معامل الارتباط الجزئى فى هذه الحالة « معامل الارتباط الجزئى من الرتبة الأولى First—order Partial » .

والصورة الرياضية المستخدمة فى حساب معامل الارتباط الجزئى من الرتبة الأولى هى :

$$ر_{١٢.٣} = \frac{ر_{١٢} - ر_{١٣}\,ر_{٢٣}}{\sqrt{١ - ر^{٢}_{١٣}}\ \sqrt{١ - ر^{٢}_{٢٣}}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١)$$

ولتوضيح كيفية تطبيق هذه الصورة نفترض أن $س_١$ ، $س_٢$ هما درجات اختبارين فى الذكاء والقدرة النفسحركية على الترتيب لمجموعة من الأطفال مختلفة الأعمار .

ولنفترض أن $س_٣$ هو متغير العمر ، وأن الارتباط بين المتغيرات الثلاثة هو :

$$ر_{١٢} = ٠,٥٥ \quad ، \quad ر_{١٣} = ٠,٦٠ \quad ، \quad ر_{٢٣} = ٠,٥٠$$

وبذلك يكون معامل الارتباط الجزئى باستخدام الصورة السابقة رقم (١) هو :

$$\text{ر}_{\text{٣.٢١}} = \frac{\text{٠,٥٥} - (\text{٠,٦٠})(\text{٠,٥٠})}{\sqrt{\text{١} - (\text{٠,٦٠})^{\text{٢}}}\ \sqrt{\text{١} - (\text{٠,٥٠})^{\text{٢}}}}$$

$$= \text{٠,٣٦}$$

ويمكن تفسير هذه القيمة باستخدام مفهوم التباين المشترك . فجزء التباين المشترك بين المتغيرين $\text{س}_{\text{١}}$ ، $\text{س}_{\text{٢}}$ = $\text{ر}^{\text{٢}}_{\text{١٢}}$ = $(\text{٠,٥٥})^{\text{٢}}$ = ٠,٣٠٣ . وجزء التباين المشترك بين $\text{س}_{\text{١}}$، $\text{س}_{\text{٢}}$ بعد عزل تأثير المتغير $\text{س}_{\text{٣}}$ = $\text{ر}^{\text{٢}}_{\text{٣.٢١}}$ = $(\text{٠,٣٦})^{\text{٢}}$ = ٠,١٣٠

وبذلك يكون جزء التباين المشترك الناتج عن تأثير العمر يساوى ٠,٣٠٣ – ٠,١٣٠ = ٠,١٧٣ ، أى أن النسبة المئوية للارتباط الناتج عن تأثير متغير العمر

$$= \frac{\text{٠,١٧٣}}{\text{٠,٣٠٣}} \times \text{١٠٠} = \text{٥٧}\ \%$$

والنسبة المئوية للارتباط الناتج عن تأثير عوامل أخرى = ١٠٠ – ٥٧ = ٤٣ ٪ .

ومما لاشك فيه أنه يمكننا تثبيت أو ضبط متغير العمر بالطرق التجريبية وذلك بأن نختار مجموعة عمرية واحدة من الأطفال ، ثم نوجد الارتباط بين درجات الاختبارين لهذه المجموعة .

وبذلك لا يكون للعمر تأثير على مقدار الارتباط بين درجات الاختبارين . غير أن استخدام مفهوم الارتباط الجزئى يحقق نفس الفكرة ولكن بالطرق الإحصائية .

وفى حالة وجود ثلاثة متغيرات يمكن أن نحسب ثلاثة معاملات ارتباط جزئية من الرتبة الأولى هى : $\text{ر}_{\text{٣.٢١}}$ ، $\text{ر}_{\text{٢.٣١}}$ ، $\text{ر}_{\text{١.٣٢}}$ بتطبيق صور رياضية مماثلة للصورة رقم (١) السابقة كالآتى :

$$ر_{١٣.٢} = \frac{ر_{١٣} - ر_{١٢} \, ر_{٢٣}}{\sqrt{١ - ر_{١٢}^{٢}} \, \sqrt{١ - ر_{٢٣}^{٢}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (٢)$$

$$، \; ر_{٢٣.١} = \frac{ر_{٢٣} - ر_{١٢} \, ر_{١٣}}{\sqrt{١ - ر_{١٢}^{٢}} \, \sqrt{١ - ر_{١٣}^{٢}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (٣)$$

ويجب أن يعلم الباحث أن الارتباط الجزئي لا يقتصر على ثلاثة متغيرات فقط، إذ توجد معاملات ارتباط جزئية من رتب أعلى. وتتحدد رتبة معامل الارتباط بعدد المتغيرات المطلوب عزل تأثيرها . فمثلا إذا كان لدينا أربعة متغيرات $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ فإنه يمكننا الحصول على معاملات ارتباط جزئية من الرتبة الثانية Second--Order Partials مثل $ر_{١٢.٣٤}$ وهذا الرمز يعني أننا نوجد معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين $س_١$ ، $س_٢$ بعد عزل تأثير المتغيرين $س_٣$ ، $س_٤$.

والصورة الرياضية المستخدمة في حساب معامل الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية هي :

$$ر_{١٢.٣٤} = \frac{ر_{١٢.٣} - ر_{١٤.٣} \, ر_{٢٤.٣}}{\sqrt{١ - ر_{١٤.٣}^{٢}} \, \sqrt{١ - ر_{٢٤.٣}^{٢}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (٤)$$

وبالطبع يزداد تعقيد العمليات الحسابية كلما زادت رتبة معاملات الارتباط الجزئية ، أي كلما زاد عدد المتغيرات التي يريد الباحث عزل تأثيرها . ولذلك فإن برامج الحاسب الألكتروني الخاصة بتحليل الانحدار المتعدد تجرى عادة العمليات التي يتطلبها إيجاد معاملات الارتباط الجزئية . ولكن نظراً لصعوبة تفسير مثل هذه المعاملات وبخاصة التي من الرتبة الثانية وما فوقها ، فإن الباحث نادراً ما يلجأ إلى حساب معاملات أعلى رتبة من الرتبة الأولى.

طريقة أخرى لحساب معامل الارتباط الجزئى :

يمكن حساب معامل الارتباط الجزئى باستخدام طريقة أخرى أكثر تعميما . وهى تعتمد على معامل الارتباط المتعدد . فاستخدامها يتطلب حساب هـــذه المعاملات . وينصح كيرلنجر Kerlinger الباحث بألا يستخدم هذه الطريقة إلا إذا كان لديه قيم معاملات الارتباط المتعدد أثناء تحليل الانحدار المتعدد . فن المعلوم أن حساب هذه القيم يتطلب وقتاً وجهداً كبيراً .

والهدف من ذكر هذه الطريقة هنا هى أنها تمكن الباحث من تصور العلاقة بين تحليل الانحدار المتعدد ومعاملات الارتباط الجزئية .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا متغيرين مستقلين $س_1$ ، $س_2$. فلإيجاد معامل الارتباط الجزئى بين المتغير التابع ص والمتغير المستقل $س_1$ بعد عزل تأثير المتغير المستقل $س_2$ نطبق الصورة الرياضية الآتية :

$$ر^2_{ص١.٢} = \frac{(١ - ر^2_{ص.٢}) - (١ - ر^2_{ص.١٢})}{١ - ر^2_{ص.٢}} \quad \cdots\cdots (٥)$$

حيث $ر^2_{ص١.٢}$ ترمز إلى مربع معامل الارتباط الجزئى بين المتغير التابع ص ، والمتغير المستقل $س_1$ بعد عزل تأثير المتغير المستقل $س_2$.

، $ر^2_{ص.٢}$ ترمز إلى تباين المتغير التابع ص الذى يمـــكن تفسيره بمعلومية المتغير المستقل $س_2$.

، $ر^2_{ص.١٢}$ ترمز إلى تباين المتغير التابع ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرين المستقلين $س_1$ ، $س_2$

وبالطبع المقدار $١ - ر^{٢}_{ص.١٢}$ هو تباين المتغير التابع ص الذى لا يرجع إلى انحدار ص على $س_{١}$ ، $س_{٢}$ معاً .

أما إذا كان لدينا ثلاثة متغيرات مستقلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، فإنه يمكننا إيجاد معامل الارتباط الجزئى بين المتغير التابع ص . والمتغير المستقل $س_{٣}$ بعد عزل تأثير المتغيرين المستقلين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ بتطبيق الصورة الرياضية الآتية :

$$ر^{٢}_{ص٣.١٢} = \frac{(١ - ر^{٢}_{ص.١٢}) - (١ - ر^{٢}_{ص.١٢٣})}{١ - ر^{٢}_{ص.١٢}} \quad \ldots\ldots (٦)$$

حيث $ر^{٢}_{ص٣.١٢}$ ترمز إلى مربع معامل الارتباط الجزئى المطلوب .

، $ر^{٢}_{ص.١٢}$ ترمز إلى تباين المتغير التابع ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرين المستقلين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ معا .

، $ر^{٢}_{ص.١٢٣}$ ترمز إلى تباين المتغير التابع ص الذى يمكن تفسيره بمعلومية المتغيرات المستقلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ مجتمعة .

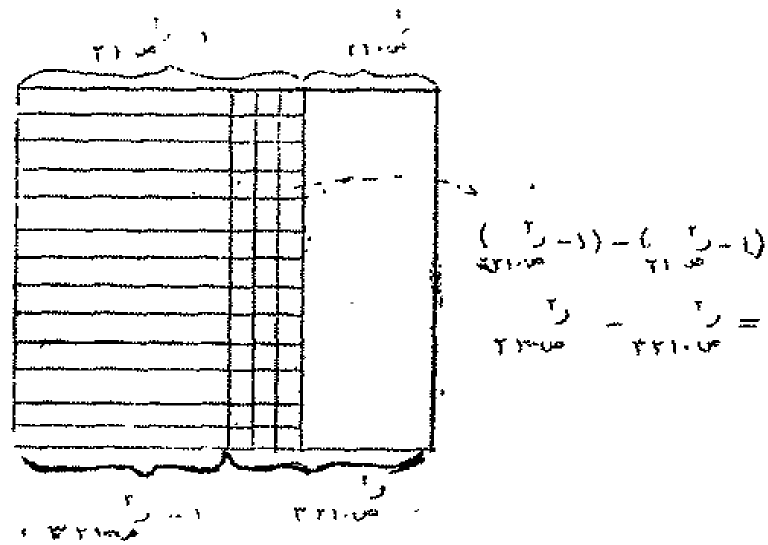
ونلاحظ أن المقدار $(١ - ر^{٢}_{ص.١٢٣})$ يدل على تباين المتغير ص الذى لا يرجع إلى المتغيرات المستقلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ مجتمعة . والمقدار $(١ - ر^{٢}_{ص.١٢})$ يدل على تباين المتغير ص الذى لا يرجع إلى المتغيرين المستقلين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ معا .

أى أن البسط فى الصورة رقم (٦) عبارة عن الفرق بين تباين بواقى انحدار ص على $س_{١}$ ، $س_{٢}$ وتباين بواقى انحدار ص على $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$.

فإذا قسمنا هذا الفرق على تباين بواقى انحدار ص على $س_{١}$ ، $س_{٢}$ (وهو

التباين الأكبر) ينتج لدينا ما يسمى « بالتباين الجزئى Partial Variance »، ومعامل الارتباط الجزئى هو الجذر التربيعى لهذا التباين الجزئى .

ويوضح كيرلنجر Kerlinger التباين الجزئى ر٢ص٣٠٢١ وبالتالى معامل الارتبـــاط الجزئى رص٣٠٢١ بالشكل التخطيطى الآتى رقم (٦٩) :



شكل رقم (٦٩)

تمثيل التباين الجزئى

وبالنظر إلى هذا الشكل نجد أن مساحة المستطيل الأكبر تمثل التباين الكلى للمتغير التابع ص ، وهى تساوى الواحد الصحيح . والجزء من المساحة المظلل بخطوط أفقية يمثل المقدار (١ - ر٢ص٠٢١) ، والجزء من المساحة المظلل بخطوط رأسية وفى نفس الوقت مقسم إلى مربعات صغيرة نتيجة تقاطعه مع الجزء من المساحة المظلل بخطوط أفقية يمثل المقدار (١ - ر٢ص٠٢١) - (١ - ر٢ص٣٢١)

ويلاحظ أن التباين $ر^{٢}_{ص٠٢١}$ ، التباين $ر^{٢}_{ص٠٣٢١}$ ممثلان فى الشكل .

وبذلك يكون التباين الجزئى عبارة عن النسبة بين المساحة المقسمة إلى مربعات صغيرة إلى المساحة المظللة بخطوط أفقية . أى أن المساحة المقسمة إلى مربعات صغيرة هى التى تمثل التباين المشترك ، وهى الأساس الذى يبنى عليه تفسير معامل الارتباط الجزئى .

استخدام تحليل الانحدار المتعدد فى حساب معاملات الارتباط الجزئية :

لكى نوضح للباحث كيف يمكنه استخدام تحليل الانحدار المتعدد فى حساب معاملات الارتباط الجزئية نعرض المثال الافتراضى الآتى لقيم متغير تابع ص ، ومتغيران مستقلين $س_{١}$ ، $س_{٢}$.

	ص	$س_{١}$	$س_{٢}$
	١	٣	٣
	٢	١	٢
	٣	٢	١
	٤	٤	٤
	٥	٥	٥
المتوسط الحسابى	٣	٣	٣
مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط	١	١٠	١٠
التباين $\frac{مج(س - \overline{س})^{٢}}{ن - ١}$ =	٢,٥	٢,٥	٢,٥
الانحراف المعيارى	١,٥٨	١,٥٨	١,٥٨
$ر_{ص س_{١}}$ =	٠,٧٠	$ر_{ص س_{٢}}$ = ٠,٦٠	$ر_{س_{١} س_{٢}}$ = ٠,٩٠

جدول رقم (٩٤)

فإذا أردنا إيجاد معامل الارتباط الجزئى $ر_{ص س_١ . س_٢}$ فإننا نطبق الصورة رقم (١) السابقة كالآتى :

$$ر_{ص س_١ . س_٢} = \frac{(٠,٧٠) - (٠,٦٠)(٠,٩٠)}{\sqrt{١ - (٠,٦٠)^٢}\sqrt{١ - (٠,٩٠)^٢}}$$

$= ٠,٤٦$ تقريباً .

أى أن عزل تأثير المتغير $س_٢$ من العلاقة بين المتغيرين ص ، $س_١$ أدى إلى انخفاض قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين من ٠,٧٠ إلى ٠,٤٦ . وبالطبع لا يكون الانخفاض فى مقدار الارتباط كبيراً إلى هذا الحد فى البحوث العملية .

ولتوضيح مفهوم معامل الارتباط الجزئى فى ضوء تحليل الانحدار نفترض أننا حسبنا قيم ص المتنبأ بها باستخدام انحدار المتغير التابع ص على أحد المتغيرين المستقلين وليكن $س_٢$ مثلا . ثم أوجدنا معامل الارتباط بين المتغير التابع $س_٢$ ، وقيم ص المتنبأ بها $ص_م$ ، نجد أن قيمة هذا المعامل تساوى الواحد الصحيح . أى أن $ر_{س_٢ ص_م} = ١$.

فمعامل الارتباط بين قيم المتغير المنبىء ، وقيم المتغير المتنبأ به تكون قيمته مساوية الواحد الصحيح دائما لأن قيم $ص_م$ هى نفس قيم $س_٢$ بعد ضربها فى مقدار ثابت وإضافة مقدار ثابت آخر عليها . وقد ذكرنا فى الفصل السابع أن هذا لا يؤثر فى قيمة معامل الارتباط .

أما إذا أوجدنا معامل الارتباط بين قيم المتغير المستقل $س_٢$ والبواقى ف نجد أن قيمته تساوى الصفر . وهذا صحيح دائما لأن البواقى هى الانحرافات الناتجة عن التنبؤ بقيم المتغير التابع بمعلومية قيم المتغير المستقل .

والحقيقة أن معامل الارتباط الجزئى هو معامل الارتباط بين مجموعتين من البواقى residuals .

أى أنه إذا افترضنا أننا حصلنا على معادلة انحدار ص على $س_٢$ ، ومعادلة انحدار $س_١$ على $س_٢$ وهما :

$$ص_م = أ + ب\ س_٢$$

$$،\ س_{١م} = أَ + بَ\ س_٢$$

وبعد حساب قيمة كل من الثابتين لكل معادلة على حدة ، وإيجاد قيم $ص_م$ ، $س_{١م}$ ، ثم حساب قيم $ف_١ = ص - ص_م$ ، $ف_٢ = س_١ - س_{١م}$ نجد أن معامل الارتباط الجزئى $ر_{ص س_١ . س_٢}$ هو معامل الارتباط بين البواقى $ف_١$ ، $ف_٢$.

ولتوضيح ذلك نطبق هذه الخطوات على البيانات السابقة المبينة فى جدول رقم (٩٤) كالآتى :

نحسب أولا قيمة كل من الثابتين ا ، ب فى معادلة انحدار ص على $س_٢$ باستخدام المعادلتين :

$$ب = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}$$

$$،\quad ا = \bar{ص} - ب\ \bar{س}$$

$$\text{حيث نجد أن } ب = ٠,٦٠ \times \frac{١,٥٨}{١,٥٨} = ٠,٦٠$$

$$،\quad ا = ٣ - (٠,٦٠)(٣) = ١,٢$$

وبذلك تكون معادلة انحدار ص على $س_٢$ هى :

$ص_م = ١,٢ + ٠,٦ \, س_٢$

وبنفس الطريقة نحسب قيمة كل من الثابتين أَ ، بَ ، ونوجد معادلة انحدار $س_١$ على $س_٢$ وهى :

$س_{١م} = ٠,٢ + ٠,٩ \, س_٢$

وباستخدام هاتين المعادلتين يمكن إيجاد قيم $ص_م$ ، $س_{١م}$ المناظرة لقيم ص ، $س_١$ الموضحة فى الجدول رقم (٩٤) ، وكذلك البواقى $ف_١$ ، $ف_٢$ ، وهذه مبينة فى الجدول الآتى رقم (٩٥) :

ص	س٢	صم = ١,٢ + ٠,٦ س٢	ف١	س١	س٢	سم = ٠,٣ + ٠,٩ س٢	ف٢
١	٣	١,٢ + ١,٨ = ٣	٢,٠ —	٣	٣	٠,٣ + ٢,٧ = ٣,٠	صفر
٢	٢	١,٢ + ١,٢ = ٢,٤	٠,٤ —	١	٢	٠,٣ + ١,٨ = ٢,١	١,١ —
٣	١	١,٢ + ٠,٦ = ١,٨	١,٢	٢	١	٠,٣ + ٠,٩ = ١,٢	٠,٨
٤	٤	١,٢ + ٢,٤ = ٣,٦	٠,٤	٤	٤	٠,٣ + ٣,٦ = ٣,٩	٠,١
٥	٥	١,٢ + ٣,٠ = ٤,٢	٠,٨	٥	٥	٠,٣ + ٤,٥ = ٤,٨	٠,٢

جدول رقم (٩٥)

ويتضح من هذا الجدول أن قيم $ف_١$ تمثل الأخطاء الناجمة عن التنبؤ بقيم ص بمعلومية قيم $س_٢$ ، وقيم $ف_٢$ تمثل الأخطاء الناجمة عن التنبؤ بقيم $س_١$ بمعلومية قيم $س_٢$.

فلإيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين ص ، $س_١$ بعد عزل تأثير المتغير $س_٢$ يجب أن نحسب معامل الارتباط بين البواقي $ف_١$، $ف_٢$ باستخدام الدرجات الخام مباشرة كالآتى :

	$ف_١$	$ف_٢$	$ف_١^٢$	$ف_٢^٢$	$ف_١ف_٢$
	−٢,٠	صفر	٤,٠٠	صفر	صفر
	−٠,٤	−١,١	٠,١٦	١,٢١	٠,٤٤
	١,٢	٠,٨	١,٤٤	٠,٦٤	٠,٩٦
	٠,٤	٠,١	٠,١٦	٠,٠١	٠,٠٤
	٠,٨	٠,٢	٠,٦٤	٠,٠٤	٠,١٦
المجموع	صفر	صفر	٦,٤٠	١,٩٠	١,٦٠

جدول رقم (٩٦)

$$ر_{ف_١ف_٢} = \frac{\text{ن مج } ف_١ف_٢ - \text{مج } ف_١ \times \text{مج } ف_٢}{\sqrt{\text{ن مج } ف_١^٢ - (\text{مج } ف_١)^٢}\ \sqrt{\text{ن مج } ف_٢^٢ - (\text{مج } ف_٢)^٢}}$$

$$= \frac{(٥)\ (١,٦٠) - \text{صفر}}{\sqrt{(٥)\ (٦,٤٠)}\ \sqrt{(٥)\ (١,٩٠)}}$$

$$= ٠,٤٦ \text{ تقريباً .}$$

وهنا يجب أن يلاحظ الباحث أنها نفس القيمة التى حصلنا عليها باستخدام صورة معامل الارتباط الجزئى رقم (١) ، كما يجب أن يلاحظ أن $ر_{س_٢ف_١}$ = صفر ، $ر_{س_٢ف_٢}$ = صفر .

أى أن معامل الارتباط بين متغيرين بعد عزل تأثير متغير ثالث هو معامل الارتباط بين البواقى التى نحصل عليها من انحدار كل من المتغيرين على المتغير الثالث .

معامل الارتباط شبه الجزئى أو معامل ارتباط الجزء :

من عرضنا السابق يتضح أن الباحث يستطيع أن يعزل أثر التباين غير المطلوب من كل من المتغيرين موضع البحث . فى المثال السابق عزلنا تأثير العمر من كل من درجات اختبار الذكاء واختبار القدرة النفسحركية . ويعبر الارتباط الجزئى عن العلاقة بين درجات كل من الاختبارين بعد عزل تأثير العمر من هذه الدرجات أو ضبط تأثيره على المتغيرين بطريقة إحصائية .

والآن نفترض أن الباحث أراد أن يعزل تأثير العمر من درجات اختبار الذكاء فقط ولا يريد أن يعزل تأثيره من درجات اختبار القدرة النفسحركية . فعندئذ يمكنه استخدام نوع آخر من معاملات الارتباط يسمى معامل الارتباط شبه الجزئى Semi—Partial Correlation ، وأحيانا يسمى معامل ارتباط الجزء Part Correlation .

والصورة المستخدمة فى حساب هـــذا المعامل والذى سنرمز له بالرمز $ر_{١(٢٠٣)}$ أى الارتباط بين المتغير الأول والمتغير الثانى بعد عزل تأثير المتغير الثالث فقط هى :

$$ر_{١(٢٠٣)} = \frac{ر_{١٢} - ر_{١٣}\,ر_{٢٣}}{\sqrt{١ - ر_{٢٣}^{٢}}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (٧)$$

وربما يلاحظ الباحث أن الفرق بين هذه الصورة والصورة رقم (١) المستخدمه فى حساب معامل الارتباط الجزئى هو أن مقام هذه الصورة يشتمل على المقدار $\sqrt{١ - ر_{٢٣}^{٢}}$ فقط .

أما إذا أراد الباحث عزل تأثير المتغير الثالث من المتغير الأول فقط أي $ر_{٢(١٠٣)}$ فإنه يمكنه استخدام الصورة الآتية :

$$ر_{٢(١٠٣)} = \frac{ر_{٢١} - ر_{٢٣} ر_{٣١}}{\sqrt{١ - ر^{٢}_{٣١}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٨)$$

ويمكن توضيح مفهوم الارتباط شبه الجزئي وكيفية حساب قيمته بالإشارة إلى الجدولين رقمي (٩٤) ، (٩٥) . ففي الجدول رقم (٩٥) حسبنا قيمة $س_{١}$ المتنبأ بها أي $س_{١م}$ ، والبواقي $ف_{٢}$ التي تساوي $س_{١} - س_{١م}$ الناتجة عن انحدار المتغير $س_{١}$ على المتغير $س_{٢}$.

فإذا حسبنا معامل الارتباط بين قيم $ف_{٢}$ ، ص المبينة بالجدولين رقم(٩٤) ، (٩٥) ، فإن قيمة المعامل الناتجة وهي ٠٫٣٧ تمثل العلاقة بين المتغيرين ص ، $س_{١}$ بعد عزل تأثير المتغير $س_{٢}$ من المتغير $س_{١}$ فقط .

ويمكننا أيضاً إيجاد العلاقة بين المتغيرين ص ، $س_{١}$ بعد عزل تأثير المتغير $س_{٢}$ من المتغير $س_{١}$ فقط باستخدام الصورة رقم (٧) كالآتي :

$$ر_{ص(س_{١} . س_{٢})} = \frac{ر_{ص س_{١}} - ر_{ص س_{٢}} ر_{س_{١} س_{٢}}}{\sqrt{١ - ر^{٢}_{س_{١} س_{٢}}}}$$

وبالتعويض عن قيم معاملات الارتباط المدونة أسفل جدول رقم (٩٤) نجد أن :

$$ر_{ص(س_{١} . س_{٢})} = \frac{(٠٫٧٠) - (٠٫٦٠)(٠٫٩٠)}{\sqrt{١ - (٩٠)^{٢}}}$$

$$= ٠٫٣٧$$

وهى نفس القيمة التى حصلنا عليها بإيجاد معامل الارتباط بين $ف_{٢}$ ، ص .

ويمكن حساب معاملات ارتباط شبه جزئية من رتب أعلى كما هو الحال فى معاملات الارتباط الجزئية . ويمكن أن يستفيد الباحث من هذه المعاملات فى التحليل المتقدم للارتباط والانحدار المتعدد ، وفى تفسير نتائج هذا التحليل . فمعامل الارتباط $ر_{١(٢٠٣٤)}$ هو معامل ارتباط شبه جزئى من الرتبة الثانية . وهو يدل على الارتباط بين المتغيرين ١ ، ٢ بعد عزل تأثير كل من المتغيرين ٣ ، ٤ من المتغير ٢ فقط . وبعبارة أخرى $ر_{١(٢٠٣٤)}$ هو معامل الارتباط بين المتغيرين ١ ، ٢ بعد استبعاد المقدار المشترك بين المتغير ٢ والمتغيرين ٣ ، ٤ .

والصورة المستخدمة فى حساب هذا المعامل هى :

$$ر_{١(٢٠٣٤)} = \frac{ر_{١(٢٠٣)} - ر_{١(٤٠٣)}\ ر_{٢(٤٠٣)}}{\sqrt{١ - ر^{٢}_{٢(٤٠٣)}}} \qquad . \quad . \quad . \quad (٩)$$

أما معامل الارتباط $ر_{١(٢٠٣٤٥)}$ فهو معامل ارتباط شبه جزئى من الرتبة الثالثة . وهو يدل على الارتباط بين المتغيرين ١ ، ٢ بعد عزل تأثير كل من المتغيرات ٣ ، ٤ ، ٥ من المتغير ٢ فقط . ويمكن الحصول على معاملات ارتباط شبه جزئية من رتب أعلى من ذلك .

تفسير الانحدار المتعدد فى ضوء مفهوم الارتباط شبه الجزئى :

ذكرنا فيما سبق أن المتغيرات المستقلة التى تستخدم عادة فى البحوث النفسية والتربوية تكون مرتبطة إلى حد كبير . وهذه تؤدى إلى بعض المشكلات عند تحليل الانحدار المتعدد .

فإذا كانت جميع معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة تساوى صفراً ، فإن مربع معامل الارتباط المتعدد بين المتغيرات المستقلة مجتمعة والمتغير التابع يساوى مجموع مربعات معاملات الارتباط بين كل متغير مستقل والمتغير التابع .

أى أن :

$$\text{ر}^{2}_{\text{ص.١٢...ن}} = \text{ر}^{2}_{\text{ص١}} + \text{ر}^{2}_{\text{ص٢}} + \cdots + \text{ر}^{2}_{\text{صن}} \quad \ldots \quad (١٠)$$

وبذلك نستطيع تحديد مقدار تباين المتغير التابع الذى يمكن تفسيره بمعلومية كل متغير من المتغيرات المستقلة نظراً لعدم وجود ارتباط بين هذه المتغيرات . وبالطبع يندر وجود مثل هذه الحالة فى البحوث النفسية والتربوية . إذ عادة تشتمل المواقف البحثية على متغيرات مرتبطة . وهنا يحاول الباحث التغلب على هذه المشكلة بأن يجرى نوعاً من التعديل على هذه المتغيرات المرتبطة بحيث تصبح متعامدة Orthogonal أى يصبح الارتباط بينها صفراً .

ويستخدم الارتباط الجزئى والارتباط شبه الجزئى فى إجراء مثل هذا التعديل .

ويمكن تعميم الصورة رقم (١٠) على أى عدد من المتغيرات المستقلة المرتبطة . فى حالة أربعة متغيرات مثلا تصبح الصورة كالآتى :

$$\text{ر}^{2}_{\text{ص.١٢٣٤}} = \text{ر}^{2}_{\text{ص١}} + \text{ر}^{2}_{\text{ص(٢.١)}} + \text{ر}^{2}_{\text{ص(٣.٢١)}} + \text{ر}^{2}_{\text{ص(٤.٣٢١)}} \quad \ldots \quad (١١)$$

وبالنظر إلى هذه الصورة نجد أن $\text{ر}^{2}_{\text{ص١}}$ ترمز إلى التباين المشترك بين المتغير التابع والمتغير المستقل الأول ، $\text{ر}^{2}_{\text{ص(٢.١)}}$ ترمز إلى مربع معامل الارتباط

شبه الجزئى (معامل ارتباط الجزء) بين المتغير التابع والمتغير المستقل الثانى بعد عزل تأثير التباين المشترك بين المتغيرين الأول والثانى ، $ر^{٢}_{ص(٢١٠٣)}$ ترمز إلى مربع معامل الارتباط شبه الجزئى من الرتبة الثانية عند احتواء المتغير الثالث فى المعادلة بعد عزل تأثير التباين المشترك بينه وبين المتغيرين الاول والثانى . وبذلك نحصل على التباين الذى يسهم به هذا المتغير دون تكرار للتباين الذى أسهم به المتغيران الأول والثانى بالفعل .

أما $ر^{٢}_{ص(٣٢١٠٤)}$ فهى ترمز إلى التباين المشترك بين المتغير التابع والمتغير المستقل الرابع بعد عزل تأثير المتغيرات الثلاثة الأولى من هذا المتغير المستقل فقط .

أى أن هذه الصورة تعبر عن طريقة عزل بواقى كل متغير مستقل على الترتيب من المتغيرات المستقلة التالية له ، وبذلك تصبح المتغيرات المستقلة متعامدة، فكل حد تشتمل عليه هذه الصورة يدل على نسبة التباين فى المتغير التابع الذى يسهم به كل متغير من المتغيرات المستقلة الأربعة فى معامل الارتباط المتعدد . وبالطبع يدل معامل الارتباط المتعدد على نسبة التباين الكلى فى المتغير التابع الذى تسهم به المتغيرات المستقلة مجتمعة فى معادلة الانحدار .

وهنا يجب أن نوجه نظر الباحث إلى أنه يمكنه الحصول على نفس قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد بصرف النظر عن ترتيب احتواء المتغيرات فى معادلة الانحدار . أى أن :

$$ر^{٢}_{ص٠٣٢١٠} = ر^{٢}_{ص٠٣١٢٠} = ر^{٢}_{ص٠٢١٣٠}$$

ولكن يختلف مقدار ما يسهم به كل متغير مستقل فى تباين المتغير التابع اختلافاً ملحوظا باختلاف هذا الترتيب . فالمتغير المستقل الذى تحتويه معادلة

الانحدار أولا سوف يسهم بلاشك بقدر أكبر فى تباين المتغير التابع عما لو احتوته المعادلة مؤخراً . وبوجه عام ، كلما زادت الارتباطات بين المتغيرات المستقلة وتم احتواؤها فى معادلة الانحدار مؤخراً قل تبعا لذلك مقدار ما تسهم به فى هـذا التباين .

ولكى نوضح للباحث كيفية إيجاد قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد بين متغير تابع وثلاثة متغيرات مستقلة باستخدام الصورة رقم (١١) والتى تصبح كالآتى :

$$ر^{٢}_{ص.٣٢١} = ر^{٢}_{ص١} + ر^{٢}_{ص(٢.١)} + ر^{٢}_{ص(٣.٢١)} \quad . \quad . \quad . \quad (١٢)$$

نفترض أن لدينا مصفوفة ارتباطات بين المتغير التابع وكل من المتغيرات المستقلة الثلاثة ، وكذلك الارتباطات بين المتغيرات المستقلة . وهذه مبينة فى الجدول الآتى رقم (٩٧) :

	١	٢	٣	ص
١	١,٠٠	٠,١٥	٠,٣٥	٠,٦٧
٢		١,٠٠	٠,٠٢	٠,٥٣
٣			١,٠٠	٠,٣٥
ص				١,٠٠

جدول رقم (٩٧)

فالحد الأول فى الصورة رقم (١٢) وهو ر٢ يدل على مربع معامل الارتباط بين المتغير التابع والمتغير المستقل الأول ، أى يساوى $(٠,٦٧)^{٢}$ = ٠,٤٤٨٩

أما الحد الثانى وهو $\text{ر}^{٢}_{\text{ص}(١٠٢)}$ فيمكن إيجاد قيمته باستخدام الصورة رقم (٧) كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{ص}(١٠٢)} = \frac{\text{ر}_{\text{ص}٢} - \text{ر}_{\text{ص}١}\ \text{ر}_{١٢}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}_{١٢}}}$$

وبالتعويض من القيم المبينة فى الجدول رقم (٩٧) نجد أن :

$$\text{ر}_{\text{ص}(١٠٢)} = \frac{(٠,٥٣) - (٠,٦٧)\ (٠,١٥)}{\sqrt{١ - (٠,١٥)^{٢}}}$$

$$= ٠,٤٣٤٤$$

والحد الثالث $\text{ر}^{٢}_{\text{ص}(٢١٠٣)}$ يمكن إيجاد قيمته باستخدام الصورة رقم (٩) وهى :

$$\text{ر}_{\text{ص}(٢١٠٣)} = \frac{\text{ر}_{\text{ص}(١٠٣)} - \text{ر}_{\text{ص}(١٠٢)}\ \text{ر}_{٣(١٠٢)}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}_{٣(١٠٢)}}}$$

وهذا يستلزم إيجاد قيمة كل من $\text{ر}_{\text{ص}(١٠٣)}$ ، $\text{ر}_{٣(٢٠١)}$ كالآتى :

$$\text{ر}_{\text{ص}(١٠٣)} = \frac{\text{ر}_{\text{ص}٣} - \text{ر}_{\text{ص}١}\ \text{ر}_{١٣}}{\sqrt{١ - \text{ر}^{٢}_{١٣}}}$$

$$= \frac{(٠,٣٥) - (٠,٦٧)(٠,٢٥)}{\sqrt{١ - (٠,٢٥)^٢}}$$

$$= ٠,١٢٣٣$$

$$، \quad ر_{٣(١٠٢)} = \frac{ر_{٢٣} - ر_{١٣}\, ر_{١٢}}{\sqrt{١ - ر^٢_{١٢}}}$$

$$= \frac{٠,٠٢ - (٠,٢٥)(٠,١٥)}{\sqrt{١ - (٠,١٥)}}$$

$$= - ٠,٠٣٢٩$$

وبذلك تكون $ر_{ص(٢١٠٣)}$

$$= \frac{ر_{ص(١٠٣)} - ر_{ص(١٠٢)}\; ر_{٣(١٠٢)}}{\sqrt{١ - ر^٢_{٣(١٠٢)}}}$$

$$= \frac{٠,١٢٣٣ - (٠,٤٣٤٤)(-٠,٠٣٢٩)}{\sqrt{١ - (-٠,٠٣٢٩)^٢}}$$

$$= ٠,١٣٨٠$$

وبالتعويض فى الصورة رقم (١٢) نجد أن :

$$ر^٢_{ص٠٣٢١} = (٠,٦٧٠٠)^٢ + (٠,٤٣٤٤)^٢ + (٠,١٣٨٠)^٢$$

$$= ٠,٤٤٨٩ + ٠,١٨٨٧ + ٠,٠١٩١$$

$$= ٠,٦٥٦٧$$

أى أن نسبة التباين فى المتغير التابع الذى يسهم به المتغيرات المستقلة الثلاثة بهذا الترتيب هى ٤٤,٨٩٪، ١٨,٨٧٪، ١,٩١٪

وبالطبع إذا قام الباحث بإيجاد قيمة $ر^{٢}_{ص.٣٢١٠}$ باستخدام إحدى الطرق التى عرضنا لها فى الفصل السادس عشر فإنه سيحصل على نفس القيمة تقريبا .

ومما هو جدير بالذكر أنه كلما زاد عدد المتغيرات المستقلة كلما أصبحت العمليات الحسابية المطلوبة لإيجاد قيم معاملات الارتباط شبه الجزئية معقـــدة للغاية مما يستدعى استخدام الحاسب الألكترونى لإجراء هذه العمليات . أو بمعنى آخر يجب فى هذه الحالة أن يلجأ الباحث إلى إحدى وحدات الحاسبات الألكترونية لإجراء هذا النوع من التحليل الإحصائى للبيانات .

ويجب أن نؤكد مرة أخرى أن تقدير ما تسهم به المتغيرات المستقلة فى تفسير تباين المتغير التابع ليس بالأمر اليسير أو المباشر . ولكن إذا استطاع الباحث أن يجد تبريراً منطقيا أو أساسا نظريا يرتكن إليه فى عملية ترتيب إدخال المتغيرات المستقلة فى معادلة الانحدار ، فإنه يمكنه الاعتماد على مربعات معاملات الارتباط شبه الجزئية فى هذا التقدير بالإضافة إلى الطرق الأخرى التى ذكرنا بعضا منها فى الفصل السادس عشر .

ولذلك نوصى الباحث أن يصمم خطة واضحة لمشكلة وفروض بحثه ، وأن يكون لديه الأساس النظرى الذى يختار فى ضوئه المتغيرات التى سيتناولها فى تحليل الانحدار المتعدد . فإذا كان الباحث مهتما فقط بالتنبؤ بوجه عام بقيم المتغير التابع بمعلومية قيم المتغيرات المستقلة مجتمعة ، فإنه يمكنه إدخال هذه المتغيرات فى معادلة الانحدار بأى ترتيب يراه مناسبا . إذ أن قيمة معامل الارتباط المتعدد ، وكذلك قيم المتغير التابع المتنبأ بها لا تختلف باختلاف هذا الترتيب .

أما إذا كان الباحث يهدف إلى تفسير الظاهرة موضع البحث ، ونقصد بذلك تفسير تباين المتغير التابع عن طريق معرفة مقدار ما يسهم به كل متغير من المتغيرات المستقلة فى هذا التباين ، فإن ترتيب إدخال هذه المتغيرات فى معادلة الانحدار يصبح أمراً هاما .

والخلاصة أن التحليل الإحصائي للانحدار المتعدد يفيد في تفسير الظاهرة موضع البحث عن طريق دراسة العلاقات القائمة بين المتغيرات التي تشتمل عليها هذه الظاهرة . وفي الحقيقة يعتبر تحليل الانحدار المتعدد . كما يؤكد كوهن Jacob Cohen وكوهن Patricia Cohen — أكثر الأساليب الإحصائية قوة وفاعلية في تحليل هذه العلاقات ليس فقط لأغراض التنبؤ وإنما لأغراض التفسير وبناء النظريات العلمية والتحقق من صحتها .

تمارين على الفصل السابع عشر

١ — وجد أحد الباحثين أن معامل الارتباط بين درجات مادة الرياضيات في امتحان الثانوية العامة ودرجات امتحان نهاية العام في السنة الأولى بكلية الهندسة لنفس مجموعة الطلاب بعد عزل أثر الذكاء ٠,٣٨ ، ومعامل الارتباط قبل عزل أثر الذكاء ٠,٥٤ . فسر معامل الارتباط الجزئى .

٢ — إذا افترضنا أن معامل الارتباط بين المقدرة العضلية وطول مجموعة من الأطفال من مختلف الأعمار ٠,٧٠ ، وبين المقدرة العضلية والوزن ٠,٨٠ ، وبين الطول والوزن ٠,٨٦ . ما هو أفضل تقدير للارتباط الفعلى بين المقدرة العضلية والوزن لهذه المجموعة .

٣ — إذا افترضنا أن الارتباط بين طول الفرد وقدرته اللغوية ٠,٥٥ ، وبين طوله وعمره الزمنى ، وبين طول قدرته اللغوية بعد عزل أثر العمر —٠,٠٢ . فسر هـــذه المعاملات على فرض أنها واقعية .

٤ — فسر معنى كل من معامل الارتباط الجزئى ومعامل ارتباط الجزء باستخدام بواقى الانحدار .

٥ — من المعلوم إحصائيا أن الضبط هو ضبط التباين . ما معنى ذلك ؟ وما هو دور معامل الارتباط الجزئى ومعامل الارتباط شبه الجزئى فى الضبط الإحصائى ؟

٦ — فيما يلى مصفوفة معاملات الارتباط بين ثلاثة متغيرات هى : تماسك الجماعة (ص) والمشاركة فى اتخاذ القرار ($س_١$) والعلاقات الإنسانية بين أفراد الجماعة ($س_٢$) :

	ر ص س١	ر ص س٢	ر س١ س٢
(أ)	٠,٦٠	٠,٤٠	٠,٥٠
(ب)	(٠,٦٠)	(٠,٤٠)	٠,٩٠
(جـ)	(٠,٩٠)	(٠,٧٠)	٠,٨٠
(د)	٠,٧٠	٠,٩٠	٠,٨٠

(أ) احسب معاملات الارتباط الجزئية الآتية :

ر ص س١ . س٢ ، ر ص س٢ . س١

(ب) احسب معاملات الارتباط شبه الجزئية ر ص(س٢ . س١) ، ر ص(س١ . س٢)
مع تفسير القيمة الناتجة فى كل حالة .

الفصل الثامن عشر

تحليل الانحدار المتعدد فى حالة المتغيرات النوعية

- المتغيرات الرمزية
- تحليل الانحدار المتعدد باستخدام المتغيرات الرمزية
- استخدامات أخرى للمتغيرات الرمزية

مقـــدمة :

عرضنا فى الفصلين السابقين طرق تحليل الانحدار المتعدد فى حالة المتغيرات الكمية . وذكرنا أن الباحث يمكنه أن يستخدم هذه الطرق فى التنبؤ بمتغير تابع بمعلومية متغيرين مستقلين أو أكثر من النوع المتصل ، أى تختلف درجة الأفراد فى السمة أو الصفة التى تقيسها هذه المتغيرات بحيث يمكن ترتيب هذه الدرجات حسب مقاديرها مثل درجات اختبار فى الذكاء أو التحصيل أو عدد مرات التعزيز وما إلى ذلك . وبالرغم من أن تحليل الانحدار المتعدد قدصمم بصفة خاصة بحيث يستخدم فى حالة المتغيرات الكمية Quantitative Variables إلا أنه يمكن استخدامه أيضا فى حالة المتغيرات النوعية Categorical Variables أى المتغيرات التى من المستوى الاسمى . ومن أمثلة هذه المتغيرات الجنس (ذكر أو أنثى) أو الديانة (مسلم أو مسيحى أو غير ذلك) أو الحالة الاجتماعية (متزوج أو أعزب أو مطلق أو أرمل) وهكذا .

وهذه المتغيرات تعتبر من النوع الاسمى أو التصنيفى . أى أن التغير يكون فى النوع وليس فى الدرجة كما هو الحال فى المتغيرات الكمية التى تكون من المستوى الرتبى أو الفترى أو النسبى .

وبذلك يتسع مجال استخدام تحليل الانحدار المتعدد بحيث يمكن التنبؤ بمتغير تابع معين من النوع الكمى بمعلومية متغيرين نوعيين أو أكثر ، مثل التنبؤ بالاتجاه نحو المهن المختلفة (وهو متغير كمى متصل) بمعلومية جنس الفرد ومستوى تعليمه (وهما متغيران من النوع التصنيفى غير المتصل وغير المرتب) .

أو يمكن التنبؤ بالمتغير التابع بمعلومية متغير متصل أو أكثر بالإضافة إلى متغير نوعى أو أكثر مثل التنبؤ بالاتجاه نحو المهن المختلفة بمعلومية بعض سمات

شخصية الفرد ومستوى تعلمه . أو التنبؤ بالتحصيل الدراسي في مادة دراسية معينة بمعلومية الذكاء وأسلوب التدريس .

المتغيرات الرمزية : Dummy Variables

يتطلب تحليل الانحدار باستخدام المتغيرات النوعية أو التصنيفية إجراء نوع معين من الترميز Coding للمتغير أو المتغيرات النوعية للإشارة إلى الأقسام المختلفة التي يتكون منها هذا المتغير أو هذه المتغيرات . فمثلا يمكن أن نرمز للذكور بالرقم ١ وللإناث بالرقم صفر إذا كان المتغير النوعي هو الجنس . أو يمكن أن نرمز للذكور بالرقم ١ وللإناث بالرقم — ١ أو أي نظام ترميزي آخر ، إلا أنه يفضل استخدام نظام الصفر والواحد الصحيح نظرا لسهولة استخدامه. وتسمى المتغيرات الناتجة عن هذا الترميز بالمتغيرات الرمزية Dummy Variables، وهي لا تصف مستوى قيـــاس له معنى بالنسبة للمتغير النوعي ، وإنما تشير فقط إلى أقسام هذا المتغير . فإذا أراد الباحث مثلا أن يستخدم في معادلة الانحدار متغيرا نوعيا مثل مستوى التعليم الذي يشتمل على ثلاثة أقسام ، فإن المتغيرات الرمزية الثلاثة الناتجة س١ ، س٢ ، س٣ ربما تكون كالآتي :

س١ = { ١ مستوى تعليم أساسي
      { صفر خلاف ذلك

، س٢ = { ١ مستوى تعليم ثانوي
        { صفر خلاف ذلك

، س٣ = { ١ مستوى تعليم عالي
        { صفر خلاف ذلك

وبذلك تتحول أقسام المتغير النوعي إلى مجموعة من المتغيرات الرمزية الثنائية بحيث يرمز الواحد الصحيح إلى انتماء الفرد إلى أحد أقسام المتغير النوعي والصفر إلى عدم انتمائه إلى هذا القسم .

وبالرغم من أن عدد المتغيرات الرمزية فى هذا المثال ثلاثة إلا أن الباحث يمكنه استخدام اثنين منها فقط كتغيرات مستقلة أو منبئة فى معادلة الانحدار دون أن يفقد شيئاً من المعلومات .

إذ يمكن معرفة أثر المتغير الرمزى $س_3$ من نتائج معادلة الانحدار التى تشتمل على $س_1$ ، $س_2$ فقط . وبعبارة أخرى معرفة ما إذا كان الفرد ينتمى أو لا ينتمى الى احدى المجموعتين التى يمثل كل منهما المتغيرين الرمزيين $س_1$ ، $س_2$ على الترتيب تعد كافية لتحديد انتماء الفرد الى إحدى المجموعات الثلاث . فإذا لم ينتم الى أى من المجموعتين $س_1$ أو $س_2$ فإنه لا بد أن ينتمى الى المجموعة $س_3$.

ويمكن تمثيل المتغيرات الرمزية فى المثال السابق كالآتى :

المتغير الرمزى

		$س_1$	$س_2$
المتغير النوعى	$ج_1$	١	صفر
	$ج_2$	صفر	١
	$ج_3$	صفر	صفر

فالمعلومات التى يتضمنها المتغير النوعى (مستوى التعليم) الذى يشتمل على ثلاثة أقسام $ج_1$ ، $ج_2$ ، $ج_3$ أمكن تمثيلها بمتغيرين رمزيين $س_1$ ، $س_2$ بدلا من ثلاثة متغيرات رمزية $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$. فعدم انتماء الفرد إلى إحدى المجموعتين $ج_1$ أو $ج_2$ يعنى أنه ينتمى إلى المجموعة $ج_3$.

وبالمثل يمكن تمثيل المتغير النوعى الذى يشتمل على أربعة أقسام $ج_1$ ، $ج_2$ ، $ج_3$ ، $ج_4$ بثلاثة متغيرات رمزية $س_1$ ، $س_2$ $س_3$ كالآتى :

المتغير الرمزى

المتغير النوعى

	$س_1$	$س_2$	$س_3$
$ج_1$	١	صفر	صفر
$ج_2$	صفر	١	صفر
$ج_3$	صفر	صفر	١
$ج_4$	صفر	صفر	صفر

وبوجه عام إذا اشتمل المتغير النوعى على ك من الأقسام أو المجموعات ، فإن عدد المتغيرات الرمزية اللازمة والكافية للإشارة الى انتماء الفرد إلى قسم معين أو مجموعة معينة من هذه الأقسام أو المجموعات = ك — ١ حيث ك ترمز إلى عدد أقسام المتغير النوعى . وفى حالة ما إذا كان عدد الأفراد الذين ينتمون إلى كل قسم متساويا يكون معامل الارتباط بين أى متغيرين رمزيين مساويا مقلوب عدد هذه المتغيرات بإشارة سالبة .

$$أى\ أن\ ر_{هـ\ و} = -\frac{1}{ك - 1}$$

حيث هـ ، و ترمز الى المتغيرين الرمزيين .

تحليل الانحدار المتعدد باستخدام المتغيرات الرمزية :

Dummy Variable Multiple Regression

لتوضيح كيفية استخدام فكرة المتغيرات الرمزية فى تحليل الانحدار المتعدد فى حالة المتغيرات النوعية نعرض المثال الآتى :

نفترض أن باحثا أراد أن يقوم بدراسة سلوك حل المشكلة ، فعين الأفراد بطريقة عشوائية فى ثلاث مجموعات تجريبية مختلفة . وعقب الانتهاء من المعالجات التجريبية طلب من كل فرد فى كل مجموعة حل مجموعة معينة من المشكلات . وفيما يلى ملخص لهذه الدرجات لكل من المجموعات الثلاث (جدول رقم ٩٨):

$ج_1$	$ج_2$	$ج_3$
٢	٣	٧
٣	٣	٦
٢	٤	٤
٥	٤	٧
٣	٢	٨
٥	٢	٤

جدول رقم (٩٨)

فلكى نتنبأ بسلوك حل المشكلة من عضوية الفرد فى إحدى المجموعات التجريبية يمكن اتباع الخطوات الآتية :

الخطوة الأولى : نرمز للدرجات بالرمز ص ، ونكون متغيرين رمزيين $س_1$ ، $س_2$ يمثلان أقسام متغير المعالجة التجريبية كالآتى :

المتغير الرمزى

متغير المعالجة التجريبية	س$_1$	س$_2$
ج$_1$	١	صفر
ج$_2$	صفر	١
ج$_3$	صفر	صفر

فبالنسبة للمتغير س$_1$ نرمز للأفراد الذين ينتمون إلى المجموعة التجريبية ج$_1$ بالرقم ١ ، بينما نرمز للأفراد الذين لا ينتمون إلى ج$_1$ بالرقم صفر .

وبالنسبة للمتغير س$_2$ نرمز للأفراد الذين ينتمون الى المجموعه التجريبية ج$_2$ بالرقم ١ ، بينما نرمز للأفراد الذين لاينتمون الى ج$_2$ بالرقم صفر .

ويمكن أيضاً تكوين متغير رمزى ثالث س$_3$ نرمز فيه للأفراد الذين ينتمون الى المجموعة التجريبية ج$_3$ بالرقم ١ ، والذين لاينتمون اليها بالرقم صفر ، إلا أن هذا المتغير ليس ضروريا حيث إن المعلومات الخاصة بالانتماء الى مجموعة معينة تكون كافية باستخدام المتغيرين الرمزيين س$_1$ ، س$_2$ فقط. فالفرد الذى لاينتمى إلى إحدى المجموعتين ج$_1$ أو ج$_2$ يجب أن ينتمى الى المجموعة ج$_3$.

والجدول الآتى رقم (٩٩) يوضح نتائج تكوين هذين المتغيرين الرمزيين .

المجموعة	ص	$س_1$	$س_2$
	٢	١	صفر
	٣	١	صفر
$ج_1$	٢	١	صفر
	٥	١	صفر
	٣	١	صفر
	٥	١	صفر
	٣	صفر	١
	٣	صفر	١
$ج_2$	٤	صفر	١
	٤	صفر	١
	٢	صفر	١
	٢	صفر	١
	٧	صفر	صفر
	[illegible]	صفر	صفر
$ج_3$	٤	صفر	صفر
	٧	صفر	صفر
	٨	صفر	صفر
	٤	صفر	صفر

جدول رقم (٩٩)

ويمكن استكمال تحليل الانحدار المتعدد فى حالة المتغيرات النوعية التى فى هذا المثال بنفس الطريقة التى عرضنا لها فى الفصل السادس عشر فى حالة المتغيرات الكمية . غير أننا هنا نستخدم المتغيرات الرمزية على أنها متغيرات مستقلة .

فى هذا المثال يمكننا اعتبار المتغيرين الرمزيين س_1 ، س_2 متغيرين مستقلين ، والدرجات التى حصل عليها كل فرد من أفراد المجموعات التجريبية متغيرا تابعا . ولذلك فإن الخطوة الثانية هى أن نحصل على قيمة كل من معاملى الانحدار ب_1 ، ب_2 أى الوزن المقدر لكل من المتغيرين س_1 ، س_2 ، وكذلك الثابت أ باستخدام المعادلات ١١ ، ٢ ، ٥ التى سبق أن ذكرناها فى الفصل السادس عشر وهى :

$$\text{ب}_1 = \frac{(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{ص}})(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2)(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_2\bar{\text{ص}})}{(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1^2)(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2)^2}$$

$$\text{، ب}_2 = \frac{(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1^2)(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_2\bar{\text{ص}}) - (\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2)(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{ص}})}{(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1^2)(\text{مج}\ \bar{\text{س}}_2^2) - (\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1\bar{\text{س}}_2)^2} \text{ ،}$$

$$\text{، أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}_1\bar{\text{س}}_1 - \text{ب}_2\bar{\text{س}}_2$$

والتعويض فى هذه المعادلات من البيانات الموضحة بجدول رقم (٩٩) يتطلب إيجاد المقادير الآتية :

$$\text{مج}\ \bar{\text{س}}_1^2 = \text{مج}\ \text{س}_1^2 - \frac{(\text{مج}\ \text{س}_1)^2}{\text{ن}}$$

$$= ٦ - \frac{(٦)^2}{١٨} = ٦ - ٢ = ٤$$

$$\text{، مج}\ \bar{\text{س}}_2^2 = \text{مج}\ \text{س}_2^2 - \frac{(\text{مج}\ \text{س}_2)^2}{\text{ن}}$$

$$٦ - \frac{(٦)^2}{١٨} = ٦ \quad ٢ =$$

$$،\ \text{مج}\ \acute{\text{س}}_{١}\ \acute{\text{س}}_{٢} = \text{مج}\ \text{س}_{١}\ \text{س}_{٢} - \frac{(\text{مج}\ \text{س}_{١})\ (\text{مج}\ \text{س}_{٢})}{\text{ن}}$$

$$= \text{صفر} - \frac{(٦)\ (٦)}{١٨}$$

$$= \text{صفر} - \frac{٣٦}{١٨} = -٢$$

$$،\ \text{مج}\ \acute{\text{س}}_{١}\ \acute{\text{ص}} = \text{مج}\ \text{س}_{١}\ \text{ص} - \frac{(\text{مج}\ \text{س}_{١})\ (\text{مج}\ \text{ص})}{\text{ن}}$$

$$= ٢٠ - \frac{(٧٤)(٦)}{١٨}$$

$$= ٢٠ - ٢٤,٦٦٧ = -\ ٤,٦٦٧$$

$$،\ \text{مج}\ \acute{\text{س}}_{٢}\ \acute{\text{ص}} = \text{مج}\ \text{س}_{٢}\ \text{ص} - \frac{(\text{مج}\ \text{س}_{٢})\ (\text{مج}\ \text{ص})}{\text{ن}}$$

$$= ١٨ - \frac{(٧٤)(٦)}{١٨}$$

$$= ١٨ - ٢٤,٦٦٧ = -\ ٦,٦٦٧$$

$$،\ \overline{\text{س}}_{١} = \frac{٦}{١٨} = ٠,٣٣٣$$

$$،\ \overline{\text{س}}_{٢} = \frac{٦}{١٨} = ٠,٣٣٣$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{٧٤}{١٨} = ٤,١١١$$

وبالتعويض فى الصورة رقم (١١) نجد أن :

$$ب_١ = \frac{(-٤,٦٦٧)(٤) - (-٢)(-٦,٦٦٧)}{(٤)(٤) - (-٢)^٢}$$

$$= \frac{-١٨,٦٦٨ - ١٣,٣٣٤}{١٢}$$

$$= \frac{-٣٢,٠٠٢}{١٢} = -٢,٦٧ \text{ تقريبا}$$

ويجب أن يلاحظ الباحث أن هذا الناتج يساوى الفرق بين متوسط المجموعة $ج_١$ ومتوسط المجموعة $ج_٣$.

وبالتعويض فى الصورة رقم (١٢) نجد أن :

$$ب_٢ = \frac{(٤)(-٦,٦٦٧) - (-٢)(-٤,٦٦٧)}{٤(٤) - (-٢)^٢}$$

$$= \frac{-٢٦,٦٦٨ - ٩,٣٣٤}{١٢}$$

$$= \frac{-٣٦,٠٠٢}{١٢} = -٣,٠٠ \text{ تقريبا}$$

وهذا الناتج يساوى الفرق بين متوسط المجموعة $ج_٢$ ومتوسط المجموعة $ج_٣$.

وبالتعويض فى الصورة رقم (٥) نجد أن :

ا = ٤,١١١ - (—٣,٦٧) (٠,٣٣٣) — (— ٣,٠٠) (٠,٣٣٣)

= ٤,١١١ + ٠,٨٨٩١١ + ٠,٩٩٩ = ٥,٩٩٩١١

= ٦,٠٠ تقريبا

وهذا الناتج يساوى متوسط المجموعة ج٣ . وهى المجموعة التى عينا فيها لكل من المتغيرين الرمزيين س١ ، س٢ القيمة صفر .

وبذلك تكون معادلة انحدار ص على المتغيرين المستقلين س١ ، س٢ هى :

صم = ا + ب١ س١ + ب٢ س٢

= ٦ — ٢,٦٧ س١ — ٣,٠٠ س٢

وباستخدام هذه المعادلة يمكن أن نوجد قيمة ص المتنبأ بها بمعلومية قيمة معينة من قيم س . وهذه القيمة المتنبأ بها هى متوسط المجموعة التى تنتمى إليها هذه القيمة المعينة من قيم س .

فمثلا بالنسبة للفرد الثانى فى كل مجموعة من المجموعات ج١ ، ج٢ ، ج٣ من الجدول رقم (٩٨)، أى الفرد الثانى والثامن والرابع عشر من الجدول رقم (٩٩) على الترتيب ، تكون قيم صم كالآتى :

صم للفرد رقم ٢ = ٦ - (٢,٦٧) (١) - (٣,٠٠) (صفر)

= ٣,٣٣

وهذه القيمة تساوى متوسط المجموعة ج١ .

، $ص_{\text{م}}$ للفرد رقم ٨ = ٦ - (٢,٦٧) (صفر) — (٣,٠٠) (١)

= ٣,٠٠

وهذه القيمة تساوى متوسط المجموعة $ج_{٢}$

، $ص_{\text{م}}$ للفرد رقم ١٤ = ٦ — (٢,٦٧) (صفر) - (٣) (صفر)

= ٦

وهذه تساوى متوسط المجموعة $ج_{٣}$

مربع معامل الارتباط المتعدد :

يمكن حساب مربع معامل الارتباط المتعدد بإحدى الطرق التى ذكرناها فى الفصل السادس عشر .

فثلا يمكن إيجاد مجموع المربعات الخاصة بالانحدار باستخدام الصورة رقم (١٨) وهى :

مجموع مربعات الانحدار = $ب_{١}$ مجـ $س_{١}$ صَ + $ب_{٢}$ مجـ $سَ_{٢}$ صَ

وبالتعويض من القيم السابقة نجد أن :

مجموع مربعات الانحدار = (— ٢,٦٧) (—٤,٦٦٧)
+ (٣,٠٠) (—٦,٦٦٧)

= ٣٢,٤٦٢

والمجموع الكلى للمربعات من جدول رقم (٩٩) :

$$\text{مجـ ص}^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= ٣٦٤ - \frac{(٧٤)^{٢}}{١٨}$$

= ٥٩,٧٧٨

وبذلك يكون مجموع مربعات البواقى =

= ٥٩,٧٧٨ − ٣٢,٤٦٢ = ٢٧,٣١٦

ويمكن إيجاد قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين الرمزيين س١ ، س٢ باستخدام الصورة رقم (١٩) المذكورة فى الفصل السادس عشر وهى :

$$ر^{٢}_{م} = \frac{م م انحدار}{م م ص}$$

$$= \frac{٣٢,٤٦٢}{٥٩,٧٧٨} = ٠,٥٤٣$$

أى أن ٥٤,٣ ٪ من مجموع مربعات قيم المتغير ص (الدرجات التى حصل عليها الأفراد فى مجموعة المشكلات) يمكن تفسيرها بمعلومية انتماء الفرد إلى إحدى المجموعات الثلاث . أو بمعنى آخر ٥٤,٣ ٪ من تباين الدرجات التى حصل عليها الأفراد فى مجموعة المشكلات يرجع الى عضويتهم أو انتمائهم إلى إحدى المجموعات التجريبية الثلاث .

وبالطبع يجب أن يختبر الباحث الدلالة الإحصائية لقيمة $ر^{٢}_{م}$ ليتأكد من أن انتماء الفرد إلى مجموعة تجريبية معينة يسهم إسهاما فعليا فى التنبؤ بدرجته فى مجموعة المشكلات .

استخدامات أخرى للمتغيرات الرمزية :

يمكن أن يستخدم الباحث فكرة المتغيرات الرمزية فى مواجهة مشكلة انحناء العلاقة بين المتغيرات فى تحليل الانحدار .

فمثلا اذا وجد الباحث أن العلاقة بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة غير خطية ، ولكنه لايعرف على وجه التحديد طبيعة أو شكل هذه العلاقة ، فإنه يمكنه فى هذه الحالة تجزئة هذا المتغير المستقل إلى عدد معين من الأقسام وليكن ك،

ثم يقوم بتكوين عدد قدره ك — ١ من المتغيرات الرمزية التى تشير إلى هذه الأقسام . ويستخدم هذه المتغيرات الرمزية كمتغيرات مستقلة فى تحليل الانحدار المتعدد كما سبق أن أوضحنا . ثم يوجد قيمة ص م لكل قسم من أقسام المتغير المستقل . ويمكنه بعد ذلك أن يمثل على ورقة رسم بيانى قيم ص م على المحور الرأسى ومنتصفات كل فئة من فئات المتغير المستقل س على المحور الأفقى وبهذا يستطيع أن يأخذ فكرة سريعة عن شكل العلاقة بين المتغيرين .

ويجب أن نوصى الباحث بعدم اللجوء الى هذه التجزئة اذا كان لديه معلومات مسبقة عن طبيعة هذه العلاقة ، وإنما يفضل استخدام المتغير الفترى دون تجزئته واختيار أسلوب تحليل الانحدار الذى يناسب هذه العلاقة . أما إذا لم تكن لديه هذه المعلومات فإنه يمكنه استخدام فكرة المتغيرات الرمزية لأنها تتميز بدرجة كبيرة من المرونة فى تحليل مثل هذه البيانات .

تمارين على الفصل الثامن عشر

(١) اذكر مجموعة من المتغيرات النوعية التى ترى أنها ربما ترتبط بالتحصيل الدراسى لطلاب الجامعة .

(٢) إذا كان لديك أربع مجموعات تجريبية مختلفة . ماعدد المتغيرات الرمزية المطلوبة لتحليل الانحدار ؟ وضح ذلك فى جدول .

(٣) فيما يلى بيانات خاصة بتجربة أجريت على ثلاث مجموعات من الأفراد $ج_1$ ، $ج_2$ ، $ج_3$:

$ج_1$	$ج_2$	$ج_3$
٢	٤	١١
٦	٨	٢٠
٧	٦	١٥

استخدم فكرة المتغيرات الرمزية فى إيجاد معادلة الانحدار المتعدد ، وأوجد مربع معامل الارتباط المتعدد .

(٤) أجرى أحد الباحثين دراسة على أربع مجموعات تجريبية $ج_1$ ، $ج_2$ ، $ج_3$ ، $ج_4$. وقام بترميز المتغير النوعى (المتغير المستقل) كالآتى :

المتغير الرمزى $س_1$ حيث رمز فيه بالرقم ١ للأفراد فى المجموعة $ج_1$ ، والرقم صفر لجميع أفراد المجموعات الأخرى .

المتغير الرمزى $س_{٢}$ حيث رمز فيه بالرقم ١ للأفراد فى المجموعة $ج_{٢}$ ، والرقم صفر لجميع أفراد المجموعات الأخرى .

المتغير الرمزى $س_{٣}$ حيث رمز فيه بالرقم ١ للأفراد فى المجموعة $ج_{٣}$ ، والرقم صفر لجميع أفراد المجموعات الأخرى .

ثم قام بإجراء تحليل انحدار المتغير التابع (ص) على المتغيرات الرمزية الثلاثة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ وحصل على معادلة الانحدار الآتية .

$$ص_{م} = ٦,٠٠ + ٤,٠٠ \, س_{١} - ٢,١ \, س_{٢} - ٣,٠٠ \, س_{٣}$$

باستخدام هذه المعادلة أوجد متوسطات المجموعات التجريبية الأربعة فى المتغير التابع .

(٥) أراد باحث دراسة العلاقة بين الانتماء إلى نوع معين من التعليم والاتجاه نحو التحديث .

فطبق مقياسا للاتجاه نحو التحديث على أربع عينات من طلاب التعليم العام ، والتعليم المهنى ، والتعليم الأزهرى ، والتعليم العسكرى ، وحصل على الدرجات الافتراضية الآتية :

تعليم عام	تعليم مهنى	تعليم أزهرى	تعليم عسكرى
٢	٣	٤	٣
٣	٣	٦	٣
٤	٤	٦	٤
٤	٥	٧	٦
٥	٥	٧	٦
٥	٦	٨	٧
٦	٦	٩	٨
٦	٧	١٠	٨
٧	٨	١١	١٠
٨	٨	١٢	١٠

باستخدام فكرة المتغيرات الرمزية أوجد :

(ا) قيمة مربع معامل الارتباط المتعدد بين درجات الاتجاه نحو التحديث وانتماء الطالب إلى تعليم معين ، وفسر القيمة الناتجة .

(ب) معادلة الانحدار المتعدد :

ثم قارن بين أوزان الانحدار والفروق بين متوسطات المجموعات .

الفصل التاسع عشر

تحليل المسارات

- مفهوم العلية أو السببية
- تخطيط المسارات
- معاملات المسارات
- بناء نماذج المسارات
- طرق حساب معاملات المسارات
- نماذج المسارات التي تشتمل على متغيرين
- نماذج المسارات المتعددة المتغيرات
- خطوات حساب معاملات المسارات

مقدمة :

يتضح من عرضنا فى الفصول السابقة أهمية تحليل الانحدار البسيط والانحدار المتعدد فى تحليل بيانات البحوث النفسية والتربوية . كما يتضح أن مناقشتنا انصبت على استخدام تحليل الانحدار فى أغراض التنبؤ . وفى الحقيقة توجد مجموعة من الأساليب والطرق التى تعتمد على مفاهيم الانحدار والتى يمكن أن يستخدمها الباحث فى أغراض التفسير يطلق عليها طرق « تحليل المسارات Path Analysis » .

فالتنبؤ والتفسير هما جانبان من جوانب البحث النفسى والتربوى . فإذا كان هدف الباحث التنبؤ بمتغير تابع بمعلومية متغير مستقل أو أكثر ، فإنه يمكنه استخدام تحليل الانحدار فى التوصل إلى معادلة انحدار تفيد فى هذا التنبؤ . ويتم اختيار المتغيرات المستقلة التى تسهم بدرجة أفضل فى التنبؤ بالمتغير التابع . وهنا ربما لايهتم الباحث اهتماما خاصا بالدراسة المتعمقة فى أسباب حدوث الظاهرة المتنبأ بها ، فكل مايهمه هو التنبؤ بدرجة كبيرة من الدقة بالظاهرة موضع البحث . ولكن فى كثير من البحوث النفسية والتربوية لايقتصر اهتمام الباحث على التنبؤ ، وإنما يود أيضاً تفسير الظاهرة ، أى تفسير تباين المتغير التابع بمعلومية متغير مستقل أو أكثر .

فتفسير الظواهر المختلفة هو الهدف الرئيسى للعلم ، ونقصد بالتفسير محاولة التوصل إلى أسباب حدوث الظاهرة موضع البحث .

فعندما يقوم الباحث مثلا بدراسة أثر التنشئة الاجتماعية على تكوين بعض سمات شخصية الطفل ، أو أثر الاتجاهات على الإدراك ، أو أثر التعزيز على السلوك اللاحق ، فإنه يكون بصدد دراسة الأسباب المحتملة للسلوك فى كل حالة . ولذلك يحاول الباحث تصميم مواقف تجريبية يستطيع فيها أن يضبط العوامل العارضة

التي يمكن أن تؤثر في المتغير التابع حتى يتسنى له أن يعزى التباين الملاحظ في هذا المتغير إلى المتغير المستقل .

ولكن أحيانا يصعب على الباحث — وبخاصة في البحوث غير التجريبية — أن يتحكم في متغيرات بحثه ، لهذا يلجأ عادة إلى طرق الضبط الإحصائي التي عرضنا لها في الفصل السابع عشر . وتعتمد هذه الطرق كما سبق أن رأينا على معاملات الارتباط . وبالطبع لا نستطيع تفسير هذه المعاملات على أنها دليل على علاقات سببية أو علاقات أثر ونتيجة سواء حصلنا على قيمها من بيانات بحوث تجريبية أو غير تجريبية . فالبحث في العلاقات السببية أو العلية Causal Relations ليس بالأمر اليسير ، إذ يتطلب ذلك افتراض بعض النماذج التفسيرية Explanatory Models التي توضح تأثير المتغيرات التي تشتمل عليها الظاهرة موضع البحث بعضها على البعض الآخر ، واختبار صحة هذه النماذج باستخدام البيانات التي يحصل عليها الباحث .ويعتمد بناء هذه النماذج على الإطار النظري أو المنطقي الذي يتبناه الباحث . فإذا لم تتسق البيانات مع النموذج التفسيري المقترح يبرز الشك في الإطار النظري أو المنطقي الذي بني النموذج على أساسه .

أما إذا اتسقت البيانات مع النموذج فإن هذا لا يعد دليلا كافيا على أن الإطار النظري صحيح، ولكنه يدل على أن البيانات تؤكد هذا الإطار وتتسق معه، فمن الممكن أن تتسق البيانات مع نماذج تفسيرية مختلفة . فمثلا إذا افترضنا أن المتغير س يؤثر في المتغير ص الذي يؤثر بدوره في المتغير ع هو نموذج تفسيري لظاهرة معينة، أو إذا افترضنا أن المتغير ص يؤثر في المتغير س الذي يؤثر بدوره في المتغير ع هو نموذج تفسيري آخر لنفس الظاهرة، فإن البيانات ربما تتسق مع كل من النموذجين . ولكن ربما يرفض الباحث النموذج التفسيري الثاني إذا تبين له أن المتغير س يسبق المتغير ص من الناحية الزمنية . وفي الحقيقة يحتاج الباحث إلى أسلوب في تحليل البيانات يمكن أن يستخدم بصورة أكثر انتظاما واتساقا في اختبار صحة النماذج المختلفة التي يفترضها لتفسير نظام العلاقات بين المتغيرات

موضع البحث . وهذا الأسلوب هو تحليل المسارات . وقد توصل عالم الوراثة سيوال رايت Sewall Wright إلى هذا الأسلوب عام ١٩٢١ ، وعرض له فى سلسلة من المقالات التى نشرت فى الأعوام ١٩٢١ ، ١٩٣٤ ، ١٩٥٤ ، ١٩٦٠ كوسيلة تساعد على التعبير بصورة رياضية عن الوراثة . وقد أخذ هذا الأسلوب فى تحليل البيانات فى الانتشار فى كثير من العلوم الأخرى وبخاصة فى العلوم الاجتماعية حيث يرجع الفضل فى ذلك إلى دانكان Duncan عام ١٩٦٦ . ولكن نظرا لعدم تعرض كثير من المراجع الإحصائية التقليدية لهذا الأسلوب سواء بالإشارة أو التفصيل ، فإن كثيرا من الباحثين فى العلوم السلوكية لا يستخدمونه رغم أهميته فى اختبار صحة النظريات ، واستنتاج التفسيرات المنطقية للظاهرة موضع البحث .

ولا ندعى أننا سوف نحيط فى هذا الفصل بجميع جوانب هذا الأسلوب . فتحليل المسارات يحتاج إلى مؤلف خاص إذا أردنا عرض جميع الطرق التى يشتمل عليها . ولكننا سوف نعرض المبادىء الأساسية التى تمكن الباحث من فهم طبيعة هذا الأسلوب المستحدث فى تحليل البيانات . وإذا أراد الاستزادة عليه أن يرجع إلى قائمة المراجع المذكورة فى آخر هذا الكتاب .

تحليل المسارات ومفهوم العلية أو السببية :

يخطىء من يتصور أن تحليل المسارات هو طريقة للكشف عن العلية أو السببية . وفى هذا يقول رايت Wright : « إننا لا نهدف من تحليل المسارات إلى استنباط علاقات علية أو سببية بين مجموعة من المتغيرات باستخدام قيم معاملات الارتباط ، وإنما نهدف إلى تطبيق هذا الأسلوب من أساليب تحليل البيانات على نموذج سببى Causal Model نفترضه على أساس نظرى معين » . إذ أن هناك ثلاثة شروط يجب أن تتحقق إذا أردنا استنباط علاقة سببية بين متغيرين س ، ص .

الشرط الأول هو أنه يجب أن يكون هناك تغاير أو تباين متلازم بين المتغيرين .

والشرط الثانى يتطلب وجود ترتيب زمنى بينهما . وهذين الشرطين يسهل التحقق منهما . إذ يمكن عادة قياس التغاير وملاحظة التسلسل الزمنى بين متغيرين .

والشرط الثالث يؤكد أنه لكى توجد علاقة سببية بين المتغيرين يجب ألا ينعدم التباين المتلازم بينهما إذا استبعدت الآثار الناتجة عن المتغيرات الدخيلة

Confounding Variables.

أى أن هذا الشرط يتطلب استبعاد جميع العوامل السببية الأخرى المحتملة . ونظرا لإمكانية وجود عدد لانهائى من هذه العوامل ، وعدم وجود اختبار أو معامل إحصائى يساعدنا على اتخاذ القرار الصحيح فى هذه الحالة ، فإنه يصعب التحقق من هذا الشرط ، لذلك يجب أن نفترض نموذجا معينا يمثل الظاهرة موضع البحث بحيث يكون أقرب ما يمكن فى تمثيله لواقع هـــذه الظاهرة ، ونقوم بفحص العلاقات القائمة بين مجموعة محدودة من المتغيرات التى يمكن أن يشتمل عليها هذا النموذج . ويتوقف اختيار هذه المتغيرات على الإطار النظرى والفكرى للمشكلة موضع البحث . كما يجب أن يشمل النموذج المتغيرات الدخيلة التى يمكن أن تؤثر فى الظاهرة . وإذا تبين أن هناك متغير دخيل لم نأخذه فى الاعتبار ، فإننا يجب أن نقيس هذا المتغير ونعيد تعديل النموذج بحيث يشتمل على هذا المتغير الجديد .

تخطيط المسارات :

يمكن تمثيل نماذج العلاقات السببية بين مجموعة من المتغيرات بأشكال تخطيطية . وتوجد قواعد يمكن أن يتبعها الباحث عند رسم وقراءة هـــذه الأشكال كما هو الحال عند رسم وقراءة خرائط الطرق نلخصها فيما يلى :

(١) تحديد مجموعة المتغيرات التى تشتمل عليها الظاهرة موضـــع البحث .

(٢) التمييز بين مايسمى بالمتغيرات الخارجية Exogenous Variables والمتغيرات الداخلية Endogenous Variables . ونقصد بالمتغيرات الخارجية تلك المتغيرات التي لانحاول تفسير تباينها أو العلاقات الداخلية السببية القائمة بينها في النموذج المقترح . أما المتغيرات الداخلية فهي تلك المتغيرات التي يمكن تفسير تباين كل منها بمعلومية المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية الأخرى في النموذج .

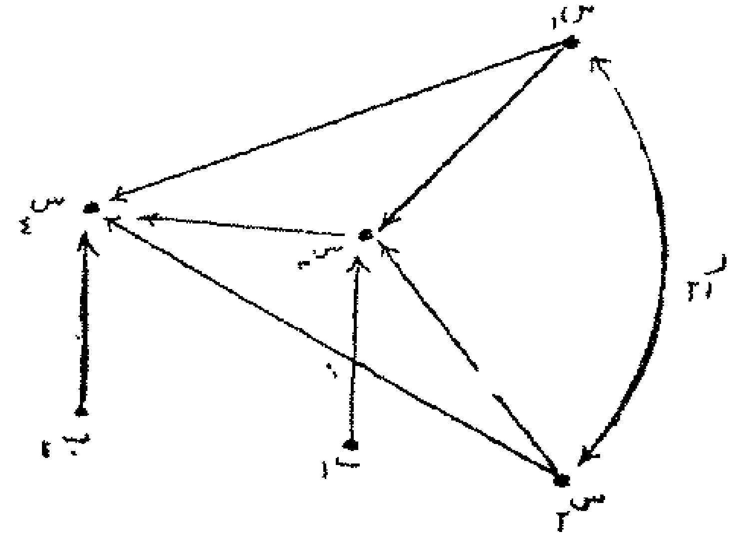
(٣) تحديد ترتيب زمني واضح بين المتغيرات الداخلية .

(٤) رسم الشكل التخطيطي للمتغيرات بحسب ترتيبها الزمني من اليمين إلى اليسار . ونربط بين كل متغيرين خارجيين منها بخط منحنى (قوس) ينتهي كل من طرفيه بسهم للدلالة على أننا لانستطيع اعتبار أن أحدهما سبب للآخر . كما نربط بين المتغيرات الداخلية بخطوط مستقيمة (أشعة أو مسارات) ينتهي أحد طرفي كل منها بسهم يتجه من المتغير المستقل (الذي يفترض أنه سبب Cause) إلى المتغير التابع (الذي يفترض أنه أثر أو نتيجة Effect) للمتغير المستقل .

والنماذج السببية التي يمثلها هذا النوع من التخطيطات تسمى نماذج ذات اتجاه واحد Recursive Models .

لأنه لايمكننا اعتبار أحد المتغيرات سببا ونتيجة في نفس الوقت لمتغير آخر . وتوجـــد أنواع أخرى من النماذج السببية تسمى النماذج التبادلية Non Recursive Models أو نماذج التغذية الراجعة Feedback Models ، لأن هذه النماذج تعتمد على افتراض وجود علاقات سببية تبادلية بين بعض المتغيرات . وهذا النوع من النماذج يعتبر أكثر تعقيدا وأقل استخداما في البحوث النفسية والتربوية من النماذج ذات الاتجاه الواحد ، ولذلك سنقتصر في هذا الفصل على مناقشة بعض النماذج ذات الاتجاه الواحد .

والمثال الآتي يوضح فكرة المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخليه في نموذج سببي بسيط يتكون من أربعة متغيرات .



شكل رقم (٧٠)

شكل تخطيطي لنموذج سببي يشتمل على أربعة متغيرات

فإذا نظرنا إلى الشكل التخطيطي رقم (٧٠) الذى يمثل العلاقات السببية بين هذه المتغيرات التي رمزنا لها بالرموز $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ بعد ترتيبها فى تسلسل سببي من اليمين إلى اليسار ، نجد أن المتغيرين $س_1$ ، $س_2$ هما المتغيران الخارجيان Exogenous Variables . ويمثل الارتباط بينهما $ر_{21}$ بخط منحنى (قوس) ينتهى كل من طرفيه بسهم للدلالة على أننا لن نستخدم هذا الارتباط فى التحليل ، وكذلك للدلالة على تماثل العلاقة بين $س_1$ ، $س_2$.

أما المتغيران $س_3$ ، $س_4$ فهما المتغيران الداخليان Endogenous Variables والخطوط المستقيمة (الأشعة أو المسارات Paths) تمثل التأثيرات السببية Causal Effects لكل متغير على المتغير الآخر . والمتغير المؤثر يسمى المتغير المستقل ، والمتغير الذى يقع عليه التأثير يسمى المتغير التابع .

وبذلك يتضح من الشكل أن المتغير $س_3$ هو متغير تابع بالنسبة للمتغيرين $س_1$ ، $س_2$ ، والتأثير عليهما من المتغير $س_3$ هو تأثير مباشر

Direct Effect . ولكن المتغير س٣ (وهو متغير داخلي) يصبح متغيراً مستقلا بالنسبة للمتغير الداخلي س٤ ، لأن المتغير س٣ أصبح يؤثر على المتغير س٤ .

أي أن المتغير الداخلي يمكن أن يكون متغيراً تابعا بالنسبة لمجموعة معينة من المتغيرات التي يشتمل عليها النموذج السببي (التفسيري) ثم يصبح متغيراً مستقلا بالنسبة لمجموعة أخرى من المتغيرات في نفس النموذج .

وبالطبع من المستحيل أن يمثل الباحث جميع المتغيرات التي تشتمل عليها الظاهرة موضع البحث في النموذج الذي يفترضه لكي يحدد التباين الكلي لأحد المتغيرات . لذلك فإنه من الضروري أن نقدم نوعا ثالثا من المتغيرات التي تسمى متغيرات البواقي Residual Variables ، وهي تشمل جميع العوامل التي تؤثر في الظاهرة ولكن لم يتضمنها النموذج المقترح ، وهذه متغيرات غير مقاسة . في الشكل التخطيطي السابق رمزنا لمتغيري البواقي بالرمزين ب١ ، ب٢ ومثلنا كلا منهما بخط مستقيم ينتهي أحد طرفيه بسهم يتجه من متغير البواقي إلى متغير تابع .

ويفترض أن هذين المتغيرين لا يرتبطان بعضهما ببعض أو بغيرهما من المتغيرات التي يشتمل عليها النموذج فالمتغير ب١ لا يرتبط بالمتغير ب٢ أو بالمتغيرات س١ ، س٢ ، س٣ . والمتغير ب٢ لا يرتبط بأي من المتغيرات س١ ، س٢ ، س٣ .

ونظراً لأن التأثير السببي في هذا النموذج له اتجاه واحد فإنه يعتبر من النماذج السببية ذات الاتجاه الواحد Recursive Models .

معاملات المسارات Path Coefficients .

ربما يتبادر إلى ذهن الباحث الآن بعض الأسئلة التي تستحق الإجابة وهي :

١ — هل يمكن تحديد قيمة لكل مسار بعد تمثيله في الشكل التخطيطي ؟ وما تفسير هذه القيمة ؟

٢ — ما هى العلاقة بين قيمة معامل المسار ومعامل الارتباط والوزن المقدر للانحدار ؟

٣ — ما هى الفروض التى يبنى عليها تحليل المسارات ؟

٤ — ما علاقة تحليل المسارات بتحليل الانحدار ؟

وفى الحقيقة أن هذه الأسئلة مترابطة ، لذلك فإننا لن نجيب عليها الواحد تلو الآخر ، وإنما سيتضح للباحث الإجابة عليها من خلال عرضنا للطرق المستخدمة فى تحليل المسارات . وسنبدأ بمفهوم معاملات المسارات Parth Coefficients . ومعامل المسار يدل على الأثر المباشر لمتغير (سبب Cause) على متغير آخر (نتيجة Effect) .

أى أن معامل المسار يعبر عن الأثر المتوقع فى متغير الذى ينتج عن تغير الإنحراف المعيارى لمتغير آخر بقدر الوحدة (بعد تثبيت جميع المتغيرات الأخرى). وهذا التغير يعبر عنه بواسطة الانحراف المعيـــارى للمتغير المتنبىء (التابع) . ومعامل المسار يجب أن يقيس الأثر المباشر لمتغير على متغير آخر بجزء الانحراف المعيارى للمتغير الثانى الذى يرجع إلى المتغير الاول إذا كان تباين المتغير الأول هو نفس التباين الملاحظ فى العينة موضع البحث بعد تثبيت العوامل الأخرى . ومن هذا يتبين أن مربع معامل المسار يقيس الجزء من تباين المتغير التابع الذى يرجع إلى المتغير الذى يؤثر فيه تأثيراً مباشراً شأنه شأن معامل التحديد فى تحليل الانحدار .

ويرمز عادة لمعامل المسار بالحرف الإنجليزى P ويوضع تحتـــه حرفان صغيران او عددان يدل اولهما على المتغير التابع (النتيجة Effect) ويدل ثانيهما على المتغير المستقل (السبب Cause) ، ولذلك سنرمز له فى هذا الفصل بالحرف (م)

وتحته الحرفان الصغيران أو العددان ، فمثلا $م_{ص س}$ ترمز إلى الأثر المباشر للمتغير (س) على المتغير (ص) .

• $م_{١٣}$ ترمز إلى الأثر المباشر للمتغير (١) على المتغير (٣) .

ويمكن التعبير عن معاملات المسارات بصورة غير معيارية أى ناتجة عن استخدام الدرجات الخام مباشرة Raw Data شأنها شأن أوزان الانحدار العادية التى رمزنا لها فى الفصول السابقة بالحرف (ب) ، وعندئذ تسمى معاملات المسارات غير المعيارية Unstandaradized Coefficients أو معاملات مسارات الانحدار Path Regression Coefficients . كما يمكن التعبير عنها بصورة معيارية، أى ناتجة عن استخدام الدرجات المعيارية (د) التى عرضنا لها بالتفصيل فى الفصل الخامس بدلا من الدرجات الخام شأنها شأن أوزان الانحدار المعيارية التى يرمز لها عادة بالرمز (β) وتقرأ (بيتا)، وعندئذ تسمى معاملات المسارات المعيارية Standaradized Coefficients .

والرمز (م) الذى سوف نستخدمه فى هذا الفصل يرمز إلى معامل المسار فى صورته المعيارية .

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكننا تحويل أوزان الانحدار العادية (ب) للمتغير ص على المتغير س إلى أوزان انحدار معيارية (β) باستخدام الصورة الآتية :

$$\beta_{ص س} = ب_{ص س} \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١)$$

حيث $ع_{ص}$ ترمز إلى الانحراف المعيارى للمتغير ص .

• $ع_{س}$ ترمز إلى الانحراف المعيارى للمتغير س .

وبالمثل يمكن تحويل معاملات المسارات العادية التي تدل على أثر المتغير (س) على المتغير (ص) إلى معاملات مسارات معيارية باستخدام الصورة الآتية :

$$\text{معامل المسار المعيارى} = \text{معامل المسار العادى} \times \frac{\text{الانحراف المعيارى للمتغير التابع (ص)}}{\text{الانحراف المعيارى للمتغير المستقل (س)}} \quad \ldots \quad (٢)$$

فأوزان الانحدار تعتبر حالة خاصة من معاملات المسارات ، وتحليل الانحدار الخطى يعتبر حالة خاصة من تحليل المسارات ، فكلاهما من عائلة النماذج الخطية العامة General Linear Models .

وتحليل المسارات يقدم للباحث قدراً من المعلومات الخاصة بالعلاقات القائمة بين نظام متغيرات بحثه أكبر مما يقدمه تحليل الانحدار الخطى . وهذا يساعده على تفسير العمليات السببية ، وتجزئة هذه العمليات إلى آثار مباشرة وآثار غير مباشرة لكل متغير على الآخر .

وربما يتساءل الباحث الآن : هل يستخدم معاملات المسارات العادية أم المعيارية فى تحليل بيانات بحثه ؟

وفى الحقيقة لا توجد إجابة محددة على هذا التساؤل ، فمشكلة الاختيار بين نوعى المعاملات ما زالت مثار جدل بين المهتمين بأسلوب تحليل المسارات . ولكننا نستطيع أن نوجه الباحث إلى أن الهدف من البحث هو الذى يملى عليه نوع المعامل المطلوب . وقد اتفق معظم الباحثين على أنه إذا كان الهدف من البحث هو إجراء موازنات بين مجموعات جزئية من البيانات مثل البنين فى مقابل البنات ، أو الريف فى مقابل الحضر ، فإنه يفضل استخدام معاملات المسارات العادية فى هذه الحالة (بافتراض أن ميزان قياس المتغيرات محدد ، أى أنه يجب أن يتسق ميزان قياس كل متغير فى المسارات المختلفة للنموذج) نظراً لأن هذه المعاملات

يسهل تفسيرها ، كما أنها لا تتأثر باختلاف تباين نفس المتغير نتيجة لتحليل مجموعة جزئية من البيانات .

أما إذا كان الهدف من البحث معرفة الأهمية النسبية لمتغيرات معينة في مجتمع ما أو في مجتمعات فرعية ، فإنه يفضل استخدام معاملات المسارات المعيارية لأنه يمكن في هذه الحالة أخذ اختلاف موازين قياس المتغيرات في الاعتبار . ويقترح رايت Wright — مؤسس تحليل المسارات — أنه يجب النظر إلى نوعي المعاملات على أنهما « مظهران لنظرية واحدة ، وليس على أنهما « بديلان يجب أن نختار بينهما » .

ولذلك يوصي رايت Wright بأن يسجل الباحث نوعي المعاملات في بحثه، وإذا أراد أن يسجل أحدهما فقط فإنه يجب عليه أن يذكر الانحرافات المعيارية للمتغيرات حتى يتمكن القارىء من استنتاج المعامل الآخر باستخدام الصورة السابقة رقم (٢) .

بناء نماذج المسارات :

إن نقطة البدء في تحليل المسارات هي بناء نموذج سببي Causal Model للظاهرة التي يود الباحث تفسيرها ، وتمثيل هذا النموذج بشكل تخطيطي يوضح العلاقات بين المتغيرات التي يشتمل عليها ، وهذا بالطبع يتطلب من الباحث مراجعة البحوث والنظريات والدراسات السابقة التي تناولت الظاهرة موضع البحث لكي يتمكن من تحديد المتغيرات الهامة ، وتأثير كل منها على الآخر ، وترتيبها من من الوجهة السببية بما يتفق ونتائج هذه البحوث والنظريات . أو ربما يتبنى الباحث نظرية معينة ويقوم ببناء نموذجه بحيث يتسق مع هذه النظرية . ولذلك يجب أن تكون عمليات قياس المتغيرات التي يشتمل عليها النموذج وجمع البيانات متسقة أيضاً مع النظرية . ويعتمد صدق نتائج تحليل المسارات إلى حد كبير على مدى ثقة الباحث في النموذج الذى يمثل الظاهرة موضع البحث . فالترتيب السببي الخاطىء للمتغيرات التي يشتمل عليها النموذج مثلا تؤدى إلى معاملات ارتباط وهمية أو زائفة ، وتعالج في التحليل على أنها معاملات حقيقيـــة .

مما يؤدى إلى قيم خاطئة لمعاملات المسارات . وقد أطلق جوردون Gordon على هذا النوع من الخطأ اسم « عزل الأثر الوهمى False Partialing » .

كما أن إغفال الباحث أو حذفه لبعض المتغيرات الهامة المرتبطة بالظاهرة موضع البحث يؤدى إلى نوع من التحيز عند حساب معاملات المسارات .

فإذا أغفل الباحث متغيراً خارجيا Exogenous Variable مثلا ، فإن هذا يؤثر بلا شك على تقدير معاملات المسارات الخاصة بالمتغيرات الخارجية الأخرى والمتغيرات الداخلية Endogenous Variables .

وقد سبق أن ذكرنا أن المتغير الداخلى يمكن أن يصبح متغيراً خارجياً بالنسبة للمتغيرات الأخرى ، وهذا يدل على أن إغفال أو حذف أحد المتغيرات الداخلية التى تسبق المتغيرات الأخرى فى الترتيب السببى ربما يؤثر تأثيراً متحيزاً فى قيم معاملات المسارات الخاصة بالمتغيرات التى تلى هذا المتغير . وتعتمد درجة هذا التحيز على مقدار التداخل أو الارتباط بين هذا المتغير والمتغيرات الأخرى التى يشتمل عليها النموذج . فكلما زاد هذا المقدار تزيد درجة التحيز ويقل بالتالى التحيز فى قيمة معامل التحديد .

أما إذا كان المتغير الداخلى الذى أغفله الباحث لا يرتبط بالمتغيرات الأخرى التى يشتمل عليها النموذج ، فإنه لا يكون له تأثير على معاملات المسارات ولكنه سوف يقلل من نسبة التباين الذى يمكن تفسيره .

لذلك يجب على الباحث العناية باختيار المتغيرات وعدم إغفال أى متغير هام حتى لا يقلل من صدق نتائج تحليل النماذج التفسيرية التى يفترضها .

وتوجد بعض الفروض التى يجب أن يراعيها الباحث قبل البدء فى تطبيق طرق حساب معاملات المسارات التى سنعرض لها بعد قليل . وهذه الفروض هى :

١ — أن تكون العلاقة بين المتغيرات خطية Linear ، ولذلك يجب أن يتحقق الباحث من شكل العلاقة بين كل متغيرين يشتمل عليهما النموذج وتوجد طرق مختلفة لاختبار فرض خطية العلاقة عرضنا أحدها فى الفصل السابع ، والطريقة الأولى هى أن يقوم الباحث برسم شكل انتشارى لأزواج قيم كل من المتغيرين ، ويفحص هذا الشكل بغرض أخذ فكرة سريعة عن نزعة اقتران هذه القيم. ويسهل على الباحث إجراء ذلك إذا كان عدد أفراد العينة قليلا . والطريقة الثانية هى أن يستخدم أحد برامج الحاسب الآلى لإيجاد قيمة كل من معامل ارتباط بيرسون (ر) ونسبة الارتباط (η) بين كل متغــيرين ، ثم يقارن بين القيمتين ، فإذا وجد اختلافا ملحوظا بين كل قيمتين بغض النظر عن الدلالة الإحصائية لهذا الاختلاف، فإنه لايجب أن يبدأ فى حساب قيم معاملات المسارات قبل أن يجرى نوعا من التحويلات الرياضية التى عرضنا بعضا منها فى الفصل الخامس عشر على قيم أى من هذين المتغيرين أو كليهما لكى تصبح العلاقة بينهما خطية .

٢ — أن تكون العلاقة بين المتغيرات جمعية Additive ، أى لا يوجد تفاعل Interaction بين المتغيرات . فعندما تختلف العلاقة بين متغيرين تبعا لمستوى متغير ثالث فإننا نقول أن هناك تفاعلا بين المتغيرات الثلاثة . وفى الحقيقة يمكن أن يتأكد الباحث من هذا الفرض باستخدام بعض البرامج الجاهزة للحاسب الآلى أحدها هو البرنامج الذى صممه سونكويست Sonquist ومورجان Morgan عام ١٩٦٤ ويسمى برنامج الكشف الآلى عن التفاعلات Automatic Interaction Detection (AID) , وهو جزء من حزمة برامج SPSS وعلى الباحث أن يرجع إلى الدليل الخاص بهذه الحزمة قبل أن يستخدم هذا البرنامج .

٣ — أن يكون ميزان قياس المتغيرات من المستوى الفترى . وفى الحقيقة يعتبر هذا الفرض أقل الفروض أهمية ، إذ يمكن أحيانا استخدام متغيرات من المستوى الاسمى أو الرتبى فى تحليل المسارات كما هو الحال فى تحليل الانحدار .

٤ — ألا ترتبط متغيرات البواقى بعضها ببعض أو بغيرها من المتغيرات فى النموذج الذى يفترضه الباحث .

فأى نموذج سببى لابد أن يشتمل على بعض الخطأ أو البواقى Residuals . وتحليل المسارات الذى يعتمد على تحليل الانحدار المتعدد ، يفترض ، فيه أن معاملات الارتباط بين البواقى وجميع المتغيرات الخارجية Exogenous Variables فى معادلة معينة تساوى الصفر . وقد وضعنا كلمة «يفترض» بين قوسين لتدل على أنه ما لم يتحقق هذا الفرض فإن طرق تقدير المربعات الصغرى Least-Square Estimation لا تؤدى إلى حل لمعادلات الانحدار . وبعبارة أخرى عندما يحل الباحث معادلات الانحدار المعتادة ، فإنه يكون بذلك قد جعل جميع معاملات الارتباط بين البواقى تساوى صفراً . وعدم تحقق هذا الفرض يؤدى إلى تحيز فى أوزان الانحدار .

ولكن فى كثير من الأحيان لا تكون هذه الارتباطات مساوية للصفر . فعدم تحقق أى من الفروض السابقة يؤدى إلى وجود ارتباطات غير صفرية بين البواقى أو بين البواقى والمتغيرات الخارجية .

فإذا كان هناك تفاعل بين المتغيرات ، فإن البواقى سوف ترتبط بمتغيرين خارجيين على الأقل .

وإذا أغفل الباحث بعض المتغيرات الخارجية الهامة ، فإن الجزء المشترك بين المتغيرات المتضمنة فى النموذج وهـــذه المتغيرات الخارجية سوف يرتبط بالبواقى مما يؤدى إلى بعض الأخطاء فى تقدير قيم معاملات المسارات .

وكذلك إذا لم يتحر الباحث الدقة فى ترتيب المتغيرات من الوجهة السببية مما يجعل تحديد المتغيرات الخارجية والداخلية غير صحيح ، فإن هذا سوف يؤدى إلى الخطأ فى تقدير معاملات المسارات وكذلك فى بواقى المتغيرات التى لم توضع فى ترتيبها الصحيح .

وباختصار فإن هذا الفرض يتضمن اعتبار أن المتغيرات الداخلية هى تركيب خطى من المتغيرات الخارجية أو المتغيرات الداخلية الأخرى فى النموذج ومتغير

البواقى ، واعتبار المتغيرات الخارجية بمثابة « معطيات » . وعندما يكون هناك ارتباط بين المتغيرات الخارجية فإنه يمكن اعتبار هذه الارتباطات بمثابة «معطيات» أيضاً ولا تستخدم فى التحليل .

٥ — أن يكون هناك اتجاه سببى واحد فى النموذج ، وتستبعد العلاقات السببية التبادلية بين المتغيرات .

طرق حساب معاملات المسارات :

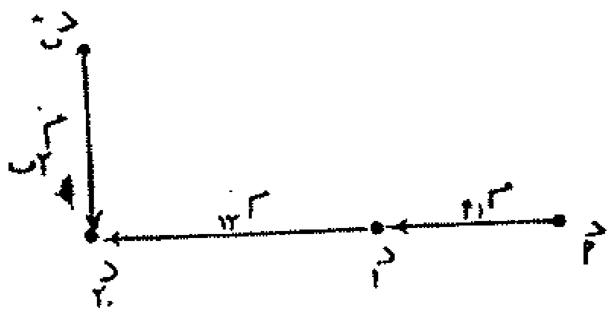
تختلف نماذج المسارات باختلاف عدد المتغيرات التى تشتمل عليها هذه النماذج. فهناك نماذج تشتمل على متغيرين وأخرى متعددة المتغيرات .

ولكى يتضح للباحث كيفية حساب قيم معاملات المسارات نعرض أولا نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين Bivariate Path Model .

وبالرغم من أنه يندر استخدام هذا النموذج بمفرده فى البحث الفعلى إلا أنه يفيد فى فهم النماذج متعددة المتغيرات ، فهو يعتبر أحد مكونات هذه النماذج . كما أن معاملات المسارات الخاصة بهذا النموذج البسيط يسهل تفسيرها ، وهذا يساعد الباحث على فهم وتفسير المعاملات فى النماذج الأكثر تعقيداً .

(أولا) نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين :

يعتبر نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين أبسط نماذج العلاقات السببية التى تنطبق عليها طرق تحليل المسارات . ويشتمل هذا النموذج على متغير خارجى د١ ، ومتغير داخلى د٢ ، ومتغير البواقى دب . ويمكن تمثيل هذا النموذج بالشكل التخطيطى رقم (٧١) .



شكل رقم (٧١)
شكل تخطيطي لنموذج مسارات يشتمل على متغيرين

ويتضح من هذا الشكل أن المتغير الخارجي د ١ هو المتغير المستقل ، والمتغير الداخلي د ٢ هو المتغير التابع ، د ب يمثل البواقي أي المتغيرات التي لم يتضمنها النموذج . ويلاحظ أن المتغيرات د ١ ، د ٢ ، د ب هي درجات معيارية (متوسطها = صفر ، انحرافها المعياري = ١) .

كما يلاحظ أن هناك سهمين (مسارين) يتجه أحدهما من المتغير الخارجي د ١ إلى المتغير الداخلي د ٢ ، ويتجه الآخر من متغير البواقي د ب إلى المتغير الداخلي د ٢ .

ولكل مسار مقدار واتجاه ، وهذا المقدار يدل على أهمية ذلك المسار . وقد سبق أن ذكرنا أن هذا المقدار يسمى معامل المسار . ولذلك فقد وضعنا الرمزين م ١٢ ، م ٢ب فوق كل من المسارين في الشكل ليدلا على معاملي المسارين المعياريين .

ويمكن تمثيل كل متغير داخلي (مستقل) يشتمل عليه نموذج سببي بمعادلة تحتوي على المتغيرات التي يفترض أنها تابعة ، وكذلك تحتوي على حد يمثل البواقي أو المتغيرات التي لم تؤخذ في الاعتبار في النموذج . ويقترن بكل متغير داخلي (مستقل) في المعادلة معامل مسار يدل على مقدار التغير المتوقع في المتغير

التابع نتيجة لتغير قدر الوحدة فى المتغير المستقل . وتسمى هـــذه المعادلات ب « المعادلات التكوينية Structural Equations » .

وقد سبق أن ذكرنا أن المتغيرات الخارجية يفترض أنها تعتمد على متغيرات خارجة عن النموذج ، أى غير متضمنة فيه ، ولذلك فهى تمثل بحد البواقى فقط $د_{أ}$.

ويمكن التعبير عن نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين المبين بالشكل رقم (٧١) بالمعادلتين الآتيتين :

$$د_{١} = م_{١أ} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (٣)$$

$$، \; د_{٢} = م_{٢١} \, د_{١} + م_{٢ب} \, د_{ب} \quad . \; . \; . \; . \quad (٤)$$

ولكن نظراً لأن $د_{١}$ تعتبر متغيرا خارجيا فإن $م_{١أ} = ١$. أى أن التباين الكلى فى المتغير $د_{١}$ ناتج عن متغيرات غير مقاسة ، أو متغيرات خارجة عن النموذج . وينطبق هذا — كما ذكرنا — على جميع المتغيرات الخارجية .

وبذلك تكون المعادلات التى تستخدم فى تقدير معاملى المسارين $م_{٢١}$ ، $م_{٢ب}$ فى نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين هى :

نموذج المسار : $د_{٢} = م_{٢١} \, د_{١} + م_{٢ب} \, د_{ب}$

$$، \; م_{٢١} = ر_{١٢} = \beta_{١٢} \quad . \; . \; . \; . \quad (٥)$$

$$، \; ر_{٢٢} = ١ = م^{٢}_{٢١} + م^{٢}_{٢ب} \quad . \; . \; . \quad (٦)$$

$$، \; م_{٢ب} = \sqrt{١ - م^{٢}_{٢١}} = \sqrt{١ - ر^{٢}_{١٢}} \quad . \; . \quad (٧)$$

ويلاحظ أنه إذا اشتمل النموذج على متغيرين فقط يكون معامل المسار مساوياً معامل ارتباط بيرسون .

ولتوضيح المعادلات السابقة نلاحظ أننا افترضنا أن $د_{ب}$ لاتعتمد على $د_{١}$. فقد سبق أن ذكرنا أن متغير البواقى يفترض أنه مستقل عن المتغيرات المنبئة فى نموذج المسارات ، (وهذا يعتبر أيضاً من فروض قواعـــد تقدير المربعات الصغرى) .

وكذلك $م_{٢ب} = \beta_{٢ب} = ر_{٢ب}$. ولكن نظرا لان متغير البواقى يمثل جميع المتغيرات الخارجية عن النموذج التى تسبب تباين المتغير $د_{٢}$ ، وهذه المتغيرات غير مقاسة ، فإننا لا نستطيع تقدير $م_{٢ب}$ تقديراً مباشراً من البيانات الملاحظة . لذلك يجب تقديرها بطريقة غير مباشرة باستخدام الفرض المرتبط بتحليل المسارات الذى سبق أن ذكرناه وهو أن التباين الكلى للمتغير الداخلى يتحدد تحديداً تاما بالتركيب الخطى للمتغيرات الخارجية والبواقى .

وبعبارة أخرى فإنه نظراً لان مربع كل من $م_{٢١}$ ، $م_{٢ب}$ يدل على الجزء من تباين المتغير $د_{٢}$ الذى يعتمد اعتماداً مباشراً على كل من المتغيرين $د_{١}$ ، $د_{ب}$ على الترتيب ، ونظراً لانه يفترض أن كلا منهما مستقل عن الآخر ، فإن مجموع الجزاين يجب أن يساوى الواحد الصحيح ، وهذا هو ما تدل عليه المعادلة رقم (٦) .

وربما يلاحظ الباحث أن $م_{٢ب}$ هو ما يعرف بمعـــامل الاغتراب Coefficient of Nondetermination الذى عرضنا له فى الفصل السابع وفى غيره من الفصول السابقة .

ويعد هذا فى الحقيقة أول ما يسهم به تحليل المسارات فى تفسير الانظمة

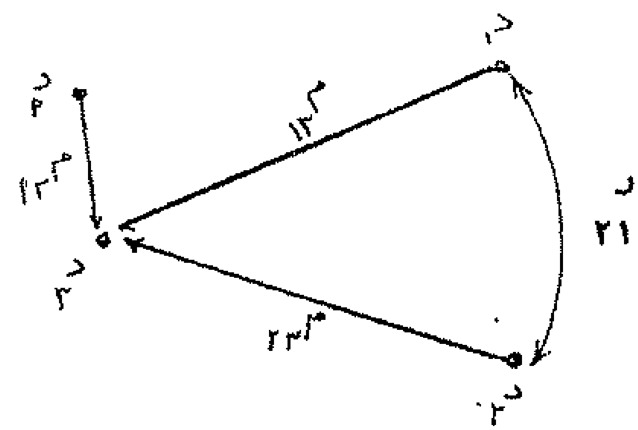
السببية Causal Systems . إذ يمدنا هذا الأسلوب من أساليب تحليل البيانات بتفسير منطقي مناسب لمعامل الاغتراب على أنه معامل المسار لمتغير البواقى فى المعادلة التكوينية Structural Equation . ونظراً لأن متوسط هذا المتغير يساوى الصفر وانحرافه المعيارى يساوى الواحد الصحيح ، فإنه يكون من المفيد أن ننظر إلى هذا المتغير على أنه متغير رمزى Dummy Variable متوسطه = صفر، وانحرافه المعيارى = ١، وهو يمثل جميع المتغيرات غير المقاسة التى تسبب تباين المتغير الداخلى . وبذلك يمثل معامل المسار الخاص بمتغير البواقى الجزء من الانحراف المعيارى (ومربعه يمثل الجزء من التباين) للمتغير الداخلى المتسبب عن جميع المتغيرات غير المقاسة الخارجة عن مجموعة المتغيرات التى يتضمنها نموذج المسارات .

(ثانياً) نماذج المسارات متعددة المتغيرات :

Multivariate Path Model

يواجه الباحث نماذج المسارات متعددة المتغيرات فى كثير من المواقف البحثية الفعلية . ونقصد بالنماذج متعددة المتغيرات تلك التى تشتمل على ثلاثة متغيرات أو أكثر . وبالطبع لن نستطيع أن نعرض فى هذا الفصل المختصر جميع أنواع هذه النماذج، إلا أننا نود أن نطمئن الباحث أن طرق تحليل المسارات ذات الاتجاه الواحد Recursive لا تختلف كثيراً باختلاف عدد المتغيرات التى يشتمل عليها النموذج إلا فى عدد المعادلات التكوينية اللازمة لتقدير معاملات المسارات . كذلك فإننا سوف نعرض الأساس الرياضى المنطقى لطريقة تحليل المسارات لنموذج يشتمل على ثلاثة متغيرات ، ونشتق منه الصور العامة التى يمكن أن تستخدم فى تحليل النماذج التى تشتمل على أى عدد من المتغيرات . ثم نقدم للباحث مثالا لنموذج المسارات الذى يشتمل على أربعة متغيرات .

افترض أن الباحث أراد إجراء تحليل المسارات للنموذج المبين بالشكل التخطيطى رقم (٧٣) الذى يشتمل على ثلاثة متغيرات $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، $د_{٣}$ فى صورة درجات معيارية ، حيث $د_{٣}$ هو المتغير الداخلى الذى افترض الباحث أنه يعتمد على المتغيرين الخارجيين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، ومتغير البواقى $د_{ب}$.



شكل رقم (٧٣)
تخطيط المسارات لنموذج سببى
يشتمل على ثلاثة متغيرات

فمن هذا الشكل يتضح أن كلا من المتغيرين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ يؤثران على المتغير $د_{٣}$ ، وأن $ر_{٢١}$ ترمز إلى الارتباط بين المتغيرين الخارجيين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، وهذا الارتباط يمكن حسابه مباشرة من البيانات التى يحصل عليها .

والمعادلات التى تستخدم فى تقدير معاملات المسارات فى صورتها المعيارية هى :

نموذج المسارات : $د_{٣} = م_{٣١} د_{١} + م_{٣٢} د_{٢} + م_{٣ب} د_{ب}$ . . . (٨)

$ر_{١٣} = م_{٣١} + م_{٣٢} ر_{٢١}$ . . . (٩)

$$\text{ر}_{٢٣} = \text{م}_{٢٣} + \text{م}_{١٣}\,\text{ر}_{١٢} \quad \cdot \quad \cdot \quad (١٠)$$

$$\text{ر}_{٣٣} = ١ = \text{م}_{١٣}\,\text{ر}_{١٣} + \text{م}_{٢٣}\,\text{ر}_{٢٣} + \text{م}^{٢}_{٣\text{ا}} \quad \cdot \quad \cdot \quad (١١)$$

$$\text{م}^{٢}_{٣\text{ا}} = ١ - (\text{م}_{١٣}\,\text{ر}_{١٣} + \text{م}_{٢٣}\,\text{ر}_{٢٣}) = ١ - \text{ر}^{٢}_{\text{م}} \quad \cdot \quad (١٢)$$

حيث $\text{ر}_{\text{م}}$ هو معامل الارتباط المتعدد .

أى أن $\text{م}_{٣\text{ا}} = \sqrt{١ - \text{ر}^{٢}_{\text{م}}}$ . . . . . . (١٣)

وفيما يلى توضح الباحث كيفية اشتقاق المعادلتين رقمى ٩ ، ١٠ :

نظراً لأن تعريف معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين الذى عرضنا له فى الفصل السابع هو متوسط مجموع حواصل ضرب الدرجات المعيارية المتقابلة للمتغيرين ، فإن :

$$\text{ر}_{١٣} = \frac{\text{مج}(\text{د}_{٣} \times \text{د}_{١})}{\text{ن}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٤)$$

ونظراً لأنه يفترض أن المتغير التابع $\text{د}_{٣}$ يعتمد اعتماداً كلياً على المتغيرات $\text{د}_{١}$ ، $\text{د}_{٢}$ ، $\text{د}_{\text{ا}}$. فبالتعويض من المعادلة رقم (٨) فى المعادلة رقم (١٤) نجد أن :

$$\text{ر}_{١٣} = \frac{\text{مج}\,\text{د}_{١}\,(\text{م}_{١٣}\,\text{د}_{١} + \text{م}_{٢٣}\,\text{د}_{٢} + \text{م}_{٣\text{ا}}\,\text{د}_{\text{ا}})}{\text{ن}}$$

$$= \text{م}_{١٣}\,\frac{\text{مج}\,\text{د}^{٢}_{١}}{\text{ن}} + \text{م}_{٢٣}\,\frac{\text{مج}\,\text{د}_{١}\,\text{د}_{٢}}{\text{ن}} + \text{م}_{٣\text{ا}}\,\frac{\text{مج}\,\text{د}_{١}\,\text{د}_{\text{ا}}}{\text{ن}}$$

$$. \quad . \quad . \quad (١٥)$$

وحيث أن مجموع مربعات الدرجات المعيارية = ن ، ومعامل الارتباط بين

البواقى $د_3$ والمتغير $د_1$ يفترض أنه يساوى صفراً . فإن المعادلة رقم (١٥) تصبح كالآتى :

$$ر_{31} = م_{31} + م_{32} \; ر_{21}$$

وهذه هى المعادلة السابقة رقم (٩) .

وبالمثل يمكن اشتقاق المعادلة رقم (١٠) .

وإذا فحصنا هاتين المعادلتين نجد أنه فى نموذج المسارات الذى يشتمل على ثلاثة متغيرات يكون الارتباط بين متغير خارجى معين والمتغير التابع مساويا مجموع المكونتين الآتيتين :

١ — الأثر المباشر ويحدده معامل المسار بين هذا المتغير الخارجى والمتغير التابع .

٢ — الأثر غير المباشر من خلال الارتباط بينه وبين المتغير الخارجى الآخر ، ويقاس بحاصل ضرب معامل الارتباط بين المتغيرين الخارجيين فى معامل مسار المتغير الخارجى الآخر .

وهذا هو الإسهام الثانى لتحليل المسارات فى تفسير الأنظمة السببية . إذ يمدنا بتفسير الارتباط بين متغير خارجى ومتغير داخلى على أنه مجموع الآثار المباشرة والآثار غير المباشرة .

وبالطبع لا نستطيع أن نصل إلى هذا التفسير من أى من الصورتين المستخدمتين فى حساب معامل ارتباط بيرسون أو أوزان الانحدار المعيارية .

وفى الحقيقة تعتبر المعادلة رقم (٩) بمثابة تعريف عام للآثار المباشرة .

فإذا كان الأثر الكلى لمتغير خارجى $د_1$ على متغير داخلى $د_3$ عبارة عن معامل

الارتباط بين المتغيرين ، وإذا كان $\text{م}_{١٣}$ هو بمثابة تقدير للأثر المباشر ، فإنه يجب تقدير الأثر غير المباشر بإيجاد قيمة $\text{ر}_{٢١}\ \text{م}_{٢٣}$. ويمكن التعبير عن ذلك بالصورة الرياضية الآتية :

الأثر الكلي غير المباشر للمتغير $\text{د}_{١}$ على المتغير $\text{د}_{٣}$ = $\text{ر}_{١٣} - \text{م}_{١٣}$ . . (١٦)

وهذا يعتبر الإسهام الثالث لتحليل المسارات في تفسير الأنظمة السببية . فهو يمدنا بطريقة عامة للكشف عن الآثار غير المباشرة لمتغير مستقل على متغير تابع في نموذج المسارات متعدد المتغيرات . وتتضح هذه الطريقة بصورة أفضل في حالة النماذج الأكثر تعقيداً . وبذلك تفيد طريقة تحليل المسارات في تحليل الارتباط إلى مكوناته .

ويمكن أن تتضح العلاقة بين معاملات المسارات المعيارية $\text{م}_{\text{ى هـ}}$ ، وأوزان الانحدار المعيارية $\beta_{\text{ى هـ}}$ ، ومعاملات الارتباط $\text{ر}_{\text{ى هـ}}$ إذا استخدمنا المعادلتين رقمي ٩ ، ١٠ في إيجاد $\text{م}_{١٣}$ بدلالة $\text{ر}_{١٣}$ ، $\text{ر}_{٢٣}$ ، $\text{ر}_{٢١}$ كالآتي :

من المعادلة رقم (٩) :

$$\text{م}_{١٣} = \text{ر}_{١٣} - \text{م}_{٢٣}\,\text{ر}_{٢١} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٧)$$

ومن المعادلة رقم (١٠) :

$$\text{م}_{٢٣} = \text{ر}_{٢٣} - \text{م}_{١٣}\,\text{ر}_{١٢} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (١٨)$$

وبالتعويض عن قيمة $\text{م}_{٢٣}$ من (١٨) في (١٧) نجد أن :

$$\text{م}_{١٣} = \text{ر}_{١٣} - (\text{ر}_{٢٣} - \text{م}_{١٣}\,\text{ر}_{١٢})\,\text{ر}_{٢١}$$

$$= \text{ر}_{١٣} - \text{ر}_{٢٣}\,\text{ر}_{٢١} + \text{م}_{١٣}\,\text{ر}^{٢}_{٢١}$$

$$\text{م}_{١٣}\,(١ - \text{ر}^{٢}_{٢١}) = \text{ر}_{١٣} - \text{ر}_{٢٣}\,\text{ر}_{٢١}$$

أى أن : $م_{١٣} = \frac{ر_{١٣} - ر_{٢٣} ر_{٢١}}{١ - ر^{٢}_{٢١}}$ . . . (١٩)

وبالتعويض فى (١٨) نجد أن :

$م_{١٣} = \frac{ر_{٢٣} - ر_{١٣} ر_{٢١}}{١ - ر^{٢}_{٢١}}$ . . . . (٢٠)

ويجب أن يلاحظ الباحث أن الصورة (١٩) التى تستخدم فى إيجاد معامل المسار بين المتغيرين ١ ، ٣ هى نفس الصورة المستخدمة فى إيجاد الوزن المعيارى للانحدار الذى يشتمل على المتغيرين ١ ، ٣ بعد عزل أثر المتغير ٢ أى $\beta_{١٣.٢}$.

والصورة (٢٠) هى نفس الصورة المستخدمة فى إيجاد الوزن المعيارى للانحدار الذى يشتمل على المتغيرين ٢ ، ٣ بعد عزل أثر المتغير ١ أى $\beta_{٢٣.١}$.

وبذلك يمكننا كتابة المعادلتين رقمى ٩ ، ١٠ كالآتى :

$ر_{١٣} = B_{١٣.٢} + B_{٢٣.١} م_{٢١}$ . . . . (٢١)

، $ر_{٢٣} = B_{١٣.٢} + B_{٢٣} ر_{٢١}$ . . . . . (٢٢)

أى أنه إذا عبرنا عن المتغيرات التى يشتمل عليها نموذج سببى فى صورة معيارية (أى درجات معيارية د) وتحققت فى هذا النموذج الفروض التى عرضنا لها فيما سبق بدرجة معقولة ، فإن معاملات المسارات تصبح مساوية لأوزان الانحدار المعيارية أى (β) التى نحصل عليها فى تحليل الانحدار المتاد . ولكن يوجد اختلاف هام بين طريقتى التحليل . ففى تحليل الانحدار المتاد يتم إيجاد انحدار المتغير التابع على جميع المتغيرات المستقلة مرة واحدة أى فى تحليل واحد، ولكن و تحليل المسارات يمكن إجراء أكثر من تحليل واحد ، أى يجرى التحليل على مراحل . ويتم فى كل مرحلة إيجاد انحدار المتغير الذى يفترض أنه تابع على المتغيرات التى يعتمد عليها ، وحساب قيم B التى تعتبر هذه الحالة هى معاملات

للسارات التى تصل بين مجموعة المتغيرات المستقلة والمتغير التـــابع المعين . ولكن النموذج المبين بالشكل التخطيطى رقم (٧٢) يتطلب إجراء تحليل الانحدار للمتغير ٣ على المتغيرين ١ ، ٢ كما هو موضح بالمعادلتين رقمى (٩ ، ١٠) أو (٢١ ، ٢٢) .

وربما يكون من المفيد أيضا أن نوضح للباحث كيفية اشتقاق المعادلات رقم ١١ ، ١٢ ، ١٣ لأهميتها فى تقدير قيمة معامل المسار الخاص بالبواقى . Residual Path Coefficient

فالمعادلة رقم (١١) يمكن اعتبارها حالة خاصة من المعـــادلتين ٩ ، ١٠ وهى الحالة التى يتحدد فيها المتغير التابع تحديداً تاما . فقد اشتملت المعادلة على أثر المتغيرين الداخليين وأثر متغير البواقى ، ولذلك فإن مجموع هذه الآثار يساوى الواحد الصحيح .

والصورة المستخدمة لإيجاد معامل الارتباط بين المتغير د٣ ونفسه هى :

$$ر_{٣٣} = ١ = \frac{مج\,(د_{٣} \times د_{٣})}{ن} \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (٢٣)$$

وبالتعويض فى الطرف الأيسر للمعادلة رقم (٢٣) من المعادلة رقم (٨) نجد أن :

$$ر_{٣٣} = ١ = \frac{مج\,د_{٣}\,(م_{٣١}\,د_{١} + م_{٣٢}\,د_{٢} + م_{٣أ}\,د_{أ})}{ن}$$

$$= م_{٣١}\,\frac{مج\,د_{٣}\,د_{١}}{ن} + م_{٣٢}\,\frac{مج\,د_{٣}\,د_{٢}}{ن} + م_{٣أ}\,\frac{مج\,د_{٣}\,د_{أ}}{ن} \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (٢٤)$$

ولكن من بين فروض تحليل المسارات التى عرضنا لها فيما سبق أن يكون المتغير $د_{١}$ مستقلا عن المتغيرين $د_{١}$ ، $د_{٢}$ ، أى أن الارتباط بين $د_{٢}$ وكل منهما يساوى صفراً ، $ر_{١٣} = م_{١٣}$ كما ذكرنا فى نموذج المسارات الذى يشتمل على متغيرين . لذلك فإن المعادلة (٢٤) تصبح كالآتى :

$$ر_{٣٣} = ١ = م_{١٣} ر_{١٣} + م_{٢٣} ر_{٢٣} + م^{٢}_{٣أ} \quad . \quad . \quad . \quad (٢٥)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة باستخدام رمز التجميع (مج) كالآتى :

$$ر_{٣٣} = ١ = م^{٢}_{٣أ} + \underset{ك=١}{\overset{٢}{مج}} م_{٣ك} ر_{٣ك} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٢٦)$$

أى أن : $م^{٢}_{٣أ} = ١ - \underset{ك=١}{\overset{٢}{مج}} م_{٣ك} ر_{٣ك} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٢٧)$

ولكن $\underset{ك=١}{\overset{٢}{مج}} م_{٣ك} ر_{٣ك}$ تساوى مربع معامل الارتباط المتعدد الذى سبق أن رمزنا له فى الفصل السادس عشر بالرمز $ر_{م}$.

لذلك يمكن كتابة المعادلة رقم (٢٧) كالآتى :

$$م^{٢}_{٣أ} = ١ - ر^{٢}_{م}$$

وهذه هى المعادلة السابقة رقم (١٢) .

وباستخراج الجذر التربيعى لكل من الطرفين نجد أن :

$$م_{٣أ} = \sqrt{١ - ر^{٢}_{م}}$$

وهى المعادلة السابقة رقم (١٣) .

ويمكن باستخدام هذه المعادلة تقدير معامل المسار الخاص بالبواقي، ويلاحظ أن (ر) ترمز إلى معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع المطلوب والمتغيرات السابقة عليه المسببة له كمتغيرات مستقلة .

والمعادلات رقم ١٩ ، ٢٠ ، ١٣ تستخدم في تقدير معاملات المسارات في صورتها المعيارية ، وبذلك تتحدد هذه المعاملات في المعادلة رقم (٨) التي تمثل نموذج المسارات الذي يشتمل على ثلاثة متغيرات .

وهنا ربما يتساءل الباحث كيف يفسر معاملات المسارات في النموذج المتعدد المتغيرات ؟ .

فقد سبق أن ذكرنا أن تفسير هذه المعاملات في النماذج التي تشتمل على متغيرين أمر يسير ، إذ أن معامل المسار في هذه الحالة يساوي معامل ارتباط بيرسون . ولكن الأمر يختلف في حالة النماذج متعددة المتغيرات .

ولتوضيح ذلك نعود إلى المعادلة رقم (٢٥) وهي :

$$\text{ر}_{٣٣} = ١ = \text{م}_{٣١}\,\text{ر}_{١٣} + \text{م}_{٣٢}\,\text{ر}_{٢٣} + \text{م}^{٢}_{٣ع}$$

وبالتعويض عن قيم $\text{ر}_{١٣}$، $\text{ر}_{٢٣}$ من المعادلتين السابقتين رقمي ٩ ، ١٠ في المعادلة رقم (٢٥) نجد أن :

$$\text{ر}_{٣٣} = ١ = \text{م}_{٣١}\,(\text{م}_{٣١} + \text{م}_{٣٢}\,\text{ر}_{٢١}) + \text{م}_{٣٢}\,(\text{م}_{٣٢} + \text{م}_{٣١}\,\text{ر}_{٢١}) + \text{م}^{٢}_{٣ع}$$

$$= \text{م}^{٢}_{٣١} + \text{م}_{٣١}\,\text{م}_{٣٢}\,\text{ر}_{٢١} + \text{م}^{٢}_{٣٢} + \text{م}_{٣٢}\,\text{م}_{٣١}\,\text{ر}_{٢١} + \text{م}^{٢}_{٣ع}$$

$$= (\text{م}^{٢}_{٣١} + \text{م}^{٢}_{٣٢}) + (٢\,\text{م}_{٣١}\,\text{م}_{٣٢}\,\text{ر}_{٢١}) + \text{م}^{٢}_{٣ع}$$

$$= \sum_{\text{ل}=١}^{٢} \text{م}^{٢}_{٣\text{ل}} + ٢ \sum_{\text{ك}=١}^{١} \text{م}_{٣\text{ك}}\,\text{م}_{٣\text{ن}}\,\text{ر}_{\text{ك ن}} + \text{م}^{٢}_{٣ع} \quad \ldots \quad (٢٨)$$

حيث ن = ك + ١ ، ومدى قيم ك ، ن يشتمل على جميع المتغيرات المقاسة في النموذج .

ويجب أن يلاحظ الباحث أن الحد الثاني في الطرف الأيسر للمعادلة رقم (٢٦) يساوي مجموع الحدين الأول والثاني في الطرف الأيسر للمعادلة رقم (٢٨) . لذلك فإن مجموع هذين الحدين يساوي أيضاً مربع معامل الارتباط المتعدد .

وتوضح المعادلة رقم (٢٨) أن التباين الكلي للمتغير د٣ يساوي مجموع مربعات المسارات مضافاً إلى هذا المجموع تأثير الارتباط بين المتغيرات الخارجية Exogenous Variables . ومن الجدير بالذكر أن معاملات المسارات في النماذج متعددة المتغيرات تتميز بخاصية فريدة إذا قورنت بالمعاملات في النماذج التي تشتمل على متغيرين : فمعاملات المسارات في النماذج الأخيرة تنحصر قيمها بين ± ١ مثل معامل ارتباط بيرسون ، ولكن هذه المعاملات ربما تزيد عن ± ١ في النماذج متعددة المتغيرات . وربما يدل هذا لأول وهلة على أن المتغير الخارجي الذي يكون مربع معامل مساره أكبر من الواحد الصحيح يسبب أكثر من نسبة ١٠٠٪ من تباين المتغير المستقل ، ولكن هذا بالطبع ليس له معنى . ويظل السؤال عن كيفية تفسير مربع معامل المسار الذي تكون قيمته أكبر من الواحد الصحيح في مثل هذه النماذج قائماً .

ويقول رايت Wright أن الارتباط بين المتغير الخارجي والمتغير أو المتغيرات الخارجية الأخرى وهو ما يمثله الحد التجميعي الثاني من الطرف الأيسر للمعادلة رقم (٢٨) يجب أن يكون بمثابة تعويض لما قد يسببه هذا المتغير الخارجي من زيادة في تباين المتغير الداخلي عما يمكن ملاحظته في البيانات ، لذلك ربما يكون من المفيد للباحث في المواقف البحثية الفعلية أن يفحص مكونات هذا الحد التجميعي الثاني كل على حدة ليأخذ فكرة عن كيفية حدوث هذا التعويض .

أما معامل المسار الخاص بالبواقي — وهو الحد الثالث في الطرف الأيسر

للمعادلة رقم ٢٨ — فيمكن تفسيره بنفس الطريقة كما فى حالة النموذج الذى يشتمل على متغيرين .

نموذج المسارات الذى يشتمل على (ن) من المتغيرات :

لا يختلف الأساس الرياضى الذى يبنى عليه أسلوب تحليل المسارات فى حالة النموذج الذى يشتمل على (ن) من المتغيرات عنه فى حالة النموذج الذى يشتمل على ثلاثة متغيرات ، إذ يمكننا تعميم الصور السابقة كالآتى :

إذا افترضنا أن المتغير الداخلى $د_{١}$ ، والمتغيرات الخارجية $د_{٢}$ ، $د_{٣}$ ، $د_{٤}$ ، .... $د_{ن}$ ، ومتغير البواقى دا فإن الصورة العامة لنموذج المسارات تصبح :

$$د_{١} = م_{١٢} د_{٢} + م_{١٣} د_{٣} + م_{١٤} د_{٤} + \cdots + م_{١ن} د_{ن} + م_{١ا} د_{ا} \quad \ldots \quad (٢٩)$$

والصورة العامة للارتباط بين أى متغير خارجى ومتغير داخلى هى :

$$ر_{١ك} = م_{١ك} + \sum_{\substack{ل = ٢ \\ ل \neq ك}}^{ن} م_{١ل} ر_{لك} \quad \ldots \quad (٣٠)$$

$$= \sum_{ل = ٢}^{ن} م_{١ن} ر_{ك}$$

حيث ل ترمز إلى المجموعة الكاملة من المتغيرات فى النموذج التى تؤدى مساراتها مباشرة إلى المتغير الداخلى المطلوب .

والصورة العامة للأثر غير المباشر لأى متغير خارجى $د_{ك}$ على المتغير الداخلى $د_{١}$ هى :

$$\text{الأثر غير المباشر} = د_{١ك} - م_{١ك} \quad \cdots \quad (٣١)$$

والصورة العامة التى تستخدم فى تقدير قيمة معامل المسار الخاص بالبواقى هى:

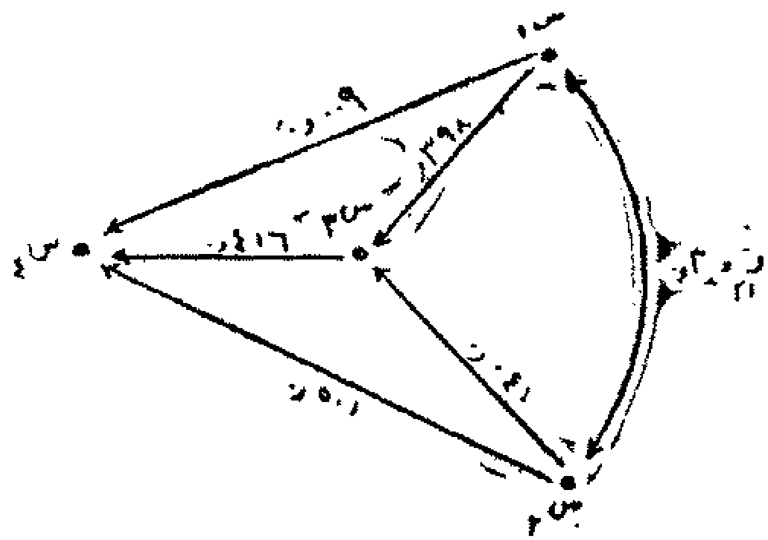
$$م_{١ب} = \sqrt{١ - د_{م}^{٢}} \quad \cdots\cdots \quad (٣٢)$$

حيث $د_{م}$ ترمز إلى معامل الارتباط المتعدد .

خطوات حساب معاملات المسارات :

فيما يلى مثال لنموذج يشتمل على أربعة متغيرات من بحث تربوى يوضح للباحث الخطوات التى يمكنه اتباعها فى تحليل المسارات والمثال مأخوذ من كيرلنجر Kerlinger .

نفترض أن الباحث أراد تحليل العلاقات السببية بين المتغيرات الاربعة : التحصيل الدراسى ، والمستوى الاجتماعى الاقتصادى ، والذكاء ، ودافعية الإنجاز باستخدام أسلوب تحليل المسارات . فالخطوة الأولى هى أن يفترض الباحث نموذجا يمثل العلاقات السببية بين المتغيرات الأربعة على أن يراعى الشروط التى سبق أن ذكرناها فى بناء نماذج المسارات . ولنفترض أنه اقترح النموذج التالى المبين بالشكل التخطيطى رقم (٧٤) :



شكل رقم (٧٢)

ومن الشكل يتضح أننا رمزنا لمتغيرى المستوى الاجتماعى الاقتصادى ـ والذكاء بالرمزين س١ ، س٢ على الترتيب ، واعتبرنا أن كل منهما متغير خارجى Exogenous Variable يؤثر فى متغير دافعية الإنجاز س٣ ، وأن كلا من المتغيرات س١ ، س٢ ، س٣ يؤثر فى متغير التحصيل الدراسى س٤ . أى أننا اعتبرنا كلا من س٣ ، س٤ متغيراً داخليا Endogenous Variable . والأعداد فوق كل مسار تدل على قيمة معامل المسار المعين الذى سيتم حسابه فى الخطوات التالية .

والخطوة الثانية : يحسب معامل ارتباط بيرسون بين قيم كل متغيرين منها ، ولنفترض أن مصفوفة الارتباطات الناتجة من عينة تتكون من ١٠٠ طالب كانت كالآتى :

	س١	س٢	س٣	س٤
س١	١,٠٠٠	٠,٣٠٠	٠,٤١٠	٠,٣٣٠
س٢		١,٠٠	٠,١٦٠	٠,٥٧٠
س٣			١,٠٠	٠,٥٠٠
س٤				١,٠٠

جدول رقم ١٠٠.
مصفوفة الارتباطات بين كل متغيرين

والخطوة الثالثة : يحسب معاملات المسارات الخاصة بالنموذج السببي الذى افترضه على أساس نظرى معين والمبين بالشكل رقم (٧٣) . وهذا يتطلب إجراء تحليل الانحدار مرتين .

فى التحليل الأول يوجد انحدار المتغير $س_{٣}$ (المتغير الداخلى الأول) على المتغيرين الخارجيين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ بغرض الحصول على وزنى الانحدار المعياريين $B_{٢.١٣}$ ، $B_{١.٢٣}$. وهذان الوزنان هما معاملا المسارين $م_{١٣}$ ، $م_{٢٣}$.

وفى التحليل الثانى يوجد انحدار المتغير $س_{٤}$ (المتغير الداخلى الثانى) على المتغيرين الخارجيين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، والمتغير الداخلى الأول $س_{٣}$ ، لأن هذه المتغيرات الثلاثة تؤثر تأثيراً مباشراً فى المتغير $س_{٤}$ ، وبذلك يمكنه الحصول على أوزان الانحدار المعيارية $B_{٢٣.١٤}$ ، $B_{٣١.٢٤}$ ، $B_{٢١.٣٤}$ وهى تساوى معاملات المسارات $م_{١٤}$ ، $م_{٢٤}$ ، $م_{٣٤}$.

وفيما يلى طريقة الحصول على هذه الأوزان :

$$B_{١٣.٢} = م_{١٣} = \frac{ر_{١٣} - ر_{٢٣}\,ر_{٢١}}{١ - ر^{٢}_{٢١}}$$

$$= \frac{٠,٤١٠ - (٠,١٦٠)(٠,٣٠٠)}{١ - (٠,٣٠٠)^{٢}} = ٠,٣٩٨$$

$$B_{١.٢٣} = م_{٢٣١} = \frac{ر_{٢٣} - ر_{١٣}\, ر_{٢١}}{١ - ر_{٢١}^{٢}} \text{ ،}$$

$$= \frac{٠,١٦٠ - (٠,٤١٠)(٠,٣٠٠)}{١ - (٠,٣٠٠)^{٢}}$$

$$= ٠,٠٤١$$

وكذلك يمكن حساب قيم أوزان الانحدار الأخرى .

وهذه القيم الأخرى هى :

$$B_{٢١.٣٤} = م_{١٤} = ٠,٠٠٩ \text{ ،} \qquad B_{٣١.٢٤} = م_{٢٤} = ٠,٥٠١$$

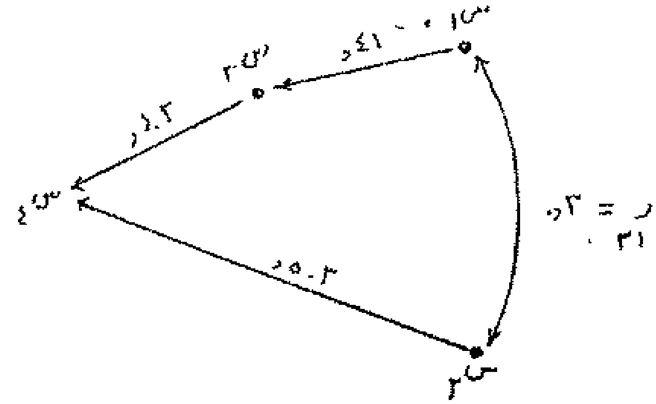
$$B_{٢١.٣٤} = م_{٣٤} = ٠,٤١٦$$

وبالنظر إلى هذه الأوزان أو المعاملات يتضح أن قيمة كل من $م_{٤٤}$ ، $م_{٢٣}$ تقل عن ٠,٠٥ . مما يدل على أن كلا من $ر_{٤٤}$ ، $ر_{٢٣}$ ناتجة عن آثار غير مباشرة .

فالأثر المباشر للمتغير $س_{١}$ فى المتغير $س_{٤}$ يساوى ٠,٠٠٩ ، بينما الأثر الكلى غير المباشر يساوى (٠,٣٣ — ٠,٠٠٩ أى ٠,٣٢١) .

ومن هذا نستطيع أن نستنتج أن المستوى الاجتماعى الاقتصادى ليس له أثر مباشر فى التحصيل الدراسى . ولكنه يؤثر فيه تأثيراً غير مباشر نتيجة لارتباط المستوى الاجتماعى الاقتصادى بالذكاء ودافعية الإنجاز ، والارتباط بين الذكاء ودافعيـــة الإنجاز يرجع أساساً إلى الارتباط بين الذكاء والمستوى الاجتماعى الاقتصادى .

وفى الحقيقة يمكن حذف المسار الذى يربط بين المتغيرين $س_{١}$ ، $س_{٤}$ وكذلك المسار الذى يربط بين المتغيرين $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ وتعديل النموذج السببى السابق بحيث يصبح كما هو ممثل بالشكل التخطيطى الآتى رقم (٧٤) :



شكل رقم (٧٤)
شكل تخطيطى لنموذج المسارات بعد تعديله

ولكى نبحث عن مدى اتساق النموذج المبين بالشكل رقم (٧٤) يجب أن نحسب معاملات المسارات لهذا النموذج الجديد بنفس الطريقة السابقة ، ثم نستخدم هذه المعاملات فى إيجاد قيم معاملات الارتباط بين كل متغيرين ومقارنتها بالقيم المناظرة فى مصفوفة الارتباطات السابقة المبينة فى الجدول رقم (١٠٠) .

وفيما يلى قيم معاملات المسارات :

م$_{١٣}$ = ر$_{١٣}$ = ٠,٤١ لأن هناك مسارا وحيدا يربط بين المتغيرين س$_{١}$، س$_{٣}$.

وبإجراء تحليل انحدار المتغير س$_{٤}$ على س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ نجد أن :

م$_{٢٤}$ = ٠,٥٠٣ ، م$_{٣٤}$ = ٠,٤٢٠

والمعادلتان اللتان تمثلان النموذج المبين بالشكل رقم (٧٤) هما :

د$_{٣}$ = م$_{١٣}$ د$_{١}$ + ق$_{٣}$

، د$_{٤}$ = م$_{٢٤}$ د$_{٢}$ + م$_{٣٤}$ د$_{٣}$ + ق$_{٤}$

حيث ق$_{٣}$ ، ق$_{٤}$ هما متغيرا البواقى فى صورة معيارية أيضاً .

ويمكن حساب قيم معاملات الارتباط التى من الرتبة الصفرية بين جميع المتغيرات كما يأتى :

ر_{21} هو الارتباط بين المتغيرين الخارجيين س_1 و س_2 ، لذلك يبقى دون تحليل .

$$\cdot\ \text{ر}_{32} = \frac{\text{مج } \text{د}_2 \text{د}_3}{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}} \text{ مج } \text{د}_2 \left(\text{م}_{31} \text{د}_1 \right)$$

$$= \text{م}_{31} \frac{\text{مج } \text{د}_1 \text{د}_2}{\text{ن}}$$

$$= \text{م}_{31} \text{ر}_{21}$$

$$= (\text{٠,٤١})(\text{٠,٣٠})$$

$$= \text{٠,١٢٣}$$

ويلاحظ أن قيمة ر_{32} المبينة فى الجدول الاصلى رقم (١٠٠) تساوى ٠,١٦٠

$$\cdot\ \text{ر}_{41} = \frac{\text{مج } \text{د}_1 \text{د}_4}{\text{ن}}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \text{ مج } \text{د}_1 \left(\text{م}_{42} \text{د}_2 + \text{م}_{43} \text{د}_3 \right)$$

$$= \text{م}_{42} \frac{\text{مج } \text{د}_1 \text{د}_2}{\text{ن}} + \text{م}_{43} \frac{\text{مج } \text{د}_1 \text{د}_3}{\text{ن}}$$

$$= \text{م}_{42} \text{ر}_{21} + \text{م}_{43} \text{ر}_{31}$$

$$= (\text{٠,٥٠٢})(\text{٠,٣٠}) + (\text{٠,٤٢٠})(\text{٠,٤١٠})$$

$$= \text{٠,٣٢٣}$$

ويلاحظ أن قيمة $ر_{١٤}$ المبينة فى الجدول تساوى ٠,٣٣٠

$$\therefore ر_{٣٤} = \frac{مج\, د_{٣}\, د_{٤}}{ن}$$

$$= \frac{١}{ن}\, مج\, د_{٣} \left(م_{٢٤}\, د_{٢} + م_{٣٤}\, د_{٣} \right)$$

$$= م_{٢٤}\, \frac{مج\, د_{٢}\, د_{٣}}{ن} + م_{٣٤}\, \frac{مج\, د_{٣}^{٢}}{ن}$$

$$= م_{٢٤}\, ر_{٢٣} + م_{٣٤} \quad (\text{لأن } مج\, د_{٣}^{٢} = ن)$$

$$= (٠,٠٠٣)(٠,٤١٠)(٠,٣٠) + (٠,٤٢٠)$$

$$= ٠,٤٨٢$$

والقيمة المبينة فى الجدول تساوى ٠,٥٠

ونظراً لأن الفروق بين قيم معاملات الارتباط المحسوبة باستخدام معاملات المسارات والقيم الأصلية المبينة في الجدول رقم (١٠٠) ضئيلة ، فإننا يمكن أن نستنتج أن البيانات تتسق مع نموذج المسارات الجديد الموضح بالشكل رقم (٧٥).

أي أنه يمكننا القول بأن المستوى الاجتماعي والاقتصادي في هذا المثال يلعب دوراً هاماً ، وبالرغم من أنه لا يؤثر تأثيراً مباشراً في التحصيل الدراسي ، إلا أنه يؤثر تأثيراً غير مباشر في التحصيل من خلال تأثيره في دافعية الإنجاز ومن خلال ارتباطه بالذكاء . وكل من الذكاء ودافعية الإنجاز له أثر مباشر وأثر غير مباشر في التحصيل . إلا أن الآثار المباشرة أكبر من الآثار غير المباشرة . فالأثر المباشر للذكاء في التحصيل أكبر قليلاً من الأثر المباشر لدافعية الإنجاز في التحصيل .

من هذا المثال يتضح أهمية تحليل المسارات في مطابقة البيانات لنموذج سببي معين ، واقتراح التعديل الذي يمكن إجراؤه على النموذج . وبالطبع يجب أن يكون ترتيب المتغيرات التي يشتمل عليها النموذج متفقاً مع الاعتبارات النظرية التي تحدد في ضوئها هذا النموذج .

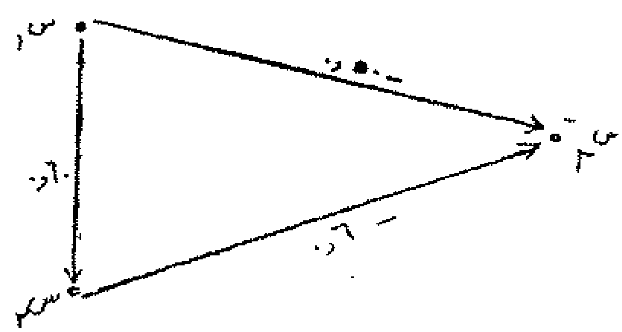
وربما يلاحظ الباحث أن العمليات الحسابية اللازمة لإجراء تحليل المسارات تحتاج إلى وقت وجهد كبيرين، وخاصة إذا كان عدد المتغيرات التي يشتمل عليها نموذج المسارات كبيراً . لذلك نوصي الباحث بأن يستخدم أحد البرامج الجاهزة للحاسب الآلي (برنامج تحليل المسارات Path Analysis) في إجراء هذا التحليل، وأن يستعين بالمبادىء الأساسية التي عرضنا لها في هذا الفصل في تفسير نتائج التحليل .

تمارين على الفصل التاسع عشر

١ ـــ ما هي العلاقة بين معاملات المسارات ومعاملات الارتباط الجزئي ؟

٢ ـــ أذكر وجهين من أوجه الاختلاف بين تحليل المسارات وتحليل الانحدار المتعدد ؟

٣ ـــ وجد أحد الباحثين أن التسلطية (س٢) ترتبط ارتباطاً سالباً بكل من الذكاء (س١) ، ومستوى تعليم الفرد مقاسا بعدد السنوات التي قضاها في التعليم (س٣) . وأراد أن يجرى تحليل المسارات على هذه العلاقات . لذلك افترض النموذج السببي المبين بالشكل التخطيطي الآتي حيث وضعت قيم معاملات الارتباط فوق خطوط المسارات .



(أ) ما هو الأثر المباشر للذكاء على التسلطية ؟

(ب) ما هو الأثر غير المباشر للذكاء على التسلطية ؟

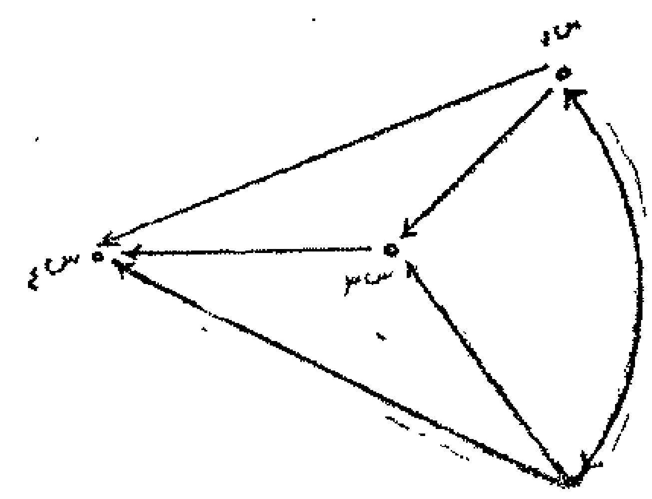
(جـ) ما هو الأثر المباشر لمستوى تعليم الفرد على التسلطية ؟

فسر النتائج التى حصلت عليها فى ضوء مبادىء تحليل المسارات .

٤ — أراد باحث دراسة العلاقة السببية بين التحصيل الدراسى (المتغير التابع $س_٤$)، ومستوى الطموح ($س_٣$)، والذكاء ($س_٢$)، والجنس ($س_١$)، وهى المتغيرات المستقلة . وحصل على مصفوفة معاملات الارتباط الآتية من عينة تتكون من ٢٠٠ طالب وطالبة فى المرحلة الثانوية :

	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
$س_١$	١,٠٠	٠,٣٠	٠,٢٥	٠,٤٠
$س_٢$		١,٠٠	٠,٢٢	٠,٧٠
$س_٣$			١,٠٠	٠,٤٠
$س_٤$				١,٠٠

فإذا كان النموذج السببى الذى افترضه مبينا بالشكل الآتى :



(أ) اوجد معاملات المسارات للمتغيرات التي تؤثر في مستوى الطموح .

(ب) اوجد معاملات المسارات للمتغيرات التي تؤثر في التحصيل الدراسي .

(ج) استبعد المسارات التي تقل معاملاتها عن ٠,٠٥ وأعد إجراء تحليل المسارات بعد تعديل النموذج السببي .

(د) أعد حساب معاملات الارتباط بين المتغيرات في النموذج الجديد ، وقارن القيم الناتجة بالقيم المبينة في الجدول المعطى . ثم فسر النتائج .

شجرة قرارات تساعد الباحث على اختيار الأسلوب الإحصائي الذي يناسب بيانات بحثه

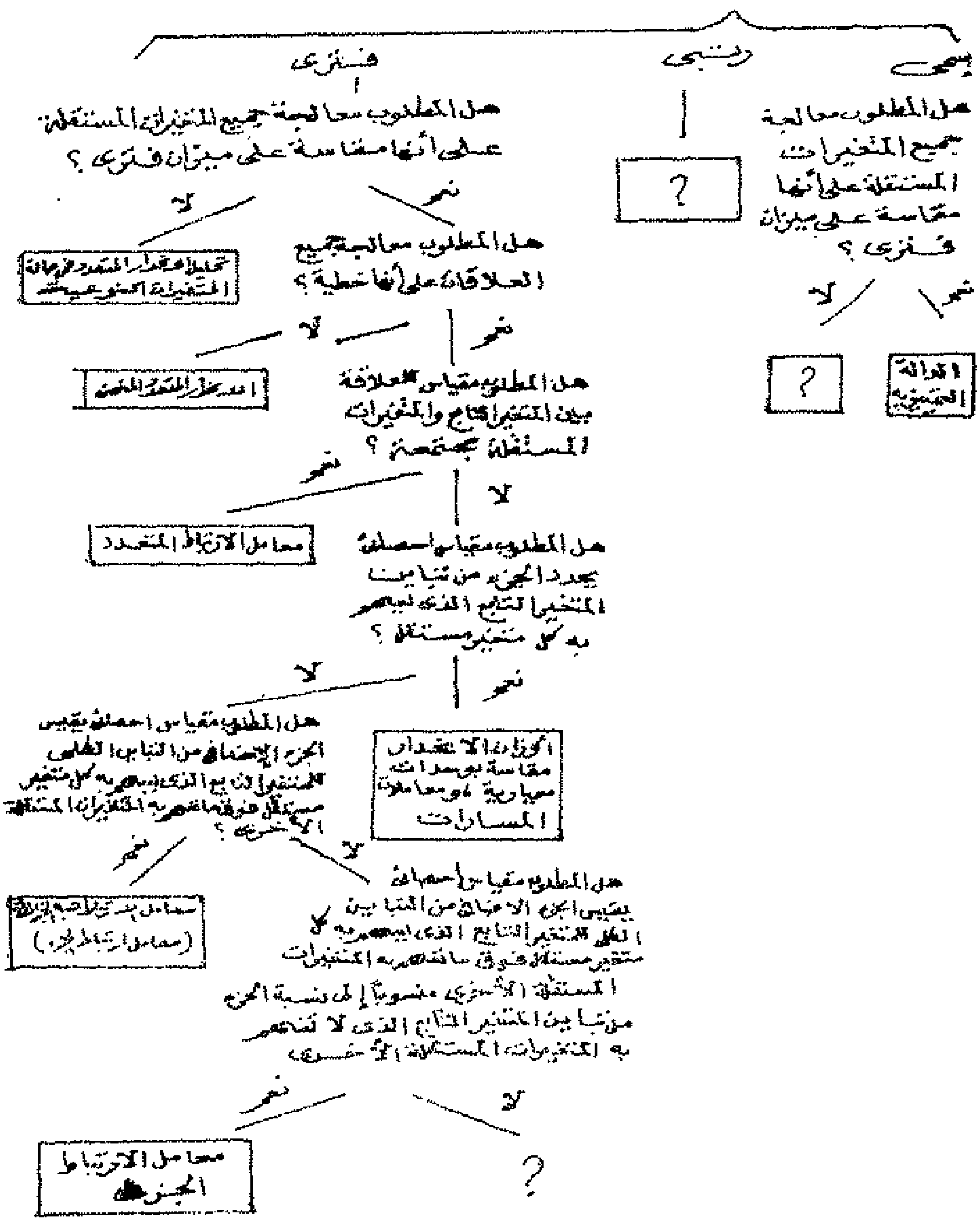
(ثامناً) إذا اشتمل البحث على أكثر من متغيرين

وكان هناك تمييز بين المتغيرات المستقلة

والمتغير التابع، مع عدم الاهتمام بالتفاعل

بين المتغيرات

ما هو مستوى أو ميزان قياس المتغير التابع ؟



ملحق الكتاب

الجداول الرياضية والاحصائية

(أ) جدول اللوغاريتمات المتادة للأعداد

(ب) جدول ارتفاعات المنحنى الاعتدالي المعياري

(ج) المساحات تحت المنحنى الاعتدالي المعياري

(د) قيم $\sqrt{\frac{م}{ك}}$ ، $\sqrt{\frac{ك}{م}}$ اللازمة لحساب معامل فاى (ϕ ر)

(هـ) قيم $\frac{ص_1 ص}{ل}$ اللازمة لحساب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل ، ومعامل الارتباط الثنائى

(و) القيم التقديرية لمعامل الارتباط الرباعى المناظرة للنسبة $\frac{أ د}{ب ج}$

(ل) قيم معامل الارتباط الرباعى المناظرة لقيم معامل فاى (ϕ)

جدول (ا)

لوغاريتمات الأعداد

لإيجاد لوغاريتم عدد طبيعى (لا يشتمل على كسور) نبحث عن العدد فى العمود الأول ويكون لوغاريتمه هو العدد المبين فى العمود الثانى تحت الرقم صفر، أما إذا كان المطلوب إيجاد لوغاريتم عدد يشتمل على كسور، والعدد مقرب إلى رقم عشرى واحد ، نبحث عن الجزء الصحيح من العدد فى العمود الأول والرقم العشرى فى العمود المناسب من ١ إلى ٩ ، ويكون لوغاريتم العدد هو العدد المبين فى هذا العمود .

وفى جميع الحالات يجب مراعاة وضع العدد البيانى المناسب يليه علامة عشرية ، ثم يلى هذه العلامة العدد الذى نحصل عليه من الجدول .

أما إذا كان العدد يشتمل على أكثر من رقم عشرى واحد فإنه يجب الرجوع إلى أحد الجداول الرياضية .

العدد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	٠٠٠٠	٠٠٤٣	٠٠٨٦	٠١٢٨	٠١٧٠	٠٢١٢	٠٢٥٣	٠٢٩٤	٠٣٣٤	٠٣٧٤
١١	٠٤١٤	٠٤٥٣	٠٤٩٢	٠٥٣١	٠٥٦٩	٠٦٠٧	٠٦٤٥	٠٦٨٢	٠٧١٩	٠٧٥٥
١٢	٠٧٩٢	٠٨٢٨	٠٨٦٤	٠٨٩٩	٠٩٣٤	٠٩٦٩	١٠٠٤	١٠٣٨	١٠٧٢	١١٠٦
١٣	١١٣٩	١١٧٣	١٢٠٦	١٢٣٩	١٢٧١	١٣٠٣	١٣٣٥	١٣٦٧	١٣٩٩	١٤٣٠
١٤	١٤٦١	١٤٩٢	١٥٢٣	١٥٥٣	١٥٨٤	١٦١٤	١٦٤٤	١٦٧٣	١٧٠٣	١٧٣٢
١٥	١٧٦١	١٧٩٠	١٨١٨	١٨٤٧	١٨٧٥	١٩٠٣	١٩٣١	١٩٥٩	١٩٨٧	٢٠١٤
١٦	٢٠٤١	٢٠٦٨	٢٠٩٥	٢١٢٢	٢١٤٨	٢١٧٥	٢٢٠١	٢٢٢٧	٢٢٥٣	٢٢٧٩
١٧	٢٣٠٤	٢٣٣٠	٢٣٥٥	٢٣٨٠	٢٤٠٥	٢٤٣٠	٢٤٥٥	٢٤٨٠	٢٥٠٤	٢٥٢٩
١٨	٢٥٥٣	٢٥٧٧	٢٦٠١	٢٦٢٥	٢٦٤٨	٢٦٧٢	٢٦٩٥	٢٧١٨	٢٧٤٢	٢٧٦٥
١٩	٢٧٨٨	٢٨١٠	٢٨٣٣	٢٨٥٦	٢٨٧٨	٢٩٠٠	٢٩٢٣	٢٩٤٥	٢٩٦٧	٢٩٨٩
٢٠	٣٠١٠	٣٠٣٢	٣٠٥٤	٣٠٧٥	٣٠٩٦	٣١١٨	٣١٣٩	٣١٦٠	٣١٨١	٣٢٠١
٢١	٣٢٢٢	٣٢٤٣	٣٢٦٣	٣٢٨٤	٣٣٠٤	٣٣٢٤	٣٣٤٥	٣٣٦٥	٣٣٨٥	٣٤٠٤
٢٢	[illegible]	٣٤٤٤	٣٤٦٤	٣٤٨٣	٣٥٠٢	٣٥٢٢	٣٥٤١	٣٥٦٠	٣٥٧٩	٣٥٩٨
٢٣	٣٦١٧	٣٦٣٦	٣٦٥٥	٣٦٧٤	٣٦٩٢	٣٧١١	٣٧٢٩	٣٧٤٧	٣٧٦٦	٣٧٨٤
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢٠	٣٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧	٣٩٤٥	٣٩٦٢
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩	٤١١٦	٤١٣٣
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥	٤٢٨١	٤٢٩٨
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥	٤٤٤٠	٤٤٥٦
٢٨	٤٤٧٢	٤٤٨٧	٤٥٠٢	٤٥١٨	٤٥٣٣	٤٥٤٨	٤٥٦٤	٤٥٧٩	٤٥٩٤	٤٦٠٩

العدد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٢٩	٤٦٢٤	٤٦٣٩	٤٦٥٤	٤٦٦٩	٤٦٨٣	٤٦٩٨	٤٧١٣	٤٧٢٨	٤٧٤٢	٤٧٥٧
٣٠	٤٧٧١	٤٧٨٦	٤٨٠٠	٤٨١٤	٤٨٢٩	٤٨٤٣	٤٨٥٧	٤٨٧١	٤٨٨٦	٤٩٠٠
٣١	٤٩١٤	٤٩٢٨	٤٩٤٢	٤٩٥٥	٤٩٦٩	٤٩٨٣	٤٩٩٧	٥٠١١	٥٠٢٤	٥٠٣٨
٣٢	٥٠٥١	٥٠٦٥	٥٠٧٩	٥٠٩٢	٥١٠٥	٥١١٩	٥١٣٢	٥١٤٥	٥١٥٩	٥١٧٢
٣٣	٥١٨٥	٥١٩٨	٥٢١١	٥٢٢٤	٥٢٣٧	٥٢٥٠	٥٢٦٣	٥٢٧٦	٥٢٨٩	٥٣٠٢
٣٤	٥٣١٥	٥٣٢٨	٥٣٤٠	٥٣٥٣	٥٣٦٦	٥٣٧٨	٥٣٩١	٥٤٠٣	٥٤١٦	٥٤٢٨
٣٥	٥٤٤١	٥٤٥٣	٥٤٦٥	٥٤٧٨	٥٤٩٠	٥٥٠٢	٥٥١٤	٥٥٢٧	٥٥٣٩	٥٥٥١
٣٦	٥٥٦٣	٥٥٧٥	٥٥٨٧	٥٥٩٩	٥٦١١	٥٦٢٣	٥٦٣٥	٥٦٤٧	٥٦٥٨	٥٦٧٠
٣٧	٥٦٨٢	٥٦٩٤	٥٧٠٥	٥٧١٧	٥٧٢٩	٥٧٤٠	٥٧٥٢	٥٧٦٣	٥٧٧٥	٥٧٨٦
٣٨	٥٧٩٨	٥٨٠٩	٥٨٢١	٥٨٣٢	٥٨٤٣	٥٨٥٥	٥٨٦٦	٥٨٧٧	٥٨٨٨	٥٨٩٩
٣٩	٥٩١١	٥٩٢٢	٥٩٣٣	٥٩٤٤	٥٩٥٥	٥٩٦٦	٥٩٧٧	٥٩٨٨	٥٩٩٩	٦٠١٠
٤٠	٦٠٢١	٦٠٣١	٦٠٤٢	٦٠٥٣	٦٠٦٤	٦٠٧٥	٦٠٨٥	٦٠٩٦	٦١٠٧	٦١١٧
٤١	٦١٢٨	٦١٣٨	٦١٤٩	٦١٦٠	٦١٧٠	٦١٨٠	٦١٩١	٦٢٠١	٦٢١٢	٦٢٢٢
٤٢	٦٢٣٢	٦٢٤٣	٦٢٥٣	٦٢٦٣	٦٢٧٤	٦٢٨٤	٦٢٩٤	٦٣٠٤	٦٣١٤	٦٣٢٥
٤٣	٦٣٣٥	٦٣٤٥	٦٣٥٥	٦٣٦٥	٦٣٧٥	٦٣٨٥	٦٣٩٥	٦٤٠٥	٦٤١٥	٦٤٢٥
٤٤	٦٤٣٥	٦٤٤٤	٦٤٥٤	٦٤٦٤	٦٤٧٤	٦٤٨٤	٦٤٩٣	٦٥٠٣	٦٥١٣	٦٥٢٢
٤٥	٦٥٣٢	٦٥٤٢	٦٥٥١	٦٥٦١	٦٥٧١	٦٥٨٠	٦٥٩٠	٦٥٩٩	٦٦٠٩	٦٦١٨
٤٦	٦٦٢٨	٦٦٣٧	٦٦٤٦	٦٦٥٦	٦٦٦٥	٦٦٧٥	٦٦٨٤	٦٦٩٣	٦٧٠٢	٦٧١٢
٤٧	٦٧٢١	٦٧٣٠	٦٧٣٩	٦٧٤٩	٦٧٥٨	٦٧٦٧	٦٧٧٦	٦٧٨٥	٦٧٩٤	٦٨٠٣

العدد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤٨	٦٨١٢	٦٨٢١	٦٨٣٠	٦٨٣٩	٦٨٤٨	٦٨٥٦	٦٨٦٦	٦٨٧٥	٦٨٨٤	٦٨٩٣
٤٩	٦٩٠٢	٦٩١١	٦٩٢٠	٦٩٢٨	٦٩٣٧	٦٩٤٦	٦٩٥٥	٦٩٦٤	٦٩٧٢	٦٩٨١
٥٠	٦٩٩٠	٦٩٩٨	٧٠٠٧	٧٠١٦	٧٠٢٤	٧٠٣٣	٧٠٤٢	٧٠٥٠	٧٠٥٩	٧٠٦٧
٥١	٧٠٧٦	٧٠٨٤	٧٠٩٣	٧١٠١	٧١١٠	٧١١٨	٧١٢٦	٧١٣٥	٧١٤٣	٧١٥٢
٥٢	٧١٦٠	٧١٦٨	٧١٧٧	٧١٨٥	٧١٩٣	٧٢٠٢	٧٢١٠	٧٢١٨	٧٢٢٦	٧٢٣٥
٥٣	٧٢٤٣	٧٢٥١	٧٢٥٩	٧٢٦٧	٧٢٧٥	٧٢٨٤	٧٢٩٢	٧٣٠٠	٧٣٠٨	٧٣١٦
٥٤	٧٣٢٤	٧٣٣٢	٧٣٤٠	٧٣٤٨	٧٣٥٦	٧٣٦٤	٧٣٧٢	٧٣٨٠	٧٣٨٨	٧٣٩٦
٥٥	٧٤٠٤	٧٤١٢	٧٤١٩	٧٤٢٧	٧٤٣٥	٧٤٤٣	٧٤٥١	٧٤٥٩	٧٤٦٦	٧٤٧٤
٥٦	٧٤٨٢	٧٤٩٠	٧٤٩٧	٧٥٠٥	٧٥١٣	٧٥٢٠	٧٥٢٨	٧٥٣٦	٧٥٤٣	٧٥٥١
٥٧	٧٥٥٩	٧٥٦٦	٧٥٧٤	٧٥٨٢	٧٥٨٩	٧٥٩٧	٧٦٠٤	٧٦١٢	٧٦١٩	٧٦٢٧
٥٨	٧٦٣٤	٧٦٤٢	٧٦٤٩	٧٦٥٧	٧٦٦٤	٧٦٧٢	٧٦٧٩	٧٦٨٦	٧٦٩٤	٧٧٠١
٥٩	٧٧٠٩	٧٧١٦	٧٧٢٣	٧٧٣١	٧٧٣٨	٧٧٤٥	٧٧٥٢	٧٧٦٠	٧٧٦٧	٧٧٧٤
٦٠	٧٧٨٢	٧٧٨٩	٧٧٩٦	٧٨٠٣	٧٨١٠	٧٨١٨	٧٨٢٥	٧٨٣٢	٧٨٣٩	٧٨٤٦
٦١	٧٨٥٣	٧٨٦٠	٧٨٦٨	٧٨٧٥	٧٨٨٢	٧٨٨٩	٧٨٩٦	٧٩٠٣	٧٩١٠	٧٩١٧
٦٢	٧٩٢٤	٧٩٣١	٧٩٣٨	٧٩٤٥	٧٩٥٢	٧٩٥٩	٧٩٦٦	٧٩٧٣	٧٩٨٠	٧٩٨٧
٦٣	٧٩٩٣	٨٠٠٠	٨٠٠٧	٨٠١٤	٨٠٢١	٨٠٢٨	٨٠٣٥	٨٠٤١	٨٠٤٨	٨٠٥٥
٦٤	٨٠٦٢	٨٠٦٩	٨٠٧٥	٨٠٨٢	٨٠٨٩	٨٠٩٦	٨١٠٢	٨١٠٩	٨١١٦	٨١٢٢
٦٥	٨١٢٩	٨١٣٦	٨١٤٢	٨١٤٩	٨١٥٦	٨١٦٢	٨١٦٩	٨١٧٦	٨١٨٢	٨١٨٩
٦٦	٨١٩٥	٨٢٠٢	٨٢٠٩	٨٢١٥	٨٢٢٢	٨٢٢٨	٨٢٣٥	٨٢٤١	٨٢٤٨	٨٢٥٤

العدد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٦٧	٨٢٦١	٨٢٦٧	٨٢٧٤	٨٢٨٠	٨٢٨٧	٨٢٩٣	٨٢٩٩	٨٣٠٦	٨٣١٢	٨٣١٩
٦٨	٨٣٢٥	٨٣٣١	٨٣٣٨	٨٣٤٤	٨٣٥١	٨٣٥٧	٨٣٦٣	٨٣٧٠	٨٣٧٦	٨٣٨٢
٦٩	٨٣٨٨	٨٣٩٥	٨٤٠١	٨٤٠٧	٨٤١٤	٨٤٢٠	٨٤٢٦	٨٤٣٢	٨٤٣٩	٨٤٤٥
٧٠	٨٤٥١	٨٤٥٧	٨٤٦٣	٨٤٧٠	٨٤٧٦	٨٤٨٢	٨٤٨٨	٨٤٩٤	٨٥٠٠	٨٥٠٦
٧١	٨٥١٣	٨٥١٩	٨٥٢٥	٨٥٣١	٨٥٣٧	٨٥٤٣	٨٥٤٩	٨٥٥٥	٨٥٦١	٨٥٦٧
٧٢	٨٥٧٣	٨٥٧٩	٨٥٨٥	٨٥٩١	٨٥٩٧	٨٦٠٣	٨٦٠٩	٨٦١٥	٨٦٢١	٨٦٢٧
٧٣	٨٦٣٣	٨٦٣٩	٨٦٤٥	٨٦٥١	٨٦٥٧	٨٦٦٣	٨٦٦٩	٨٦٧٥	٨٦٨١	٨٦٨٦
٧٤	٨٦٩٢	٨٦٩٨	٨٧٠٤	٨٧١٠	٨٧١٦	٨٧٢٢	٨٧٢٧	٨٧٣٣	٨٧٣٩	٨٧٤٥
٧٥	٨٧٥١	٨٧٥٦	٨٧٦٢	٨٧٦٨	٨٧٧٤	٨٧٧٩	٨٧٨٥	٨٧٩١	٨٧٩٧	٨٨٠٢
٧٦	٨٨٠٨	٨٨١٤	٨٨٢٠	٨٨٢٥	٨٨٣١	٨٨٣٧	٨٨٤٢	٨٨٤٨	٨٨٥٤	٨٨٥٩
٧٧	٨٨٦٥	٨٨٧١	٨٨٧٦	٨٨٨٢	٨٨٨٧	٨٨٩٣	٨٨٩٩	٨٩٠٤	٨٩١٠	٨٩١٥
٧٨	٨٩٢١	٨٩٢٧	٨٩٣٢	٨٩٣٨	٨٩٤٣	٨٩٤٩	٨٩٥٤	٨٩٦٠	٨٩٦٥	٨٩٧١
٧٩	٨٩٧٦	٨٩٨٢	٨٩٨٧	٨٩٩٣	٨٩٩٨	٩٠٠٤	٩٠٠٩	٩٠١٥	٩٠٢٠	٩٠٢٥
٨٠	٩٠٣١	٩٠٣٦	٩٠٤٢	٩٠٤٧	٩٠٥٣	٩٠٥٨	٩٠٦٣	٩٠٦٩	٩٠٧٤	٩٠٧٩
٨١	٩٠٨٥	٩٠٩٠	٩٠٩٦	٩١٠١	٩١٠٦	٩١١٢	٩١١٧	٩١٢٢	٩١٢٨	٩١٣٣
٨٢	٩١٣٨	٩١٤٣	٩١٤٩	٩١٥٤	١٩٥٩	٩١٦٥	٩١٧٠	٩١٧٥	٩١٨٠	٩١٨٦
٨٣	٩١٩١	٩١٩٦	٩٢٠١	٩٢٠٦	٩٢١٢	٩٢١٧	٩٢٢٢	٩٢٢٧	٩٢٣٢	٩٢٣٨
٨٤	٩٢٤٣	٩٢٤٨	٩٢٥٣	٩٢٥٨	٩٢٦٣	٩٢٦٩	٩٢٧٤	٩٢٧٩	٩٢٨٤	٩٢٨٩
٨٥	٩٢٩٤	٩٢٩٩	٩٣٠٤	٩٣٠٩	٩٣١٥	٩٣٢٠	٩٣٢٥	٩٣٣٠	٩٣٣٥	٩٣٤٠

العدد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٨٦	٩٣٤٥	٩٣٥٠	٩٣٥٥	٩٣٦٠	٩٣٦٥	٩٣٧٠	٩٣٧٥	٩٣٨٠	٩٣٨٥	٩٣٩٠
٨٧	٩٣٩٥	٩٤٠٠	٩٤٠٥	٩٤١٠	٩٤١٥	٩٤٢٠	٩٤٢٥	٩٤٣٠	٩٤٣٥	٩٤٤٠
٨٨	٩٤٤٥	٩٤٥٠	٩٤٥٥	٩٤٦٠	٩٤٦٥	٩٤٦٩	٩٤٧٤	٩٤٧٩	٩٤٨٤	٩٤٨٩
٨٩	٩٤٩٤	٩٤٩٩	٩٥٠٤	٩٥٠٩	٩٥١٣	٩٥١٨	٩٥٢٣	٩٥٢٨	٩٥٣٣	٩٥٣٨
٩٠	٩٥٤٢	٩٥٤٧	٩٥٥٢	٩٥٥٧	٩٥٦٢	٩٥٦٦	٩٥٧١	٩٥٧٦	٩٥٨١	٩٥٨٦
٩١	٩٥٩٠	٩٥٩٥	٩٦٠٠	٩٦٠٥	٩٦٠٩	٩٦١٤	٩٦١٩	٩٦٢٤	٩٦٢٨	٩٦٣٣
٩٢	٩٦٣٨	٩٦٤٣	٩٦٤٧	٩٦٥٢	٩٦٥٧	٩٦٦١	٩٦٦٦	٩٦٧١	٩٦٧٥	٩٦٨٠
٩٣	٩٦٨٥	٩٦٨٩	٩٦٩٤	٩٦٩٩	٩٧٠٣	٩٧٠٨	٩٧١٣	٩٧١٧	٩٧٢٢	٩٧٢٧
٩٤	٩٧٣١	٩٧٣٦	٩٧٤١	٩٧٤٥	٩٧٥٠	٩٧٥٤	٩٧٥٩	٩٧٦٣	٩٧٦٨	٩٧٧٣
٩٥	٩٧٧٧	٩٧٨٢	٩٧٨٦	٩٧٩١	٩٧٩٥	٩٨٠٠	٩٨٠٥	٩٨٠٩	٩٨١٤	٩٨١٨
٩٦	٩٧٧٧	٩٧٨٢	٩٧٨٦	٩٧٩١	٩٧٩٥	٩٨٠٠	٩٨٠٥	٩٨٠٩	٩٨١٤	٩٨١٨
٩٧	٩٨٢٣	٩٨٢٧	٩٨٣٢	٩٨٣٦	٩٨٤١	٩٨٤٥	٩٨٥٠	٩٨٥٤	٩٨٥٩	٩٨٦٣
٩٨	٩٩١٢	٩٩١٧	٩٩٢١	٩٩٢٦	٩٩٣٠	٩٩٣٤	٩٩٣٩	٩٩٤٣	٩٩٤٨	٩٩٥٢
٩٩	٩٩٥٦	٩٩٦١	٩٩٦٥	٩٩٦٩	٩٩٧٤	٩٩٧٨	٩٩٨٣	٩٩٨٧	٩٩٩١	٩٩٩٦

جدول (ب)

ارتفاعات المنحنى الاعتدالي التي تناظر درجات معيارية معينة

يجب قبل استخدام هذا الجدول تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية ، كما يجب أن يكون توزيع المتغير اعتداليا .

الدرجة المعيارية	الارتفاع	الدرجة المعيارية	الارتفاع	الدرجة المعيارية	الارتفاع
٠٠ر٠	٠ر٣٩٨٩	٨٥ر٠	٠ر٢٧٨٠	١ر٧٠	٠ر٠٩٤٠
٠٥ر٠	٠ر٣٩٨٤	٩٠ر٠	٠ر٢٦٦١	١ر٧٥	٠ر٠٨٦٣
١٠ر٠	٠ر٣٩٧٠	٩٥ر٠	٠ر٢٥٤١	١ر٨٠	٠ر٠٧٩٠
١٥ر٠	٠ر٣٩٤٥	١ر٠٠	٠ر٢٤٢٠	١ر٨٥	٠ر٠٧٢١
٢٠ر٠	٠ر٣٩١٠	١ر٠٥	٠ر٢٢٩٩	١ر٩٠	٠ر٠٦٥٦
٢٥ر٠	٠ر٣٨٦٧	١ر١٠	٠ر٢١٧٩	١ر٩٥	٠ر٠٥٩٦
٣٠ر٠	٠ر٣٨١٤	١ر١٥	٠ر٢٠٥٩	٢ر٠٠	٠ر٠٥٤٠
٣٥ر٠	٠ر٣٧٥٢	١ر٢٠	٠ر١٩٤٢	٢ر٠٥	٠ر٠٤٨٨
٤٠ر٠	٠ر٣٦٨٣	١ر٢٥	٠ر١٨٢٦	٢ر١٠	٠ر٠٤٤٠
٤٥ر٠	٠ر٣٦٠٥	١ر٣٠	٠ر١٧١٤	٢ر١٥	٠ر٠٣٩٦
٥٠ر٠	٠ر٣٥٢١	١ر٣٥	٠ر١٦٠٤	٢ر٢٠	٠ر٠٣٥٥
٥٥ر٠	٠ر٣٤٢٩	١ر٤٠	٠ر١٤٩٧	٢ر٢٥	٠ر٠٣١٧
٦٠ر٠	٠ر٣٣٣٢	١ر٤٥	٠ر١٣٩٤	٢ر٣٠	٠ر٠٢٨٣
٦٥ر٠	٠ر٣٢٣٠	١ر٥٠	٠ر١٢٩٥	٢ر٣٥	٠ر٠٢٥٢
٧٠ر٠	٠ر٣١٢٣	١ر٥٥	٠ر١٢٠٠	٢ر٤٠	٠ر٠٢٢٤
٧٥ر٠	٠ر٣٠١١	١ر٦٠	٠ر١١٠٩	٢ر٤٥	٠ر٠١٩٨
٨٠ر٠	٠ر٢٨٩٧	١ر٦٥	٠ر١٠٢٣	٢ر٥٠	٠ر٠١٧٥

الدرجه المعيارية	الارتفاع	الدرجة المعيارية	الارتفاع	الدرجة المعارية	الارتفاع
٢ر٥٥	٠ر٠١٥٤	٣ر٠٥	٠ر٠٠٣٨	٤ر٠٠	٠ر٠٠٠١
٢ر٦٠	٠ر٠١٣٦	٣ر١٠	٠ر٠٠٣٣		
٢ر٦٥	٠ر٠١١٩	٣ر١٥	٠ر٠٠٢٨		
٢ر٧٠	٠ر٠١٠٤	٣ر٢٠	٠ر٠٠٢٤		
٢ر٧٥	٠ر٠٠٩١	٣ر٢٥	٠ر٠٠٢٠		
٢ر٨٠	٠ر٠٠٧٩	٣ر٣٠	٠ر٠٠١٧		
٢ر٨٥	٠ر٠٠٦٩	٣ر٤٠	٠ر٠٠١٢		
٢ر٩٠	٠ر٠٠٦٠	٣ر٥٠	٠ر٠٠٠٩		
٢ر٩٥	٠ر٠٠٥١	٣ر٦٠	٠ر٠٠٠٦		
٣ر٠٠	٠ر٠٠٤٤	٣ر٧٠	٠ر٠٠٠٤		

جدول (ج)

المساحات تحت المنحنى الاعتدالى المعيارى

قبل استخدام هذا الجدول يجب تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية ، وأن يكون توزيع المتغير اعتداليا . والقيم المدونة فى هذا الجدول تمثل نسب المساحات تحت المنحنى الاعتدالى المعيارى الذى متوسطه = صفر ، وانحرافه المعيارى = ١ ، والمساحة الكلية بين التى تحدها = ١ أيضا . ونظراً لأن المنحنى الاعتدالى متماثل ، فإننا اقتصرنا فى هذا الجدول على أجزاء المساحات التى تناظر القيم الموجبة للدرجات المعيارية . وهذه تساوى تماما المساحات التى تناظر القيم السالبة لهذه الدرجات . والعمود الأول يبين الدرجات المعيارية (د)، والعمود الثانى يبين المساحة المحصورة بين المتوسط ($\bar{س}$) وكل من هذه الدرجات (د) ، ويبين العمود الثالث المساحة المتبقية حتى نهاية الطرف الموجب للتوزيع .

د	المساحة بين $\bar{س}$ ، د	المساحة المتبقية	د	المساحة بين $\bar{س}$ ، د	المساحة المتبقية
٠ر٠٠	٠ر٠٠٠٠	٠ر٠٠٠٠	٠ر٣٤	٠ر١٣٣١	٠ر٣٦٦٩
٠ر٠٢	٠ر٠٠٨٠	٠ر٤٩٢٠	٠ر٣٦	٠ر١٤٠٦	٠ر٣٥٩٤
٠ر٠٤	٠ر٠١٦٠	٠ر٤٨٤٠	٠ر٣٨	٠ر١٤٨٠	٠ر٣٥٢٠
٠ر٠٦	٠ر٠٢٣٩	٠ر٤٧٦١	٠ر٤٠	٠ر١٥٥٤	٠ر٣٤٤٦
٠ر٠٨	٠ر٠٣١٩	٠ر٤٦٨١	٠ر٤٢	٠ر١٦٢٨	٠ر٣٣٧٢
٠ر١٠	٠ر٠٣٩٨	٠ر٤٦٠٢	٠ر٤٤	٠ر١٧٠٠	٠ر٣٣٠٠
٠ر١٢	٠ر٠٤٧٨	٠ر٤٥٢٢	٠ر٤٦	٠ر١٧٧٢	٠ر٣٢٢٨
٠ر١٤	٠ر٠٥٥٧	٠ر٤٤٤٣	٠ر٤٨	٠ر١٨٤٤	٠ر٣١٥٦
٠ر١٦	٠ر٠٦٣٦	٠ر٤٣٦٤	٠ر٥٠	٠ر١٩١٥	٠ر٣٠٨٥
٠ر١٨	٠ر٠٧١٤	٠ر٤٢٨٦	٠ر٥٢	٠ر١٩٨٥	٠ر٣٠١٥
٠ر٢٠	٠ر٠٧٩٣	٠ر٤٢٠٧	٠ر٥٤	٠ر٢٠٥٤	٠ر٢٩٤٦
٠ر٢٢	٠ر٠٨٧١	٠ر٤١٢٩	٠ر٥٦	٠ر٢١٢٣	٠ر٢٨٧٧
٠ر٢٤	٠ر٠٩٤٨	٠ر٤٠٥٢	٠ر٥٨	٠ر٢١٩٠	٠ر٢٨١٠
٠ر٢٦	٠ر١٠٢٦	٠ر٣٩٧٤	٠ر٦٠	٠ر٢١٥٧	٠ر٢٧٤٣
٠ر٢٨	٠ر١١٠٣	٠ر٣٨٩٧	٠ر٦٢	٠ر٢٣٢٤	٠ر٢٦٧٦
٠ر٣٠	٠ر١١٧٩	٠ر٣٨٢١	٠ر٦٤	٠ر٢٣٨٩	٠ر٢٦١١
٠ر٣٢	٠ر١٢٥٥	٠ر٣٧٤٥	٠ر٦٦	٠ر٢٤٥٤	٠ر٢٥٤٦

د	المسافة بين س، د	المساحة المتبقية
٠ر٦٨	٠ر٢٥١٧	٠ر٢٤٨٣
٠ر٧٠	٠ر٢٥٨٠	٠ر٢٤٢٠
٠ر٧٢	٠ر٢٦٤٢	٠ر٢٣٥٨
٠ر٧٤	٠ر٢٧٠٤	٠ر٢٢٩٦
٠ر٧٦	٠ر٢٧٦٤	٠ر٢٢٣٦
٠ر٧٨	٠ر٢٨٢٣	٠ر٢١٧٧
٠ر٨٠	٠ر٢٨٨١	٠ر٢١١٩
٠ر٨٢	٠ر٢٩٣٩	٠ر٢٠٦١
٠ر٨٤	٠ر٢٩٩٥	٠ر٢٠٠٥
٠ر٨٦	٠ر٣٠٥١	٠ر١٩٤٩
٠ر٨٨	٠ر٣١٠٦	٠ر١٨٩٤
٠ر٩٠	٠ر٣١٥٩	٠ر١٨٤١
٠ر٩٢	٠ر٣٢١٢	٠ر١٧٨٨
٠ر٩٤	٠ر٣٢٦٤	٠ر١٧٣٦
٠ر٩٦	٠ر٣٣١٥	٠ر١٦٨٥
٠ر٩٨	٠ر٣٣٦٥	٠ر١٦٣٥
١ر٠٠	٠ر٣٤١٣	٠ر١٥٨٧
١ر٠٢	٠ر٣٤٦١	٠ر١٥٣٩
١ر٠٤	٠ر٣٥٠٨	٠ر١٤٩٢
١ر٠٦	٠ر٣٥٥٤	٠ر١٤٤٦
١ر٠٨	٠ر٣٥٩٩	٠ر١٤٠١
١ر١٠	٠ر٣٦٤٣	٠ر١٣٥٧
١ر١٢	٠ر٣٦٨٦	٠ر١٣١٤
١ر١٤	٠ر٣٧٢٩	٠ر١٢٧١
١ر١٦	٠ر٣٧٧٠	٠ر١٢٣٠
١ر١٨	٠ر٣٨١٠	٠ر١١٩٠
١ر٢٠	٠ر٣٨٤٩	٠ر١١٥١
١ر٢٢	٠ر٣٨٨٨	٠ر١١١٢
١ر٢٤	٠ر٣٩٢٥	٠ر١٠٧٥
١ر٢٦	٠ر٣٩٦٢	٠ر١٠٣٨
١ر٢٨	٠ر٣٩٩٧	٠ر١٠٠٣
١ر٣٠	٠ر٤٠٣٢	٠ر٠٩٦٨
١ر٣٢	٠ر٤٠٦٦	٠ر٠٩٣٤
١ر٣٤	٠ر٤٠٩٩	٠ر٠٩٠١
١ر٣٦	٠ر٤١٣١	٠ر٠٨٦٩
١ر٣٨	٠ر٤١٦٢	٠ر٠٨٣٨
١ر٤٠	٠ر٤١٩٢	٠ر٠٨٠٨
١ر٤٢	٠ر٤٢٢٢	٠ر٠٧٧٨
١ر٤٤	٠ر٤٢٥١	٠ر٠٧٤٩
١ر٤٦	٠ر٤٢٧٩	٠ر٠٧٢١
١ر٤٨	٠ر٤٣٠٦	٠ر٠٦٩٤
١ر٥٠	٠ر٤٣٣٢	٠ر٠٦٦٨
١ر٥٢	٠ر٤٣٥٧	٠ر٠٦٤٣
١ر٥٤	٠ر٤٣٨٢	٠ر٠٦١٨
١ر٥٦	٠ر٤٤٠٦	٠ر٠٥٩٤
١ر٥٨	٠ر٤٤٢٩	٠ر٠٥٧١
١ر٦٠	٠ر٤٤٥٢	٠ر٠٥٤٨
١ر٦٢	٠ر٤٤٧٤	٠ر٠٥٢٦
١ر٦٤	٠ر٤٤٩٥	٠ر٠٥٠٥
١ر٦٦	٠ر٤٥١٥	٠ر٠٤٨٥
١ر٦٨	٠ر٤٥٣٥	٠ر٠٤٦٥
١ر٧٠	٠ر٤٥٥٤	٠ر٠٤٤٦
١ر٧٢	٠ر٤٥٧٣	٠ر٠٤٢٧
١ر٧٤	٠ر٤٥٩١	٠ر٠٤٠٩
١ر٧٦	٠ر٤٦٠٨	٠ر٠٣٩٢
١ر٧٨	٠ر٤٦٢٥	٠ر٠٣٧٥
١ر٨٠	٠ر٤٦٤١	٠ر٠٣٥٩
١ر٨٢	٠ر٤٦٥٦	٠ر٠٣٤٤
١ر٨٤	٠ر٤٦٧١	٠ر٠٣٢٩
١ر٨٦	٠ر٤٦٨٦	٠ر٠٣١٤
١ر٨٨	٠ر٤٦٩٩	٠ر٠٣٠١
١ر٩٠	٠ر٤٧١٣	٠ر٠٢٨٧
١ر٩٢	٠ر٤٧٢٦	٠ر٠٢٧٤
١ر٩٤	٠ر٤٧٣٨	٠ر٠٢٦٢
١ر٩٦	٠ر٤٧٥٠	٠ر٠٢٥٠
١ر٩٨	٠ر٤٧٦١	٠ر٠٢٣٩

د	المساحة بين س، د	المساحة المتبقية
٢٫٠٠	٠٫٤٧٧٢	٠٫٠٢٢٨
٢٫٠٢	٠٫٤٧٨٣	٠٫٠٢١٧
٢٫٠٤	٠٫٤٧٩٣	٠٫٠٢٠٧
٢٫٠٦	٠٫٤٨٠٣	٠٫٠١٩٧
٢٫٠٨	٠٫٤٨١٢	٠٫٠١٨٨
٢٫١٠	٠٫٤٨٢١	٠٫٠١٧٩
٢٫١٢	٠٫٤٨٣٠	٠٫٠١٧٠
٢٫١٤	٠٫٤٨٣٨	٠٫٠١٦٢
٢٫١٦	٠٫٤٨٤٦	٠٫٠١٥٤
٢٫١٨	٠٫٤٨٥٤	٠٫٠١٤٦
٢٫٢٠	٠٫٤٨٦١	٠٫٠١٣٩
٢٫٢٢	٠٫٤٨٦٨	٠٫٠١٣٢
٢٫٢٤	٠٫٤٨٧٥	٠٫٠١٢٥
٢٫٢٦	٠٫٤٨٨١	٠٫٠١١٩
٢٫٢٨	٠٫٤٨٨٧	٠٫٠١١٣
٢٫٣٠	٠٫٤٨٩٣	٠٫٠١٠٧
٢٫٣٢	٠٫٤٨٩٨	٠٫٠١٠٢
١٫٣٦	٠٫٤٩٠٩	٠٫٠٠٩١
٢٫٣٤	٠٫٤٩٠٤	٠٫٠٠٩٦
٢٫٣٨	٠٫٤٩١٣	٠٫٠٠٨٧
٢٫٤٠	٠٫٤٩١٨	٠٫٠٠٨٢
٢٫٤٢	٠٫٤٩٢٢	٠٫٠٠٧٨
٢٫٤٤	٠٫٤٩٢٧	٠٫٠٠٧٣
٢٫٤٦	٠٫٤٩٣١	٠٫٠٠٦٩
٢٫٤٨	٠٫٤٩٣٤	٠٫٠٠٦٦
٢٫٥٠	٠٫٤٩٣٨	٠٫٠٠٦٢
٢٫٥٢	٠٫٤٩٤١	٠٫٠٠٥٩
٢٫٥٤	٠٫٤٩٤٥	٠٫٠٠٥٥
٢٫٥٦	٠٫٤٩٤٨	٠٫٠٠٥٢
٢٫٥٨	٠٫٤٩٥١	٠٫٠٠٤٩
٢٫٦٠	٠٫٤٩٥٣	٠٫٠٠٤٧
٢٫٦٢	٠٫٤٩٥٦	٠٫٠٠٤٤
٢٫٦٤	٠٫٤٩٥٩	٠٫٠٠٤١
٢٫٦٦	٠٫٤٩٦١	٠٫٠٠٣٩
٢٫٦٨	٠٫٤٩٦٣	٠٫٠٠٣٧
٢٫٧٠	٠٫٤٩٦٥	٠٫٠٠٣٥
٢٫٧٢	٠٫٤٩٦٧	٠٫٠٠٣٣
٢٫٧٤	٠٫٤٩٦٩	٠٫٠٠٣١
٢٫٧٦	٠٫٤٩٧١	٠٫٠٠٢٩
٢٫٧٨	٠٫٤٩٧٣	٠٫٠٠٢٧
٢٫٨٠	٠٫٤٩٧٤	٠٫٠٠٢٦
٢٫٨٢	٠٫٤٩٧٦	٠٫٠٠٢٤
٢٫٨٤	٠٫٤٩٧٧	٠٫٠٠٢٣
٢٫٨٦	٠٫٤٩٧٩	٠٫٠٠٢١
٢٫٨٨	٠٫٤٩٨٠	٠٫٠٠٢٠
٢٫٩٠	٠٫٤٩٨١	٠٫٠٠١٩
٢٫٩٢	٠٫٤٩٨٢	٠٫٠٠١٨
٢٫٩٤	٠٫٤٩٨٤	٠٫٠٠١٦
٢٫٩٦	٠٫٤٩٨٥	٠٫٠٠١٥
٢٫٩٨	٠٫٤٩٨٦	٠٫٠٠١٤
٣٫٠٠	٠٫٤٩٨٧	٠٫٠٠١٣
٣٫٠٢	٠٫٤٩٨٧	٠٫٠٠١٣
٣٫٠٤	٠٫٤٩٨٨	٠٫٠٠١٢
٣٫٠٦	٠٫٤٩٨٩	٠٫٠٠١١
٣٫٠٨	٠٫٤٩٩٠	٠٫٠٠١٠
٣٫١٠	٠٫٤٩٩٠	٠٫٠٠١٠

د	المساحة بين س، د	المساحة المتبقية	د	المساحة بين س، د	المساحة المتبقية
٣ر١٢	٠ر٤٩٩١	٠ر٠٠٠٩	٣ر٣٥	٠ر٤٩٩٥	٠ر٠٠٠٥
٣ر١٤	٠ر٤٩٩٢	٠ر٠٠٠٨	٣ر٤٠	٠ر٤٩٩٦	٠ر٠٠٠٤
٣ر١٦	٠ر٤٩٩٢	٠ر٠٠٠٨	٣ر٤٥	٠ر٤٩٩٧	٠ر٠٠٠٣
٣ر١٨	٠ر٤٩٩٣	٠ر٠٠٠٧	٣ر٥٠	٠ر٤٩٩٨	٠ر٠٠٠٢
٣ر٢٠	٠ر٤٩٩٣	٠ر٠٠٠٧	٣ر٦٠	٠ر٤٩٩٨	٠ر٠٠٠٢
٣ر٢٢	٠ر٤٩٩٤	٠ر٠٠٠٦	٣ر٧٠	٠ر٤٩٩٩	٠ر٠٠٠١
٣ر٢٤	٠ر٤٩٩٤	٠ر٠٠٠٦	٣ر٨٠	٠ر٤٩٩٩	٠ر٠٠٠١
٣ر٢٥	٠ر٤٩٩٤	٠ر٠٠٠٦	٣ر٩٠	٠ر٤٩٩٩٥	٠ر٠٠٠٠٥
٣ر٣٠	٠ر٤٩٩٤	٠ر٠٠٠٦	٤ر٠٠	٠ر٤٩٩٩٧	٠ر٠٠٠٠٣

جدول (د)

قيم $\sqrt{\frac{م}{ك}}$ ، $\sqrt{\frac{ك}{م}}$
المناظرة للنسب م ، ك اللازمة لحساب معامل فاى (φ)

لإيجاد قيمة معامل φ القصوى يلزم حساب قيمة كل من $\sqrt{\frac{م}{ك}}$ ، $\sqrt{\frac{ك}{م}}$.

ثم أوجد حاصل ضرب القيمتين الناتجتين . وتيسيراً لذلك يكفى الحصول على النسبة (م) وقراءة القيمة المناظر لها فى العمود الذى يشير إلى $\sqrt{\frac{م}{ك}}$ ، أو الحصول على النسبة (ك) وقراءة القيمة المناظرة لها فى العمود الذى يشير إلى $\sqrt{\frac{ك}{م}}$.

(م) أو (ك)	$\sqrt{\frac{م}{ك}}$	$\sqrt{\frac{ك}{م}}$	(ك) أو (م)	(م) أو (ك)	$\sqrt{\frac{م}{ك}}$	$\sqrt{\frac{ك}{م}}$	(ك) أو (م)
٠ر٩٩	٩ر٩٥٠	٠ر١٠٠٥	٠ر٠١	٠ر٨٩	٣ر٨٤٤	٠ر٣٥١٦	٠ر١١
٠ر٩٨	٧ر٠٠٠	٠ر١٤٢٩	٠ر٠٢	٠ر٨٨	٢ر٧٠٨	٠ر٣٦٩٣	٠ر١٢
٠ر٩٧	٥ر٦٨٦	٠ر١٧٥٩	٠ر٠٣	٠ر٨٧	٢ر٥٨٧	٠ر٣٨٦٥	٠ر١٣
٠ر٩٦	٤ر٨٩٩	٠ر٢٠٤١	٠ر٠٤	٠ر٨٦	٢ر٤٧٨	٠ر٤٠٣٥	٠ر١٤
٠ر٩٥	٤ر٣٥٩	٠ر٢٢٩٤	٠ر٠٥	٠ر٨٥	٢ر٣٨٠	٠ر٤٢٠١	٠ر١٥
٠ر٩٤	٣ر٩٥٨	٠ر٢٥٢٦	٠ر٠٦	٠ر٨٤	٢ر٢٩١	٠ر٤٣٦٥	٠ر١٦
٠ر٩٣	٣ر٦٤٥	٠ر٢٧٤٣	٠ر٠٧	٠ر٨٣	٢ر٢١٠	٠ر٤٥٢٥	٠ر١٧
٠ر٩٢	٣ر٣٩١	٠ر٢٩٤٩	٠ر٠٨	٠ر٨٢	٢ر١٣٤	٠ر٤٦٨٥	٠ر١٨
٠ر٩١	٣ر١٨٠	٠ر٣١٤٥	٠ر٠٩	٠ر٨١	٢ر٠٦٥	٠ر٤٨٤٤	٠ر١٩
٠ر٩٠	٣ر٠٠٠	٠ر٣٣٣٣	٠ر١٠	٠ر٨٠	٢ر٠٠٠	٠ر٥٠٠٠	٠ر٢٠

(م) أو (ك)	$\sqrt{\frac{م}{ك}}$	$\sqrt{\frac{ك}{م}}$	(ك) أو (م)
٠ر٧٩	١ر٩٤٠	٠ر٥١٥٦	٠ر٢١
٠ر٧٨	١ر٨٨٣	٠ر٥٢١١	٠ر٢٢
٠ر٧٥	١ر٧٣٢	٠ر٥٧٧٤	٠ر٢٥
٠ر٧٤	١ر٦٨٧	٠ر٥٩٢٨	٠ر٢٦
٠ر٧٣	١ر٦٤٤	٠ر٦٠٨٢	٠ر٢٧
٠ر٧٢	١ر٦٠٤	٠ر٦٢٣٦	٠ر٢٨
٠ر٧١	١ر٥٦٥	٠ر٦٣٩١	٠ر٢٩
٠ر٧٠	١ر٥٢٨	٠ر٦٥٤٧	٠ر٣٠
٠ر٦٩	١ر٤٩٢	٠ر٦٧٠٣	٠ر٣١
٠ر٦٨	١ر٤٥٨	٠ر٦٨٦٠	٠ر٣٢
٠ر٦٧	١ر٤٢٥	٠ر٧٠١٨	٠ر٣٣
٠ر٦٦	١ر٣٩٣	٠ر٧١٧٨	٠ر٣٤
٠ر٦٥	١ر٣٦٣	٠ر٧٣٣٨	٠ر٣٥
٠ر٦٤	١ر٣٣٣	٠ر٧٥٠٠	٠ر٣٦
٠ر٦٣	١ر٣٠٥	٠ر٧٦٦٣	٠ر٣٧

(م) أو (ك)	$\sqrt{\frac{م}{ك}}$	$\sqrt{\frac{ك}{م}}$	(ك) أو (م)
٠ر٦٢	١ر٢٧٧	٠ر٧٨٢٩	٠ر٣٨
٠ر٦١	١ر٢٥١	٠ر٧٩٩٦	٠ر٣٩
٠ر٦٠	١ر٢٢٥	٠ر٨١٦٥	٠ر٤٠
٠ر٥٩	١ر٢٠٠	٠ر٨٣٣٦	٠ر٤١
٠ر٥٨	١ر١٧٥	٠ر٨٥١٠	٠ر٤٢
٠ر٥٧	١ر١٥١	٠ر٨٦٨٦	٠ر٤٣
٠ر٧٧	١ر٨٣٠	٠ر٥٤٦٥	٠ر٢٣
٠ر٧٦	١ر٧٨٠	٠ر٥٦٢٠	٠ر٢٤
٠ر٥٦	١ر١٢٨	٠ر٨٨٦٤	٠ر٤٤
٠ر٥٥	١ر١٠٦	٠ر٩٠٤٥	٠ر٤٥
٠ر٥٤	١ر٠٨٣	٠ر٩٢٢٩	٠ر٤٦
٠ر٥٣	١ر٠٦٢	٠ر٩٤١٧	٠ر٤٧
٠ر٥٢	١ر٠٤١	٠ر٩٦٠٨	٠ر٤٨
٠ر٥١	١ر٠٢٠	٠ر٩٨٠٢	٠ر٤٩
٠ر٥٠	١ر٠٠٠	١ر٠٠٠	٠ر٥٠

جدول (٥)

قيم (ص١ ص٠) / ل ، √(ص١ ص٠ / ل)

اللازمة لحساب معامل الارتباط الثنائى المتسلسل ،
ومعامل الارتباط الثنائى المناظرة للنسب ص١ ، ص٠

لإيجاد قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل يلزم حساب قيمة √(ص١ ص٠ / ل) .

ولإيجاد قيمة معامل الارتباط الثنائى بمعلومية قيمة معامل الارتباط الثنائى المتسلسل يلزم حساب قيمة √(ص١ ص٠ / ل) .

وتيسيراً لذلك يكفى الحصول على النسبة (ص١) وقراءة القيمة المطلوبة المناظرة لها فى العمود الذى يشير إلى ذلك ، أو الحصول على النسبة (ص٠) وقراءة القيمة المناظرة لها فى العمود الذى يشير إلى ذلك .

(ص١) أو (ص٠)	ص١ ص٠ / ل	√(ص١ ص٠ / ل)	(ص٠) أو (ص١)	(ص١) أو (ص٠)	ص١ ص٠ / ل	√(ص١ ص٠ / ل)	(ص٠) أو (ص١)
٠ر٩٩	٠ر٢٧١٥	٣ر٧٢٢	٠ر٠١	٠ر٨٨	٠ر٥٢٧٩	١ر٦٢٥	٠ر١٢
٠ر٩٨	٠ر٤٠٤٨	٢ر٨٩٢	٠ر٠٢	٠ر٨٧	٠ر٥٣٤٦	١ر٥٩٠	٠ر١٣
٠ر٩٧	٠ر٤٢٧٧	٠ر٥٠٧	٠ر٠٣	٠ر٨٦	٠ر٥٤٠٩	١ر٥٥٩	٠ر١٤
٠ر٩٦	٠ر٤٤٥٦	٢ر٢٧٤	٠ر٠٤	٠ر٨٥	٠ر٥٤٦٨	١ر٥٣٢	٠ر١٥
٠ر٩٥	٠ر٤٦٠٥	٢ر١١٣	٠ر٠٥	٠ر٨٤	٠ر٥٥٢٤	١ر٥٠٧	٠ر١٦
٠ر٩٤	٠ر٤٧٣٥	١ر٩٩٤	٠ر٠٦	٠ر٨٣	٠ر٥٥٧٦	١ر٤٨٤	٠ر١٧
٠ر٩٣	٠ر٤٨٤٨	١ر٩٠٠	٠ر٠٧	٠ر٨٢	٠ر٥٦٢٥	١ر٤٦٤	٠ر١٨
٠ر٩٢	٠ر٤٩٥١	١ر٨٢٥	٠ر٠٨	٠ر٨١	٠ر٥٦٧١	١ر٤٤٦	٠ر١٨
٠ر٩١	٠ر٥٠٤٣	١ر٧٦٢	٠ر٠٩	٠ر٨٠	٠ر٥٧١٥	١ر٤٢٩	٠ر٢٠
٠ر٩٠	٠ر٥١٢٨	١ر٧٠٩	٠ر١٠	٠ر٧٩	٠ر٥٧٥٦	١ر٤١٣	٠ر٢١
٠ر٨٩	٠ر٥٢٠٦	١ر٦٦٤	٠ر١١	٠ر٧٨	٠ر٥٧٩٦	١ر٣٩٩	٠ر٢٢

(ص١) أو (ص٠)	ص١ ص٠ / ل	√(ص١ ص٠) / ل	(ص٠) أو (ص١)	(ص١) أو (ص٠)	ص١ ص٠ / ل	√(ص١ ص٠) / ل	(ص٠) أو (ص١)
٠ر٧٧	٠ر٥٨٣٢	١ر٣٨٦	٠ر٢٣	٠ر٦٢	٠ر٦١٨٨	١ر٢٧٥	٠ر٣٨
٠ر٧٦	٠ر٥٨٦٧	١ر٣٧٤	٠ر٢٤	٠ر٦١	٠ر٦٢٠٠	١ر٢٧١	٠ر٣٩
٠ر٧٥	٠ر٥٩٠٠	١ر٣٦٣	٠ر٢٥	٠ر٦٠	٠ر٦٢١٢	١ر٢٦٨	٠ر٤٠
٠ر٧٤	٠ر٥٩٣١	١ر٣٥٢	٠ر٢٦	٠ر٥٩	٠ر٦٢٢٣	١ر٢٦٥	٠ر٤١
٠ر٧٣	٠ر٥٩٦١	١ر٣٤٣	٠ر٢٧	٠ر٥٨	٠ر٦٢٣٢	١ر٢٦٣	٠ر٤٢
٠ر٧٢	٠ر٥٩٨٩	١ر٣٣٤	٠ر٢٨	٠ر٥٧	٠ر٦٢٤٠	١ر٢٦٠	٠ر٤٣
٠ر٧١	٠ر٦٠١٥	١ر٣٢٦	٠ر٢٩	٠ر٥٦	٠ر٦٢٤٧	١ر٢٥٩	٠ر٤٤
٠ر٧٠	٠ر٦٠٤٠	١ر٣١٨	٠ر٣٠	٠ر٥٥	٠ر٦٢٥٣	١ر٢٥٧	٠ر٤٥
٠ر٦٩	٠ر٦٠٦٣	١ر٣١١	٠ر٣١	٠ر٥٤	٠ر٦٢٥٨	١ر٢٥٦	٠ر٤٦
٠ر٦٨	٠ر٦٠٨٥	١ر٣٠٤	٠ر٣٢	٠ر٥٣	٠ر٦٢٦٢	١ر٢٥٥	٠ر٤٧
٠ر٦٧	٠ر٦١٠٦	١ر٢٩٨	٠ر٣٣	٠ر٥٢	٠ر٦٢٦٤	١ر٢٥٤	٠ر٤٨
٠ر٦٦	٠ر٦١٢٤	١ر٢٩٣	٠ر٣٤	٠ر٥١	٠ر٦٢٦٦	١ر٢٥٣	٠ر٤٩
٠ر٦٤	٠ر٦١٥٨	١ر٢٨٣	٠ر٣٦	٠ر٥٠	٠ر٦٢٦٧	١ر٢٥٣	٠ر٥٠
٠ر٦٣	٠ر٦١٧٤	١ر٢٧٩	٠ر٣٧				

جدول (و)

القيم التقديرية لمعامل الارتباط الرباعى (رر) المناظرة للنسب

أ د / ب جـ

لتقدير قيمة معامل الارتباط الرباعى بطريقة جيب تمام النسبة التقريبية طد يلزم إيجاد قيمة (أ د / ب جـ) وتطبيق الصورة الخاصة بذلك . ولتيسير الحصول على القيمة المقدرة يكفى إيجاد النسبة (أ د / ب جـ) وقراءة القيمة المناظرة لمعامل الارتباط الرباعى . فمثلا إذا كانت هذه النسبة تساوى ٥,٨١٩ فإنها تنحصر بين القيمتين المدونتين فى الجدول وهما ٥,٨١٣ ، ٦,٠٤٣ . والقيمتين المناظرتين لمعامل الارتباط الرباعى هما ٠,٦٠٥ ، ٠,٦١٥ أى ٠,٦١ مقربة إلى رقمين عشريين .
وإذا كانت النسبة (أ د / ب جـ) أقل من الواحد الصحيح نوجد (ب جـ / أ د) ونضع علامـــة (سالب) أمام قيمة معامل الارتباط الرباعى التى نحصل عليها من الجدول .

أ د / ب جـ	رر	أ د / ب جـ	رر	أ د / ب جـ	رر	أ د / ب جـ	رر
١ر٠١٣	٠ر٠٠٥	١ر٢٧٥	٠ر٠٩٥	١ر٦١٠	٠ر١٨٥	٢ر٠٤٨	ر٢٧٥
١ر٠٣٩	٠ر٠١٥	١ر٣٠٨	٠ر١٠٥	١ر٦٥٣	٠ر١٩٥	٢ر١٠٥	٠ر٢٨٥
١ر٠٦٦	٠ر٠٢٥	١ر٣٤٢	٠ر١١٥	١ر٦٩٧	٠ر٢٠٥	٢ر١٦٤	٠ر٢٩٥
١ر٠٩٣	٠ر٠٣٥	١ر٣٧٧	٠ر١٢٥	١ر٧٩٠	٠ر٢٢٥	٢ر٢٢٥	٠ر٣٠٥
١ر١٢٢	٠ر٠٤٥	١ر٤١٣	٠ر١٣٥	١ر٧٤٣	ر٢١٥	٢ر٢٨٨	٠ر٣١٥
١ر١٥٠	٠ر٠٥٥	١ر٤٥٠	٠ر١٤٥	١ر٨٣٨	ر٢٣٥	٢ر٣٥٣	٠ر٣٢٥
١ر١٨٠	٠ر٠٦٥	١ر٤٨٨	٠ر١٥٥	١ر٨٨٨	٠ر٢٤٥	٢ر٤٢١	٠ر٣٣٥
١ر٢١١	٠ر٠٧٥	١ر٥٢٨	٠ر١٦٥	١ر٩٤٠	٠ر٢٥٥	٢ر٤٩٠	٠ر٣٤٥
١ر٢٤٢	٠ر٠٨٥	١ر٥٦٨	٠ر١٧٥	١ر٩٩٣	٠ر٢٦٥	٢ر٥٦٣	٠ر٣٥٥

أ د / ب جـ	ر	أ د / ب جـ	ر	أ د / ب جـ	ر	أ د / ب جـ	ر
٢ر٦٣٨	٠ر٣٦٥	٤ر٥٠٢	٠ر٥٣٥	٨ر٩١٠	٠ر٧٠٥	٢٧ر٢١٢	٠ر٨٧٥
٢ر٧١٦	٠ر٣٧٥	٤ر٦٦٢	٠ر٥٤٥	٩ر٣٥١	٠ر٧١٥	٣٠ر١٠٦	٠ر٨٨٥
٢ر٧٩٧	٠ر٣٨٥	٤ر٨٣٠	٠ر٥٥٥	٩ر٨٢٨	٠ر٧٢٥	٣٣ر٥٧٨	٠ر٨٩٥
٢ر٨٨١	٠ر٣٩٥	٥ر٠٠٧	٠ر٥٦٥	١٠ر٣٤٤	٠ر٧٣٥	٣٧ر٨١٨	٠ر٩٠٥
٢ر٩٥٧	٠ر٤٠٥	٥ر١٩٢	٠ر٥٧٥	١٠ر٩٠٣	٠ر٧٤٥	٤٢ر١٠٦	٠ر٩١٥
٣ر٠٩٥	ر٤١٥	٥ر٣٨٨	٠ر٥٨٥	١١ر٥١٢	٠ر٧٥٥	٤٩ر٨٥١	٠ر٩٢٥
٣ر١٥٣	٠ر٤٢٥	٥ر٥٩٥	٠ر٥٩٥	١٢ر١٧٧	٠ر٧٦٥	٥٨ر٧٦٥	٠ر٩٣٥
٣ر٢٥١	٠ر٤٣٥	٥ر٨١٣	٠ر٦٠٥	١٢ر٩٠٦	٠ر٧٧٥	٧١ر٠٤٦	٠ر٩٤٥
٣ر٣٥٣	٠ر٤٤٥	٦ر٠٤٣	٠ر٦١٥	١٣ر٧٠٢	٠ر٧٨٥	٨٨ر٩٤٨	٠ر٩٥٥
٣ر٤٦٠	٠ر٤٥٥	٦ر٢٨٨	٠ر٦٢٥	١٤ر٥٩٢	٠ر٧٩٥	١١٧ر٥٢	٠ر٩٦٥
٣ر٥٧١	٠ر٤٦٥	٦ر٥٤٧	٠ر٦٣٥	١٥ر٥٧٣	٠ر٨٠٥	١٦٩ر٦٠	٠ر٩٧٥
٣ر٦٩٠	٠ر٤٧٥	٦ر٨٢٢	٠ر٦٤٥	١٦ر٦٧٠	٠ر٨١٥	٢٩٣ر٢٨	٠ر٩٨٥
٣ر٨٠٨	٠ر٤٨٥	٧ر١١٥	٠ر٦٥٥	١٧ر٩٠٠	٠ر٨٢٥	٩٣٤ر٠٦	٠ر٩٩٥
٣ر٩٣٥	٠ر٤٩٥	٧ر٤٢٨	٠ر٦٦٥	١٩ر٢٨٨	٠ر٨٣٥		
٤ر٠٦٧	٠ر٥٠٥	٧ر٧٦١	٠ر٦٧٥	٢٠ر٨٦٣	٠ر٨٤٥		
٤ر٢٠٥	٠ر٥١٥	٨ر١١٧	٠ر٦٨٥	٢٤ر٧٦٨	٠ر٨٦٥		
٤ر٣٥١	٠ر٥٢٥	٨ر٤٩٩	٠ر٦٩٥	٢٢ر٦٧٥	٠ر٨٥٥		

جدول (ل)

قيم معامل الارتباط الرباعى (ر ر) المناظرة لقيم معامل فاى (φ)

لتقدير قيمة معامل الارتباط الرباعى بمعلومية قيمة معامل فاى (φ) يكفى الحصول على قيمة معامل فاى وقراءة القيمة المناظرة لمعامل الارتباط الرباعى (ر ر) المدونة فى هذا الجدول .

φ	ر ر	φ	ر ر	φ	ر ر	φ	ر ر
٠ر٠٠٠	٠ر٠٠٠	٠ر١١٠	٠ر١٧٢	٠ر٢٢٠	٠ر٣٣٩	٠ر٣٣٠	٠ر٤٩٦
٠ر٠٠٥	٠ر٠٠٨	٠ر١١٥	٠ر١٨٠	٠ر٢٢٥	٠ر٣٤٦	٠ر٣٣٥	٠ر٥٠٢
٠ر٠١٠	٠ر٠١٦	٠ر١٢٠	٠ر١٨٧	٠ر٢٣٠	٠ر٣٥٤	٠ر٣٤٠	٠ر٥٠٩
٠ر٠١٥	٠ر٠٢٤	٠ر١٢٥	٠ر١٩٥	٠ر٢٣٥	٠ر٣٦١	٠ر٣٤٥	٠ر٥١٦
٠ر٠٢٠	٠ر٠٣١	٠ر١٣٠	٠ر٢٠٣	٠ر٢٤٠	٠ر٣٦٨	٠ر٣٥٠	٠ر٥٢٣
٠ر٠٢٥	٠ر٠٣٩	٠ر١٣٥	٠ر٢١١	٠ر٢٤٥	٠ر٣٧٥	٠ر٣٥٥	٠ر٥٢٩
٠ر٠٣٠	٠ر٠٤٧	٠ر١٤٠	٠ر٢١٨	٠ر٢٥٠	٠ر٣٨٣	٠ر٣٦٠	٠ر٥٣٦
٠ر٠٣٥	٠ر٠٥٥	٠ر١٤٥	٠ر٢٢٦	٠ر٢٥٥	٠ر٣٩٠	٠ر٣٦٥	٠ر٥٤٢
٠ر٠٤٠	٠ر٠٦٣	٠ر١٥٠	٠ر٢٣٤	٠ر٢٦٠	٠ر٣٩٧	٠ر٣٧٠	٠ر٥٤٩
٠ر٠٤٥	٠ر٠٧١	٠ر١٥٥	٠ر٢٤١	٠ر٢٦٥	٠ر٤٠٤	٠ر٣٧٥	٠ر٥٥٦
٠ر٠٥٠	٠ر٠٧٩	٠ر١٦٠	٠ر٢٤٩	٠ر٢٧٠	٠ر٤١٢	٠ر٣٨٠	٠ر٥٦٢
٠ر٠٥٥	٠ر٠٨٦	٠ر١٦٥	٠ر٢٥٦	٠ر٢٧٥	٠ر٤١٩	٠ر٣٨٥	٠ر٥٦٩
٠ر٠٦٠	٠ر٠٩٤	٠ر١٧٠	٠ر٢٦٤	٠ر٢٨٠	٠ر٤٢٦	٠ر٣٩٠	٠ر٥٧٥
٠ر٠٦٥	٠ر١٠٢	٠ر١٧٥	٠ر٢٧١	٠ر٢٨٥	٠ر٤٣٣	٠ر٣٩٥	٠ر٥٨١
٠ر٠٧٠	٠ر١١٠	٠ر١٨٠	٠ر٢٧٩	٠ر٢٩٠	٠ر٤٤٠	٠ر٤٠٠	٠ر٥٨٨
٠ر٠٧٥	٠ر١١٨	٠ر١٨٥	٠ر٢٨٧	٠ر٢٩٥	٠ر٤٤٧	٠ر٤٠٥	٠ر٥٩٤
٠ر٠٨٠	٠ر١٢٥	٠ر١٩٠	٠ر٢٩٤	٠ر٣٠٠	٠ر٤٥٤	٠ر٤١٠	٠ر٦٠٠
٠ر٠٨٥	٠ر١٣٣	٠ر١٩٥	٠ر٣٠٢	٠ر٣٠٥	٠ر٤٦١	٠ر٤١٥	٠ر٦٠٧
٠ر٠٩٠	٠ر١٤١	٠ر٢٠٠	٠ر٣٠٩	٠ر٣١٠	٠ر٤٦٨	٠ر٤٢٠	٠ر٦١٣
٠ر٠٩٥	٠ر١٤٩	٠ر٢٠٥	٠ر٣١٧	٠ر٣١٥	٠ر٤٧٥	٠ر٤٢٥	٠ر٦١٩
٠ر١٠٠	٠ر١٥٦	٠ر٢١٠	٠ر٣٢٤	٠ر٣٢٠	٠ر٤٨٢	٠ر٤٣٠	٠ر٦٢٥
٠ر١٠٥	٠ر١٦٤	٠ر٢١٥	٠ر٣٣١	٠ر٣٢٥	٠ر٤٨٩	٠ر٤٣٥	٠ر٦٣١

φ	ر	φ	ر	φ	ر	φ	ر
٠ر٤٤٠	٠ر٦٣٧	٠ر٥٩٠	٠ر٨٠٠	٠ر٧٥٠	٠ر٩٢٤	٠ر٨٩٠	٠ر٩٨٥
٠ر٤٤٥	٠ر٦٤٣	٠ر٥٩٥	٠ر٨٠٤	٠ر٧٤٥	٠ر٩٢١	٠ر٨٩٥	٠ر٩٨٦
٠ر٤٥٠	٠ر٦٤٩	٠ر٦٠٠	٠ر٨٠٩	٠ر٧٤٠	٠ر٩١٨	٠ر٩٠٠	٠ر٩٨٨
٠ر٤٥٥	٠ر٦٥٥	٠ر٦٠٥	٠ر٨١٤	٠ر٧٥٥	٠ر٩٢٧	٠ر٩٠٥	٠ر٩٨٩
٠ر٤٦٠	٠ر٦٦١	٠ر٦١٠	٠ر٨١٨	٠ر٧٦٠	٠ر٩٣٠	٠ر٩١٠	٠ر٩٩٠
٠ر٤٦٥	٠ر٦٦٧	٠ر٦١٥	٠ر٨٢٣	٠ر٧٦٥	٠ر٩٣٣	٠ر٩١٥	٠ر٩٩١
٠ر٤٧٠	٠ر٦٧٣	٠ر٦٢٠	٠ر٨٢٧	٠ر٧٧٠	٠ر٩٣٥	٠ر٩٢٠	٠ر٩٩٢
٠ر٤٧٥	٠ر٦٧٩	٠ر٦٢٥	٠ر٨٣٢	٠ر٧٧٥	٠ر٩٣٨	٠ر٩٢٥	٠ر٩٩٣
٠ر٤٨٠	٠ر٦٨٥	٠ر٦٣٠	٠ر٨٣٦	٠ر٧٨٠	٠ر٩٤١	٠ر٩٣٠	٠ر٩٩٤
٠ر٤٨٥	٠ر٦٩٠	٠ر٦٣٥	٠ر٨٤٠	٠ر٧٨٥	٠ر٩٤٤	٠ر٩٣٥	٠ر٩٩٥
٠ر٤٩٠	٠ر٦٩٦	٠ر٦٤٠	٠ر٨٤٤	٠ر٧٩٠	٠ر٩٤٦	٠ر٩٤٠	٠ر٩٩٦
٠ر٤٩٥	٠ر٧٠٢	٠ر٦٤٥	٠ر٨٤٩	٠ر٧٩٥	٠ر٩٤٩	٠ر٩٤٥	٠ر٩٩٦
٠ر٥٠٠	٠ر٧٠٧	٠ر٦٥٠	٠ر٨٥٣	٠ر٨٠٠	٠ر٩٥١	٠ر٩٥٠	٠ر٩٩٧
٠ر٥٠٥	٠ر٧١٣	٠ر٦٥٥	٠ر٨٥٧	٠ر٨٠٥	٠ر٩٥٣	٠ر٩٥٥	٠ر٩٩٨
٠ر٥١٠	٠ر٧١٨	٠ر٦٦٠	٠ر٨٦١	٠ر٨١٠	٠ر٩٥٦	٠ر٩٦٠	٠ر٩٩٨
٠ر٥١٥	٠ر٧٢٤	٠ر٦٦٥	٠ر٨٦٥	٠ر٨١٥	٠ر٩٥٨	٠ر٩٦٥	٠ر٩٩٩
٠ر٥٢٠	٠ر٧٢٩	٠ر٦٧٠	٠ر٨٦٩	٠ر٨٢٠	٠ر٩٦٠	٠ر٩٧٠	٠ر٩٩٩
٠ر٥٢٥	٠ر٧٣٤	٠ر٦٧٥	٠ر٨٧٣	٠ر٨٢٥	٠ر٩٦٣	٠ر٩٧٥	٠ر٩٩٩
٠ر٥٣٠	٠ر٧٤٠	٠ر٦٨٠	٠ر٨٧٦	٠ر٨٣٠	٠ر٩٦٥	٠ر٩٧٥	٠ر٩٩٩
٠ر٥٣٥	٠ر٧٤٥	٠ر٦٨٥	٠ر٨٨٠	٠ر٨٣٥	٠ر٩٦٧	٠ر٩٨٥	١ر٠٠٠
٠ر٥٤٠	٠ر٧٥٠	٠ر٦٩٠	٠ر٨٨٤	٠ر٨٤٠	٠ر٩٦٩	٠ر٩٩٠	١ر٠٠٠
٠ر٥٤٥	٠ر٧٥٥	٠ر٦٩٥	٠ر٨٨٧	٠ر٨٤٥	٠ر٩٧١	٠ر٩٩٥	١ر٠٠٠
٠ر٥٥٠	٠ر٧٦٠	٠ر٧٠٠	٠ر٨٩١	٠ر٨٥٠	٠ر٩٧٢		
٠ر٥٥٥	٠ر٧٦٦	٠ر٧٠٥	٠ر٨٩٥	٠ر٨٥٥	٠ر٩٧٤		
٠ر٥٦٠	٠ر٧٧١	٠ر٧١٠	٠ر٨٩٨	٠ر٨٦٠	٠ر٩٧٦		
٠ر٥٦٥	٠ر٧٧٦	٠ر٧١٥	٠ر٩٠٢	٠ر٨٦٥	٠ر٩٧٨		
٠ر٥٧٠	٠ر٧٨٠	٠ر٧٢٠	٠ر٩٠٥	٠ر٨٧٠	٠ر٩٧٩		
٠ر٥٧٥	٠ر٧٨٥	٠ر٧٢٥	٠ر٦٠٨	٠ر٨٧٥	٠ر٩٨١		
٠ر٥٨٠	٠ر٧٩٠	٠ر٧٣٠	٠ر٩١١	٠ر٨٨٠	٠ر٩٨٢		
٠ر٥٨٥	٠ر٧٩٥	٠ر٧٣٥	٠ر٩١٥	٠ر٨٨٥	٠ر٩٨٢		

المـــراجع

اولا ــ المراجع العربية :

١ ــ السيد محمد خيرى : الاحصـــاء فى البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية . القاهرة : دار الفكر العربى ، ١٩٧٠ .

٢ ــ رمزية الغريب : التقويم والقياس النفسى والتربوى . القاهرة : مكتبة الانجلو . ١٩٧٠ .

٣ ــ عبد العزيز القوصى ، حســـن حسين ، محمد خليفة بـــركات : الاحصاء فى التربية وعلم النفس . ١٩٥٧ م.

٤ ــ فؤاد البهى السيد : علم النفس الاحصائى وقياس العقل البشرى، القاهرة : دار الفكر العربى . الطبعة الثالثة ، ١٩٧٩ .

ثانيا ــ المراجع الاجنبية :

1 — Anderson, N.H. Scales and Statistics, Parametric and nonparametric. **Psychological Bulletin.** 58, 310 - 316, 1961.

2 — Asher, H.B. **Causal Modeling.** Beverly Hills : Sage, 1976.

3 — Blalock, H.M. **Causal Inferences in Nonexperimental Research.** Chapel Hill : Univ. Of North Carolina Press, 1964.

4 — Blalock, H.M. **Methodology of Social Research.** New York : McGraw - Hill, Inc. 1968.

5 — Blalock, H.M. **Causal Models in the Social Sciences.** Chicago : Aldine. Atherton, Inc. 1971.

6 — Blalock, H.M. **Social Statistics.** New York : McGraw - Hill. 1979.

7 — Bock, R. D **Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research.** New York : McGraw - Hill, Inc., 1975.

8 Bohl M. **A Guide for Programmers.** N. J Prentice - Hall Inc., 1968.

9 — Borko, H. **Computer Application in the Behavioral Sciences.** N. J. : Prentice - Hall Inc., 1962.

10 - Bradley, J.V. **Distribution - Free Statistical Test.** Englewood Cliffs, N. J. : Prentice - Hall Inc., 1968.

11 — Brown, J.; Workman, R. **How a Computer System work.** New York . Arco publishing Inc., 1975.

12 — Bruner, J.; Goodnow, J.; and Austin, G. **A Study of Thinking.** New York : Wiley, 1956.

13 — Burke. C. J. Additive Scales and Statistics. **Psychological Review,** 60, 73 - 75, 1953.

14 — Campell, D. and Stanley, J. **Experimental and Quasi - Experimental Design for Research.** Chicago : Rand McNally, 1963.

15 — Carroll, J.B. The Nature of Data, or How to Choose a Correlation Coefficient. **Psychomerrica,** 26, 347 - 377, 1961.

16 — Cohen. J. and Cohen, P. **Applied Multiple Regsession Correlation for the Behavioral Sciences.** New York : Wiley, 1972.

17 — Comrey, A. **Elementary Statistics : A Problem Solving Approach. ILL :** The Dorsey Press, 1975.

18 Cooley, W.W and Lohnes, P.R. **Multivariate Data Analysis.** New York : Wiley, 1971.

19 - Darlington, R. B. Multiple Regression in Psychological Research. **Psychological Bulletin.** 69, 161 - 182, 1968.

20 Duncan, O.D. **Introduction to Structural Equation Models.** New York : Academic press, 1975.

ssion Analysis. New York : Wiley, 1959.

22 Ezekial, M. and Fox, K.E. **Methods of Correlation and Regre-**

21 Dunn, O and Clark V **Applied Statistics : Analysis of Variance and Regression.** New York Wiley, 1974.

23 — Ferguson, G. **Statistical Analysis in Psychology and Education.** 5th ed. New York : McGraw - Hill, 1978.

24 — Finn, J. D. **A General Model for Multivariate Analysis.** New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

25 — Fleiss, J. **Statistical Methods for Rates and Proportions.** New York : Wiley, 1973.

26 — Geer, Van der. **Introduction to Multivariate Analysis for the Social Science.** San Francisco : W. H. Freeman and Company, 1971.

27 — Gibbons, J. **Nonparametric Methods for Quantitative Analysis.** New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1976.

28 — Green, B. **Digital Computers in Research.** New York : McGraw - Hill, 1963.

29 — Guilford, J. P. **Fundamental Statistics in Psychology and Education.** 4 th ed. New York : McGraw Hill, 1965.

30 — Hagood, M. and Daniel, P. **Statistics for Sociologists.** New York : Henry Holt, 1952.

31 — Harris, M. **Introduction to Data Processing : A Self Teaching Guide.** New York : Wiley, 1979.

32 — Hays, S.P. Diagrams for Computing Tetrachoric Correlation Coefficient from Percentage Differences. **Psychometrica,** 11, 163 - 172, 1946.

33 — Hays S.P. **Statistics for the Social Ssiences.** New York : Holt, Reinhart and winston, 1973.

34 — Heise, D. **Causal Analysis.** New York : Wiley, 1975.

35 — Hollander, M. and Wolfe, D. **Nonparametric Statistical Methods.** New York : Wiley, 1973.

36 — Insko, C. and Schoeninger, D. **Introductory Statistics for Psychology,** 2 nd ed. Boston : Allyn and Bacon, 1977.

37 — Jekins, W. L. An Improved Method for Tetrachoric r. **Psychometrica,** 20, 253 - 258, 1955.

38 Kenny, D.A **Correlation and Causality.** New York Wiley, 1979

39 Kerlinger. F N. and Pedhazur, E. **Multiple Regression in Behavioral Research** - New York . Holt, Rinehart and Winston, 1973.

40 - Kerlinger, F.N. **Foundations of Behavioral Research.** 2 nd ed. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1973

41 Kleinbaum, D. and Kupper, L. **Applied Regression Analysis and Other Multivariate Methods.** Mass Duxbury press, 1978.

42 - - Kruskal, W. and Tanur Judith, **International Encyclopedia of Statistics,** Volume 1, 2. New York : The Free press, 1978.

43 — Leach, C. **Introduction to Statistics : A Nonparametric Approach for the Social Sciences.** New York : Wiley, 1979.

44 — Li, Ching C. **Path Analysis : A Primer.** Grove, Calif - The Boxwood Press 1977.

45 — McNemar, Q. **Psychological Statistics,** 2 nd ed. New York : Wiley, 1955.

46 — Moroney, M J. **Facts From Figures.** Baltimore : Penguin Books. 1953.

47 - - Morrison, D.F. **Multivariate Statistical Methods.** New York : McGraw - Hill, 1967.

48 — *Mosteller*. F. and Tukey, *J.* **Data Analysis and Regression : A Second Course in Statistics, Reading.** MA : Addison - Wesley, 1977.

49 -- Nie, N. H.; *Hull, C. H.* and Others. **Statistical Package for Social Sciences (SPSS).** New York : McGraw - Hill, 1980.

50 -- O'Muircheartaigh, C. and Payne, G. **the Analysis of Survey Data. Volume 2. Model Fitting.** New York . Wiley, 1977.

51 Peatman, J. **Descriptive and Sampling Statistics.** New York . Harper and Brothers 1947.

52 Peters, C. and Walter, Van Voorhis. **Statistical Procedures and their Mathematical Bases.** New York McGraw Hill, 1940.

53 — Press, J. **Applied Multivariate Analysis.** New York : Holt, Rinehart and Winston, 1972.

54 — Roscoe, J. **Fundamental Research Statistics for the Behavioral Sciences,** 2 nd ed. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1975

55 — Siegel, S. **Nonparametric Statistics.** New York : McGraw - Hill, 1956.

56 — Steel. R.; Torrie J. **Principles and Procedures of Statistics : A Biometrical Approach,** 2 nd ed. New York : McGraw - Hill, 1980.

57 — Tatsuoka, M. M **Multivariate Analysis : Techniques for Educational and Psychological Research.** New York : Wiley, 1971.

58 — Thorndike. R. **Correlational Procedures for Research.** New York : Gardner press, 1978.

59 — Tukey. J. W. **Exploratory Data Analysis. Readings.** MA : Addison - Wesley, 1977.

60 — Veldman, D. J. **Fortran Programming for the Behavioral Sciences** New Yark . Holt, Rinehart and Winston, 1967.

61 — Yule, U. and Kendall M. **An Introduction to the Theory of Statistics.** New York . Hafner publishing Co., 1958.

62 — Walizer, M. and Wienir, P. **Research Methods and Analysis : Searching for Relationships.** New York : Harper and Row, 1978.

63 — Wright. S. Correlation and Causation. **Journal of Agricultural Research,** 20, 557 - 585, 1921.

64 — Wright, S. the Method of Path Coefficients. **Annals of Mathematical Statistics,** 5, 161 - 215, 1934.

65 — Wright, S. Path Coefficients and Path Regressions : Alternative or Complementary Concepts ? **Biometrica,** 16, 189 - 202, 1960.

الفهرس

الموضوع	الصفحة
الفصل الرابع : خصائص التوزيعات التكرارية ، ثانيا : مقاييس التشتت والالتواء والتفرطح .	١٢١ — ١٨٠
المدى المطلق — الانحراف الربيعي — الانحراف المتوسط — الانحراف المعياري والتباين — المقاييس النسبية للتشتت — العزوم حول المتوسط الحسابي — مقاييس الالتواء — مقاييس التفرطح — تمارين على الفصل الرابع .	
الفصل الخامس : الدرجات المحولة .	١٨١ — ٢٢٠
المئينات — الرتب المئينية — الإعشاريات — الدرجات المعيارية — الدرجات التائية — تحويلات خطية أخرى — تمارين على الفصل الخامس .	
الفصل السادس : التوزيعات الاعتدالية .	٢٢١ — ٢٦٤
المنحنى الاعتدالي — خواص المنحنى الاعتدالي — المساحة تحت المنحنى الاعتدالي — استخدام خصائص المنحنى الاعتدالي — في تحليل البيانات — إيجاد المئينيات باستخدام المنحنى الاعتدالي — تحويل التوزيعات المختلفة إلى الصورة الاعتدالية — تمارين على الفصل السادس	
الباب الثاني	
تحليل البيانات ذات المتغيرين	٢٦٥ — ٦١٦
الفصل السابع : مقاييس العلاقة إذا كان كل من المتغيرين من المستوى الفترى أو النسبي	٢٦٧ — ٣٢٢
مفهوم معامل الارتباط — معامل ارتباط بيرسون — فروض معامل ارتباط بيرسون — طرق حساب معامل ارتباط بيرسون — تصحيح معامل	

الموضوع الصفحة

رقم الايداع ١٩٨٤/٣٢٦٩

الترقيم الدولي ٠ ــ ١١٤ ٠ ــ ١٠ ــ ٩٧٧